

## IV. rész

# Integrálszámítás



# Feladatok

## Határozatlan integrálás

### Elemi függvények integrálja

$$\boxed{4.5.} \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\boxed{4.7.} \int x^2 (x^2 - 1) dx$$

$$\boxed{4.9.} \int \frac{\sqrt{x} - x + x^4}{x^2} dx$$

$$\boxed{4.11.} \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$$

$$\boxed{4.13.} \int \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 2} dx$$

$$\boxed{4.15.} \int \frac{6}{5 + 5x^2} dx$$

$$\boxed{4.17.} \int tg^2 x dx$$

$$4.19. \int 3x^5 dx$$

$$\boxed{4.6.} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\boxed{4.8.} \int (x^2 - 1)^2 dx$$

$$\boxed{4.10.} \int \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x}} dx$$

$$\boxed{4.12.} \int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\boxed{4.14.} \int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx$$

$$\boxed{4.16.} \int \frac{\ln 2}{\sqrt{2 + 2x^2}} dx$$

$$\boxed{4.18.} \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

$$4.20. \int \frac{x^2 - 7x + 8}{x^2} dx$$

### Integrálás helyettesítéssel.

$$\boxed{4.21.} \int e^{-x} dx$$

$$\boxed{4.23.} \int \sqrt{8 - 2x} dx$$

$$\boxed{4.25.} \int 10^x \cdot e^x dx$$

$$\boxed{4.27.} \int \frac{3}{\sqrt{3x^2 - 2}} dx$$

$$\boxed{4.22.} \int \cos(4x - 5) dx$$

$$\boxed{4.24.} \int \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$$

$$\boxed{4.26.} \int \frac{dx}{5 + x^2}$$

$$\boxed{4.30.} \int x\sqrt{1 - x^2} dx$$

4.32.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

4.33.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

4.34.

$$\int x \sin(x^2+2) dx$$

4.36.

$$\int \frac{x}{4+x^2} dx$$

4.37.

$$\int \frac{dx}{x \ln x}$$

4.38.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

4.39.

$$\int \frac{x+2}{2x-1} dx$$

4.40.

$$\int \frac{x^4}{1-x} dx$$

4.41.

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx$$

4.42.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx$$

4.44.

$$\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$$

4.45.

$$\int \sin 8x dx$$

4.46.

$$\int \frac{1}{3x-5} dx$$

4.47.

$$\int e^{5x+7} dx$$

4.48.

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$$

4.49.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx$$

4.50.

$$\int \operatorname{tg} x dx$$

4.51.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)} dx$$

Parciális integrálás.

4.53.

$$\int \left( \frac{x+2}{e^x} \right)^2 dx$$

4.55.

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

4.57.

$$\int x \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx$$

4.59.

$$\int x \cdot \arctg x \, dx$$

4.60.

$$\int \arctg \sqrt{x} \, dx$$

4.61.

$$\int \ln^3 x \, dx$$

4.62.

$$\int (\arcsin x)^2 \, dx$$

4.63.

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx$$

4.64.

$$\int e^{\arcsin x} \, dx$$

### Racionális törtfüggvények integrálása.

4.65.

$$\int \frac{x-2}{x^2-7x+12} \, dx$$

4.66.

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8} \, dx$$

4.67.

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} \, dx$$

4.68.

$$\int \frac{x}{x^4-3x^2+2} \, dx$$

4.70.

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} \, dx$$

4.71.

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4} \, dx$$

4.72.

$$\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} \, dx$$

4.73.

$$\int \frac{dx}{x^4-x^2}$$

4.74.

$$\int \frac{dx}{x^6+x^4}$$

4.75.

$$\int \frac{x}{x^3-1} \, dx$$

4.76.

$$\int \frac{x^2}{1-x^4} \, dx$$

4.77.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

4.78.

$$\int \frac{1}{1+x^4} \, dx$$

4.79.

$$\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx$$

4.80.

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$$

4.81.

$$\int \frac{1}{(x-3)^4} dx$$

4.82.

$$\int \frac{2}{x-5} dx$$

4.83.

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+27} dx$$

4.84.

$$\int \frac{x-1}{x^2-6x+27} dx$$

4.85.

$$\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} dx$$

### Trigonometrikus függvények integrálása.

4.86.

$$\int \cos^5 x dx$$

4.87.

$$\int \sin^6 x dx$$

4.88.

$$\int \sin^6 x \cos^3 x dx$$

4.89.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$$

4.90.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

4.91.

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

4.92.

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

4.93.

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x}$$

4.94.

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx$$

4.95.

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$$

4.96.

$$\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$$

4.97.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$$

4.98.

$$\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx$$

4.99.

$$\int \sin 3x \cdot \cos \left( 5x - \frac{\pi}{2} \right) dx$$

4.100.

$$\int \sqrt{1 + \sin x} \, dx$$

**Hiperbolikus és  $R(e^x)$  függvények integrálása.**

4.101.

$$\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^3 x \, dx$$

4.102.

$$\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\sqrt{\operatorname{ch} x}} \, dx$$

4.103.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x}$$

4.104.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$$

4.105.

$$\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 2x \cdot \operatorname{ch} 3x \, dx$$

4.106.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \, dx$$

4.107.

$$\int \frac{6}{e^x - 3} \, dx$$

4.108.

$$\int e^x \cdot \operatorname{sh} 3x \, dx$$

4.109.

$$\int e^x \cdot \operatorname{sh} x \, dx$$

**Irracionális függvények integrálása.**

4.110.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x + 5}} \, dx$$

4.111.

$$\int (x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{2x - 1} \, dx$$

4.112.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

4.113.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt{x}} \, dx$$

4.114.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

4.115.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$$

4.116.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + 2x^2}} \, dx$$

4.117.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$$



4.118.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}}$$

4.119.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 4}}$$

4.120.

$$\int \sqrt{1 + 2x - x^2} dx$$

4.121.

$$\int \sqrt{3x^2 - 3x + 1} dx$$

4.122.

$$\int \sqrt{x^2 + 6x + 10} dx$$

4.123.

$$\int \sqrt{3 - x^2} dx$$

4.124.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 40}}$$

4.125.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 12x + 30}}$$

4.126.

$$\int \sqrt{2x^2 + 8x + 5} dx$$

4.127.

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{4 + x - x^2}} dx$$

## Határozott integrálás

4.128.

$$\int_0^2 x e^x dx$$

4.129.

$$\int_0^{\sqrt{3}} 2x \arctan x dx$$

4.130.

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^2} dx$$

4.131.

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5x-4}} dx$$

### Trigonometrikus integrálok

4.132.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx$$

4.133.

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$$

4.134.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2 x \sin^3 x dx$$

4.135.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x} dx$$

4.136.

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx$$

4.137.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx$$

4.138.

$$\int_0^{\pi} \sin 4x \cos 5x dx$$

### Improprius integrálok

4.139.

$$\int_{1/2}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

4.140.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

4.141.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$$

4.142.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

4.143.

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

4.144.

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx, \quad a > 0$$

4.145.

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx$$

4.146.

$$\int_0^{\infty} \cos x e^{-x} dx$$

4.147.

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

4.148.

$$\int_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

4.149.

$$\int_0^{\infty} \sin(ax) e^{-bx} dx$$

4.150.

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

4.151.

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx$$

### Helyettesítéses integrálok

4.152.

$$\int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx$$

4.153.

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos \ln x}{x} dx$$

4.154.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

4.155.

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

### Parciális integrálás

4.156.

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1) \sin(3x) dx$$

4.157.

$$\int_0^1 \left( \frac{x+2}{e^x} \right)^2 dx$$

4.158.

$$\int_0^1 x^2 a^x dx, \quad a > 0$$

## Improprius integrálok

4.201-4.220.: Számolja ki az alábbi improprius integrálok értékét!

4.201.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

4.212.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}} dx$$

4.202.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

4.213.

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$$

4.203.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

4.214.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

4.204.

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{5}{x^2 - 2x + 2} dx$$

4.215.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x-1} dx$$

4.205.

$$\int_{-\infty}^{-3} x e^x dx$$

4.216.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{2x-1}} dx$$

4.206.

$$\int_{-\infty}^{10} x e^x dx$$

4.217.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

4.207.

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

4.218.

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

4.208.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+2x)^3} dx$$

4.219.

$$\int_{\frac{4}{3}}^5 \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$$

4.210.

$$\int_1^{\infty} e^{-2x+1} dx$$

4.220.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

4.211.

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}} dx$$

## Területszámítás

Határozza meg a függvények gráfjai alatti területet, és ábrázolja a függvényeket!

$$4.221. \quad y = \frac{3x^2}{2}; \quad -2 \leq x \leq 2$$

$$4.230. \quad y = \cos\left(\frac{x}{2}\right); \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$4.222. \quad y = \frac{5}{3x^2} + x; \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$4.231. \quad y = \cosh(2x); \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$4.223. \quad y = \sqrt{x}; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$4.232. \quad y = \sinh(x); \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$4.224. \quad y = (1-x)^3; \quad -2 \leq x \leq 1$$

$$4.233. \quad y = \frac{2}{x}; \quad -2 \leq x \leq -1$$

$$4.225. \quad y = x^3 - 3; \quad 3 \leq x \leq 4$$

$$4.234. \quad y = \frac{1}{1-x}; \quad 2 \leq x \leq 3$$

$$4.226. \quad y = x^4 - x^3; \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$4.235. \quad y = \frac{1}{2x-5}; \quad 3 \leq x \leq 4$$

$$4.227. \quad y = e^{2x}; \quad -0.5 \leq x \leq 1$$

$$\boxed{4.228.} \quad y = \sin(3x); \quad 0.0 \leq x \leq 0.3$$

$$4.236. \quad y = \frac{1}{2x-5}; \quad 1 \leq x \leq 2$$

4.237. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $y = \frac{1}{4}$  alatti terület  $[a, b]$  és  $[c, x]$  szakaszhoz tartozó része egyenlő legyen! Mennyi az  $x$ , ha  $c = 2a, c = 3a$ ?

4.238. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $y = \frac{1}{1+x^2}$  görbe alatti terület 0-tól  $x$ -ig terjedő szakasza  $\frac{12}{5}$ -del legyen egyenlő!

4.239. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $y = e^{-2x}$  görbe alatti terület  $x$ -től 1-ig terjedő szakasza 3-mal legyen egyenlő!

4.230. Határozzuk meg  $x$  értékét úgy, hogy az  $y = \sin(x)$  alatti terület 0-tól  $x$ -ig terjedő szakasza  $\frac{1}{4}$ -del legyen egyenlő!

Határozza meg a következő görbék közötti területet és ábrázolja is a görbéket!

$$4.241. \quad y = x^2 \quad \text{és} \quad y = 2x$$

$$4.245. \quad y = x^2 \quad \text{és} \quad y = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$4.242. \quad y = \sqrt{x} \quad \text{és} \quad y = \frac{2}{x}$$

$$4.246. \quad y = x^2 \quad \text{és} \quad y = 3x$$

$$\boxed{4.243.} \quad y = x^2 \quad \text{és} \quad y = 1 - x^2$$

$$4.247. \quad y = \frac{x^2}{3} \quad \text{és} \quad y = 2 + \frac{x}{3}$$

$$4.244. \quad y = x^2 \quad \text{és} \quad y = 1 - 3x^2$$

$$4.248. \quad y = x^4 \quad \text{és} \quad y = 3x^2 - 2$$

$$4.249. \quad y = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad y = 2.5 - x \qquad 4.251. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \quad \text{és} \quad x + y = 1$$

$$4.250. \quad x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1 \quad \text{és} \quad y = 1 - x \qquad 4.252. \quad y = \sin(x) \quad \text{és} \quad y = \frac{2}{x}$$

**Végezze el az alábbi területszámításokat!**

**4.253.** Határozzuk meg az  $y = x(1 - x)$  parabola és ennek az  $x = 0, x = 2$  abszcisszájú pontjaihoz húzott érintői közötti területet!

**4.254.** Határozzuk meg az  $y = 4.5 - \frac{1}{2}(x - 4)^2$  parabola, és ennek az  $x = 3$  és  $x = 6$  pontjában húzott érintői közötti területet!

**4.255.** Határozzuk meg az  $y = \frac{1}{x}$  hiperbola, és a  $P(2, 2)$  pontra illeszkedő,  $y = x$  egyenesre merőleges egyenes által határolt síkidom területét.

**4.256.** Határozzuk meg az  $y = \frac{1}{x}$  hiperbola, az  $y = x$  és az  $y = a^{\frac{1}{2}} * x$  egyenes által határolt síkidom területét! Ábrázoljuk is a szektort!

**4.257.** Igazoljuk általánosan, hogy a parabolaszélet területe egyenlő a körülvevő paralelogramma területének  $\frac{2}{3}$  részével!

**4.258.** igazoljuk, hogy a bevonalkázott parabolaszélet-terület a húr, az  $x$  tengely és az érintő által határolta OAB háromszög területének  $\frac{2}{3}$ -a!

## Görbe ívhossza

Határozza meg az függvények görbéjének ívhosszát a megadott határok között!

$$4.259. \quad y = x^2; \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$4.264. \quad x = 5 \cos(t); y = 5 \sin(t); \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$4.260. \quad y = \cosh(x); \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$4.265. \quad x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$4.261. \quad y = \ln(x); \quad 2 \leq x \leq 6$$

$$4.262. \quad y = \ln(\sin x); \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$4.266. \quad x = 5 \cos^3 t; y = 5 \sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

$$4.263. \quad x^2 + y^2 = 25; \quad 0 \leq x \leq 5$$

$$4.267. \quad x = 2t; y = 3t^2; \quad 2 \leq t \leq 5$$

## Forgástestek térfogata

Számítsa ki a következő paraméteresen megadott függvények forgástesteinek térfogatát!

$$4.268. \quad x = a \cos(t), y = a \sin(t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$4.269. \quad x = a(t - \sin t), y = a(t - \cos t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$4.270. \quad x = e^t, y = t; \quad 1 \leq t \leq 2$$

$$4.271. \quad x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Forgassa meg a következő görbéket az  $x$  tengely körül, és határozza meg a keletkező forgásfelületek és a megadott intervallumok végpontjaiban az  $x$  tengelyre állított merőleges síkok határolta térrész térfogatát!

$$\boxed{4.272.} \quad y = e^{2x}; \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$4.273. \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$4.274. \quad y = \frac{x^3}{3}; \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$4.275. \quad y = x - \frac{1}{x}; \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$4.276. \quad y = 1 - x^2; \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$4.277. \quad y^2 - x^2 = 1; \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$4.278. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1; \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$\boxed{4.279.} \quad y = \cos^2 x; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$4.280. \quad y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}; \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$4.281. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad -a \leq x \leq a$$





# Megoldások

## Határozatlan integrálás

4.05.

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

4.06.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = 3 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C$$

4.07.

$$\int x^2 (x^2 - 1) dx = \int (x^4 - x^2) dx = \int x^4 dx - \int x^2 dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + C$$

4.08.

$$\int (x^2 - 1)^2 dx = \int (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + C$$

4.09.

$$\int \frac{\sqrt{x} - x + x^4}{x^2} dx = \int \left( x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{x} + x^2 \right) dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} - \ln x + \frac{x^3}{3} + C$$

4.11.

$$\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx = \int \left( x^{\frac{3}{2}} + 1 \right) dx = \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + x + C$$

4.14.

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)} dx &= \int \left( \frac{1 + x^2}{x^2(1 + x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1 + x^2)} \right) dx = \\ &= \int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = -\frac{1}{x} + \arctan x + C \end{aligned}$$

4.15.

$$\int \frac{6}{5 + 5x^2} dx = \frac{6}{5} \int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{6}{5} \arctan x + C$$

4.16.

$$\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2 + 2x^2}} dx = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arcsinh} x + C$$

4.18.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x - \sin x} dx \\ &= \int (\cos x + \sin x) dx = \sin x - \cos x + C. \end{aligned}$$

$$4.19. \quad \frac{x^2}{2} + C.$$

$$4.20. \quad x - 7 \ln x - \frac{8}{x} + C.$$

**4.21.** Végezzük el az  $u = -x$  helyettesítést, ezzel  $dx = -du$ :

$$\int e^{-x} dx = - \int e^u du = -e^u + C = -e^{-x} + C.$$

**4.22.** Végezzük el az  $u = 4x - 5$  helyettesítést. Ekkor  $du = 4 dx$ , és így

$$\int \cos(4x - 5) dx = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin(4x - 5) + C.$$

*Megjegyzés: Az ilyen integrálokat célszerű annak az összefüggésnek a felhasználásával kiszámítani, hogy ha*

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

*akkor*

$$\int f(Ax + b) dx = \frac{1}{A} F(Ax + b) + C.$$

*Például:*

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

*tehát*

$$\int \cos(4x - 5) dx = \frac{1}{4} \sin(4x - 5) + C.$$

*A továbbiakban ezt az eljárást alkalmazzuk valahányszor a belső függvény  $x$ -nek lineáris függvénye.*

**4.23.**

$$\int \sqrt{8 - 2x} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (8 - 2x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} \sqrt{(8 - 2x)^3} + C$$

**4.24.**

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx = -\frac{1}{3} \left[-\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)\right] + C = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + C$$

**4.25.**

$$\begin{aligned} \int 10^x e^x dx &= \int e^{x \ln 10} \cdot e^x dx = \int e^{x(1 + \ln 10)} dx \\ &= \frac{e^{x(1 + \ln 10)}}{1 + \ln 10} + C = \frac{10^x e^x}{1 + \ln 10} + C. \end{aligned}$$

Megoldás közben azt az összefüggést használtuk fel, hogy  $a = e^{\ln a}$ , ill.  $10 = e^{\ln 10}$ . Ezért

$$10^x = (e^{\ln 10})^x = e^{x \ln 10}.$$

**4.26.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 + x^2} &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{5}} = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C = \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

4.27.

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{\sqrt{3x^2-2}} dx &= \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3x^2}{2}-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arch} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} x \right) + C = \sqrt{3} \operatorname{arch} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} x \right) + C. \end{aligned}$$

4.30.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int (-2x) \cdot \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = -\frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= -\frac{1}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + C. \end{aligned}$$

Az integrálban  $u = 1 - x^2$  helyettesítést végeztük el, ekkor  $du = -2x dx$ .

4.32.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{x^2+1} + C.$$

A használt helyettesítés:  $u = x^2 + 1$ , ekkor  $du = 2x dx$ .

4.33.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{\sin x} + C.$$

A használt helyettesítés:  $u = \sin x$ , ekkor  $du = \cos x dx$ .

4.34.

$$\int x \sin(x^2+2) dx = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos(x^2+2) + C.$$

A használt helyettesítés:  $u = x^2 + 2$ , ekkor  $du = 2x dx$ .

4.36.

$$\int \frac{x}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{4+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(4+x^2) + C.$$

Azt látjuk, hogy 2-vel való szorzás után a számláló a nevező deriváltja, tehát a kifejezés integrálja a nevező  $e$  alapú logaritmusával egyenlő. Ezt a szabályt jól tanuljuk meg és az ilyen esetekben mellőzzük a helyettesítést, bár ez az előzőek egy speciális esete. (Most is alkalmazhattuk volna az  $u = x^2 + 4$  helyettesítést.)

4.37.

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln \ln x + C$$

4.38.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\ln^3 x} + C.$$

A használt helyettesítés  $u = \ln x$ , ekkor  $du = \frac{1}{x} dx$ .

4.39.

$$\int \frac{x+2}{2x-1} dx = \int \left( \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-1} \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C.$$

4.40.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{1-x} dx &= \int \left( -x^3 - x^2 - x - 1 - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \ln(x-1) + C. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\frac{x^4}{1-x} = -\frac{x^4}{x-1} = -\left( x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} \right).$$

4.41.

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2} \arctg u + C = \frac{1}{2} \arctg x^2 + C.$$

A használt helyettesítés  $u = x^2$ , ekkor  $du = 2x dx$ .

4.42.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \operatorname{arsh} u + C = \operatorname{arsh}(\sin x) + C.$$

A használt helyettesítés:  $u = \sin x$ , ekkor  $du = \cos x dx$ .

4.44. Ilyen esetekben az integrálandó függvényt két függvény összegére (vagy különbségére) bontjuk úgy, hogy az egyik függvénynél a számláló a nevező deriváltjának valami konstansszorososa legyen, a másik függvénynél pedig a számláló már csak egy konstans, melyet az integrál jel elé is kivihetünk. Tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2+9} dx &= \int \left( \frac{3x}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+9} \right) dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx - \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{3}{2} \ln(x^2+9) - \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

$$4.45. \int \sin(8x) dx = -\frac{\cos(8x)}{8} + c.$$

$$4.46. \int \frac{dx}{3x-5} = \ln|3x-5| + c.$$

$$4.47. \int e^{5x+7} dx = \frac{1}{5} e^{5x+7} + c.$$

$$4.48. \int \sin^3(x) \cos(x) dx = \frac{\sin^4(x)}{4} + c.$$

$$4.49. -\frac{1}{2}(1-x^3)^{2/3} + c.$$

4.50.  $-\ln |\cos(x)| + c.$

4.51.  $2 \ln(\sqrt{x} + 1) + c.$

4.53.

$$\int \left( \frac{x+2}{e^x} \right)^2 dx = \int (x^2 + 4x + 4) e^{-2x} dx = - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4} \right) e^{-2x} + C.$$

4.55.

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int x^2 e^{-x^2} 2x dx = \frac{1}{2} \int u e^{-u} du = -\frac{1}{2}(x^2 + 1) e^{-x^2} + C,$$

ahol  $u = x^2$  helyettesítéssel  $du = 2x dx$ .

4.57.

$$\int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x + C.$$

4.59.

$$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_v dx = *,$$

ahol a parciális integráláskor  $u = \frac{x^2}{2}$ , és  $v' = \frac{1}{1+x^2}$ . Így

$$* = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Felhasználtuk, hogy

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left( 1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx.$$

4.60.

$$\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = 2 \int u \operatorname{arctg} u du = x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$$

A használt helyettesítés:  $x = u^2$ , ekkor  $dx = 2u du$ .

4.61. Két parciális integrálást kell elvégezni:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln^3 x}_v dx &= x \ln^3 x - \int \underbrace{3}_{u'} \underbrace{\ln^2 x}_v dx = \\ &= x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6 \int \ln x dx = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x + C. \end{aligned}$$

4.62.  $u' = 1$ ,  $v = (\arcsin x)^2$  válsztással egy parciális integrálást végzünk, ekkor

$$u = x \quad v' = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

és ezért

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2 \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx = *$$

Újabb parciális integrálást végzünk

$$u = \arcsin x, \quad v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

választással, ekkor

$$\begin{aligned} * &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2 \int dx = \\ &= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C. \end{aligned}$$

**4.63.** Kétféleképpen végezzünk parciális integrálást:

$$\int \underbrace{e^{3x}}_u \underbrace{\cos 2x}_{v'} dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x dx \quad (4.1)$$

ahol

$$u' = 3e^{3x} \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Másrészt

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u'} \underbrace{\cos 2x}_v dx = \frac{1}{3} e^{3x} \cos 2x + \frac{2}{3} \int e^{3x} \sin 2x dx \quad (4.2)$$

ahol

$$u = \frac{1}{3} e^{3x} \quad v' = -2 \sin 2x.$$

Szorozzuk meg (4.1)-et négygel, (4.2)-t pedig kilencel és vonjuk össze az így adódó kifejezések jobb illetve baloldalát.

$$4 \int e^{3x} \cos 2x dx = 2e^{3x} \sin 2x - 6 \int e^{3x} \sin 2x dx$$

$$9 \int e^{3x} \cos 2x dx = 3e^{3x} \cos 2x + 6 \int e^{3x} \sin 2x dx$$

$$13 \int e^{3x} \cos 2x dx = 2e^{3x} \sin 2x + 3e^{3x} \cos 2x + C$$

Végül 13-al való osztás után nyerjük, hogy:

$$\int e^{3x} \cos 2x dx = \frac{1}{13} e^{3x} (2 \sin 2x + 3 \cos 2x) + C.$$

**4.64.**

$$\int e^{\arcsin x} dx = \int e^u \cos u du,$$

ahol  $\arcsin x = u$ , azaz  $x = \sin u$  helyettesítéssel  $dx = \cos u \, du$ . Így olyan alakra jutottunk, melyet parciálisan lehet integrálni, éppen az előző példában is bemutatott módszerrel. A parciális integrálást elvégezve adódik, hogy

$$\int e^u \cos u \, du = \frac{1}{2} e^u (\sin u + \cos u) + C,$$

tehát

$$\int e^{\arcsin x} dx = \frac{1}{2} e^{\arcsin x} (x + \sqrt{1-x^2}) + C$$

**4.65.** Ha a másodfokú nevezőjű törtfüggvény nevezője tényezők szorzataként írható fel, akkor a tört lineáris nevezőjű törtek összegére bontható.

Annak érdekében, hogy ezt a felbontást elvégezhesük a nevezőt egyenlővé tesszük 0-val és megoldjuk az így nyert egyenletet, mert ennek az egyenletnek a gyöktényezői lesznek a szorzat alakban felírt nevező tényezői. Az  $x^2 - 7x + 12 = 0$  egyenlet gyökei:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ , azaz

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3) \cdot (x - 4)$$

Most már ismerjük a keresett lineáris tört-függvények nevezőit, meghatározandók még a számlálók, melyek lineáris nevező esetén konstansok lesznek.

Jelöljük ezeket  $A$ -val és  $B$ -vel, akkor

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} \equiv \frac{A(x-4) + B(x-3)}{(x-3)(x-4)}.$$

Azonosságot írtunk, mert olyan  $A$  és  $B$  értéket keresünk, melyek mellett az egyenlőség minden  $x$ -re fennáll. Mivel a nevezők azonosan egyenlők az azonosságnak a számlálókra is fenn kell állni, azaz

$$x - 2 \equiv A(x - 4) + B(x - 3).$$

Az azonosság nyilván fennáll, ha az  $x$ -es tagok együtthatója mind a két oldalon egyenlő ugyanúgy, mint a konstansok. Ez azonban két egyenletet szolgáltat, melyekből  $A$  és  $B$

kiszámítható.

$A+B=1$	$4A+4B=4$	
$-4A-3B=-2$	$-4A-3B=-2$	A kapott $B$ értéket behelyettesítve
	$B=2$	

pld. az első egyenletbe  $A = -1$  adódik, tehát

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12} = -\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4}.$$

Ezért az integrál

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx &= \int \left( -\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4} \right) dx = -\ln(x-3) + 2\ln(x-4) + C = \\ &= \ln c \frac{(x-4)^2}{x-3}, \quad (C = \ln c \text{ bevezetésével}) \end{aligned}$$



**4.66.** Az  $x^2 + 4x + 8 = 0$  egyenletnek nincsenek valós gyökei, tehát  $x^2 + 4x + 8$  nem bontható tényezők szorzatára.

Bontsuk fel a törtet két tört összegére, melynek nevezője közös (a régi nevező), az egyik számlálója a nevező deriváltjának valami konstansszorososa, a másiké pedig konstans. A nevező deriváltja  $2x + 4$ , tehát a számlálókat a következő alakban keressük

$$\alpha(2x + 4) \quad \text{és} \quad \beta.$$

$\alpha$  és  $\beta$  értékét a következő feltételekből határozhatjuk meg:

$$\alpha(2x + 4) + \beta = 3x - 2.$$

Most is két egyenletet írhatunk fel, melyekből  $\alpha$  és  $\beta$  meghatározható.

$$2\alpha = 3, \quad 4\alpha + \beta = -2,$$

ezekből

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -8.$$

Így az integrált két integrál összegére bontottuk:

$$\int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 8} dx - 8 \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}.$$

Az első integrál eredménye ismert, hiszen a számláló a nevező deriváltja. A másodikat pedig teljes négyzetté való átalakítással vezetjük vissza ismert feladatra.

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 8} = \frac{1}{(x + 2)^2 + 4} = \frac{1}{4 \left[ \frac{(x+2)^2}{4} + 1 \right]}$$

ezért

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{4} 2 \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C$$

Tehát a megoldás:

$$\int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 8} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 4x + 8) - 4 \operatorname{arctg} \frac{x+2}{2} + C$$

**4.67.**

$$\frac{x^5 + x^4 + -8}{x^3 - 4x}$$

számlálója magasabb fokú mint a nevezője, ezért felbontható egy polinom és egy valódi tört összegére.

$$(x^5 + x^4 - 8) : (x^3 - 4x) = x^2 + x + 4$$

$$\begin{array}{r} -(x^5 - 4x^3) \\ \hline x^4 + 4x^3 - 8 \\ -(x^4 - 4x^2) \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{4x^3 + 4x^2 - 8}{-(4x^3 - 16x)} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{4x^3 - 16x} \quad \text{A polinom osztás eredménye:}$$

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x},$$

tehát

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int (x^2 + x + 4) dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx$$

Az első integrál kiszámítása nem okoz gondot, ahhoz azonban, hogy a másodikat meghatározzuk, a törtet részlet törték összegére kell bontanunk.

A nevezőt most minden különösebb számítás nélkül fel tudjuk írni szorzat alakjában

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x + 2)(x - 2),$$

tehát

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2} = \\ &= \frac{A(x^2 - 4) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 + 2x)}{x^3 - 4x}. \end{aligned}$$

Ennek alapján felírhatjuk az egyenletrendszer, melyből  $A$ ,  $B$  és  $C$  kiszámítható:

$$A + B + C = 4 \quad -2B + 2C = 16 \quad -4A = -8,$$

és innen

$$A = 2, \quad B = -3, \quad C = 5.$$

Megjegyezzük, hogy ilyen esetekben, amikor a gyökök mind különbözőek, általában gyorsabban kapjuk az ismeretlen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  értékeket, ha a számlálók egyenlőségét kifejező egyenletben  $x$  helyére a gyököket helyettesítjük.

Példánkban az

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x^2 - 4) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 + 2x)$$

kifejezésben  $x$  helyébe zérust írva azonnal nyerjük, hogy  $-8 = -4A$  azaz  $A = 2$ .  $x = 2$ -nél  $40 = 8C$ , innen  $C = 5$ . Végül  $x = -2$ -nél  $-24 = 8B$ , azaz  $B = -3$ , tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int \left( \frac{2}{x} - \frac{3}{x + 2} + \frac{5}{x - 2} \right) dx = \\ &= 2 \ln x - 3 \ln(x + 2) + 5 \ln(x - 2) + C. \end{aligned}$$

A keresett megoldás:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \frac{x^2(x - 2)^5}{(x + 2)^3} + C.$$

**4.68.** Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a nevező négy különböző tényező szorzatára bontható. Ezután a feladat az előzőhöz hasonlóan oldható meg. De munkát takaríthatunk meg az  $u = x^2$  helyettesítéssel. Ekkor ugyanis  $du = 2xdx$  és

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - 3u + 2} = \frac{1}{2} \ln \frac{u-2}{u-1} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-2}{x^2-1} + C.\end{aligned}$$

**4.70.**

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx &= \int \frac{4x-8+11}{(x-2)^3} dx = \int \left[ \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{11}{(x-2)^3} \right] dx = \\ &= -\frac{4}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} + C\end{aligned}$$

**4.71.**

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5$$

kifejezést  $x - 2$  polinomjaként felírva (pld. előállítjuk az

$$x_0 = 2$$

helyhez tartozó Taylor polinomját, lásd, 401. példát).

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = (x-2)^3 - (x-2) + 1$$

adódik, azaz

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4} dx &= \int \frac{(x-2)^3 - (x-2) + 1}{(x-2)^4} dx = \\ &= \int \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4} \right) dx = \\ &= \ln(x-2) + \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-2)^3} + C\end{aligned}$$

(Természetesen úgy is eljárhattunk volna, hogy a részlettörtekre bontást a többszörös gyököknek megfelelően végeztük volna el

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{d}{(x-2)^4}$$

alapján).

**4.72.** Többszörös gyökök esetén a gyöktényező a multiplicitásnak megfelelő számossággal szerepel a nevezőben az egytől a multiplicitásnak megfelelő hatványig. Elsőfokú gyöktényező esetén a számláló konstans.

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{d}{x-2} + \frac{e}{(x-2)^2}.$$

Ugyanis ebben a példában a 0 háromszoros, 2 pedig kétszeres gyök.

$$\begin{aligned}
 & x^3 - 2x^2 + 4 \equiv \\
 & \equiv A(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + B(x^3 - 4x^2 + 4x) + C(x^2 - 4x + 4) + d(x^4 - 2x^3) + ex^3 \\
 & \left. \begin{aligned}
 A + d &= 0 \\
 -4A + B - 2d + e &= 1 \\
 4A - 4B + C &= -2 \\
 4B - 4C &= 0 \\
 4C &= 4
 \end{aligned} \right\} =
 \end{aligned}$$

Egyenletrendszerből

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{4}, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad d = -\frac{1}{4}, \quad e = \frac{1}{2} \\
 \int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} dx &= \int \left( \frac{1}{4x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{4(x-2)} + \frac{1}{2(x-2)^2} \right) dx = \\
 &= \frac{1}{4} \ln \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2(x-2)} + C
 \end{aligned}$$

**4.73.**

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^2} = \int \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{0}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right) dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C$$

**4.74.**

$$\frac{1}{x^6 + x^4} = \frac{1}{x^4(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{Ex + F}{x^2 + 1}$$

Másodfokú gyöktényező esetén a számláló elsőfokú!

$$1 \equiv A(x^5 + x^3) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + d(x^2 + 1) + Ex^5 + Fx^4$$

azonosságból írható fel az egyenletrendszer, melyből  $A, B, C, D, E$  és  $F$  meghatározható.

$$A + e = 0$$

$$B + F = 0$$

$$A + C = 0$$

$$B + d = 0$$

$$C = 0 \quad A = 0 \quad e = 0$$

$$d = 1 \quad B = -1 \quad F = 1$$

Tehát

$$\int \frac{dx}{x^6 + x^4} = \int \left( \frac{0}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \arctg x + C$$

4.75.

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^3-1} &= \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \\ &= \frac{A(x^2+x+1) + B(x^2-x) + C(x-1)}{x^3-1}\end{aligned}$$

$$A+B=0 \quad A = \frac{1}{3}A - B + C = 1 \quad B = -\frac{1}{3}A - C = 0 \quad C = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^3-1} dx &= \int \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

4.76.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{1-x^4} dx &= \int \frac{x^2}{(1+x^2)(1-x^2)} dx = \int \frac{x^2}{(1+x)(1-x)(1+x^2)} dx = \\ &= \int \left( \frac{\frac{1}{4}}{1+x} - \frac{\frac{1}{4}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C\end{aligned}$$

4.77.

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+d}{x^2+1}$$

alapján végezzük a részlet törtre bontást és nyerjük:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)} &= \int \left( \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + C\end{aligned}$$

4.78. A nevező tényezőkre bontását a következőképpen végezhetjük el:

$$\begin{aligned}1+x^4 &= 1+2x^2+x^4-2x^2 = (1+x^2)^2-2x^2 = (1+x^2)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \\ &= (1+x^2+\sqrt{2}x)(1+x^2-\sqrt{2}x)\end{aligned}$$

A rész törtre való bontás vázlata

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Az eredmény:

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} + C$$

**4.79.** A feladat első pillanatra azonos jellegű az előzővel. Meg is oldható annak alapján, de gondosabb vizsgálat után kiderül, hogy speciális tulajdonságai figyelembe vételével sokkal egyszerűbben is megoldható.

$$\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx = \int \frac{x}{1+x^4} dx - \int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

Az első integrált

$$u = x^2$$

helyettesítéssel hozhatjuk még egyszerűbb alakra, alapintegrálra (lásd a 439. feladatot), a második pedig máris integrálható, mert a számláló a nevező deriváltjának a negyede.

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx - \int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C$$

**4.80.** Többszörös komplex gyök esetén javasolható a  $\operatorname{tg} t$  helyettesítés.

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^3} = \frac{1}{729} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{9}+1\right)^3} = \frac{1}{729} \int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x}{3}\right)^2+1\right]^3} = \frac{1}{729} \int \frac{3}{(\operatorname{tg}^2 t + 1)^3 \cos^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{243} \int \frac{\cos^6 t}{\cos^2 t} dt = (*)$$

$$\frac{x}{3} = \operatorname{tg} t; \quad dx = \frac{3}{\cos^2 t} dt$$

$$(*) = \frac{1}{243} \int \cos^4 t dt = \frac{1}{243} \int \left(\frac{1+\cos^2 t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{243} \int \frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4} dt =$$

$$= \frac{1}{972} \int \left(1+2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) dt = \frac{1}{972} \left(t + \sin 2t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{972} \left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \frac{6x}{x^2+9} + \frac{3x(9-x^2)}{2(9+x^2)^2}\right) + C =$$

$$\frac{1}{648} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{3} + \frac{x}{216(x^2+9)} + \frac{x}{36(x^2+9)^2} + C$$

**4.81.**  $-\frac{1}{3(x-3)^3} + c.$

**4.82.**  $2 \ln |x-5| + c.$

**4.83.**  $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 27) + c.$

**4.84.**  $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 6x + 27) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{3\sqrt{2}} + c.$

**4.85.**  $\ln \frac{x^3(x-1)^2}{x+3}.$

**4.86.** Páratlan kitevő esetén helyettesítéssel oldhatjuk meg a feladatot.

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \\ &= \int (1 - u^2)^2 du = \int (1 - 2u^2 + u^4) du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C \end{aligned}$$

$u = \sin x \qquad du = \cos x dx$

**4.87.** Páros kitevő esetén a linearizáló formula alkalmazását javasoljuk.

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x dx &= \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \left( 1 - 3 \cos 2x + 3 \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx \end{aligned}$$

Az első integrálban újból alkalmaztuk a linearizáló formulát, így került

$$\cos^2 2x$$

helyébe

$$\frac{1 + \cos 4x}{2}.$$

A második integrálban pedig már páratlan kitevőn szerepel trigonometrikus függvény, tehát az az előző példa mintájára megoldható.

Az eredmény:

$$\int \sin^6 x dx = \frac{1}{8} \left( \frac{5}{2} x - \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{3}{8} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + C$$

**4.88.**

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x \cdot \cos^3 x dx &= \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x dx = \int \sin^6 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x dx = \\ &= \int u^6 (1 - u^2) du = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C \end{aligned}$$

$u = \sin x \qquad du = \cos x dx$

**4.89.**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 2 + \cos^2 x \right) dx = \\ &= \operatorname{tg} x - \frac{3}{2} x + \frac{\sin 2x}{4} + C \end{aligned}$$

4.90.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos^4 x} dx = - \int \frac{1 - u^2}{u^4} du = \int \left( \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^4} \right) du =$$

$$u = \cos x \quad du = -\sin x dx$$

$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + C = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$$

4.91. Alkalmazzuk a  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  helyettesítést, akkor

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{2}{2t+1-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1} + C$$

4.92. Itt is válogathatunk a megoldási módszerek között. Alkalmazhatjuk a

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

helyettesítést, akkor

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2}{1-t^2} dt = 2 \cdot \operatorname{arth} + C = \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C$$

De ugyanúgy használhatjuk fel a páratlan kitevőjű jellegét is.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{du}{1 - u^2} = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C$$

Megfelelő átalakítások után az eredmény ugyanolyan alakra bontható:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C$$

4.93.

$$\int \frac{dx}{5 - 3 \cos x} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C$$

4.94. Ha  $\sin x$ -nek és  $\cos x$ -nek csak páros kitevőjű hatványai és  $\operatorname{tg} x$  fordulnak elő, akkor (bár a  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  helyettesítés akkor is alkalmazható) előnyösebb a  $t = \operatorname{tg} x$  helyettesítés alkalmazása.

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \int \frac{t^5}{1+t^2} dt = \int \left( t^3 - t + \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + C = (*)$$

$$t = \operatorname{tg} x \quad x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$(*) = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 x - \ln \cdot \cos x + C$$



4.95.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x; \quad \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x},$$

Tehát

$$t = \operatorname{tg} x$$

helyettesítés esetén

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x} &= \int \frac{(1+t^2)^2 \cdot (1+t^2)^2}{t^4} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^4} dt = \\ &= \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^4} dt = \int \left( \frac{1}{t^4} + \frac{3}{t^2} + 3 + t^2 \right) dt = \\ &= -\frac{1}{3t^3} - \frac{3}{t} + 3t + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3} \cdot \operatorname{cotg}^3 x - 3 \cdot \operatorname{cotg} x + 3 \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 x + C \end{aligned}$$

4.96.

$$\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \cdot \ln \operatorname{tg} x + C$$

4.97.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$$

4.98.

$$\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} + \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x + C$$

(A linearizáló formula segítségével  $\cos 2x$  függvényeként írhatjuk fel az integrálandó függvényt. Ezáltal a feladat nagymértékben egyszerűsödik.)

4.99.

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cdot \cos \left( 5x - \frac{\pi}{2} \right) dx &= \frac{1}{2} \int \left[ \sin \left( 8x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{2} - 2x \right) \right] dx = \\ &= \frac{1}{4} \cos \left( 2x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{26} \cos \left( 8x - \frac{\pi}{2} \right) + C \end{aligned}$$

4.100. Nem típus feladat, de

$$\sin x = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

és

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$$

összefüggések felhasználásával egyszerű megoldást nyerünk.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \sin x} dx &= \int \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \\ &= \int \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) dx = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} - 2 \cdot \cos \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

**4.101.** A hiperbolikus függvények integrálását sok esetben, mint pl. most is a trigonometrikuséhoz hasonlóan végezzük el. Már most megemlítjük azonban, hogy a hiperbolikus függvények racionális függvényeinek az integrálása mindig visszavezethető  $e^x$  racionális függvényének az integrálására. Hogy mikor melyik utat választjuk azt a célszerűség dönti el.

$$\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^3 x \, dx = \int \operatorname{sh}^2 x \cdot (1 + \operatorname{sh}^2 x) \cdot \operatorname{ch} x \, dx = \int u^2(1+u^2)du = \int (u^2+u^4)du = (*) =$$

$$u = \operatorname{sh} x; \quad du = \operatorname{ch} x \, dx$$

$$(*) = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{sh}^5 x + C$$

**4.102.**

$$\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\sqrt{\operatorname{ch} x}} \, dx = \int \frac{(\operatorname{ch}^2 x - 1)\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x}} \, dx = \int \frac{u^2 - 1}{\sqrt{u}} \, du = \frac{2}{5} \sqrt{\operatorname{ch}^5 x} - 2\sqrt{\operatorname{ch} x} + C$$

$$u = \operatorname{ch} x \quad du = \operatorname{sh} x \, dx$$

**4.103.**

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

tehát írható, hogy

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x} = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x} \, dx = \int \left( \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right) \, dx = \ln \operatorname{sh} x - \ln \operatorname{ch} x + C =$$

$$= \ln \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} + C = \ln \operatorname{th} x + C$$

**4.104.** Az előző példa alapján nagyon egyszerűen kapjuk az eredményt a következő átalakítás után:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{dx}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}} = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} + C$$

De akkor sem okoz gondot a megoldás, ha  $\operatorname{sh} x$  helyébe  $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$  kifejezést írjuk, vagy ha  $\operatorname{sh} x$ -el való szorzás és osztás után

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 - 1}$$

integrálására alkalmazzuk az  $u = \operatorname{ch} x$  helyettesítést.

**4.105.**

$$\operatorname{ch} \alpha \cdot \operatorname{ch} \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(\alpha + \beta) + \operatorname{ch}(\alpha - \beta)]$$

összefüggés alapján

$$\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 2x \cdot \operatorname{ch} 3x \, dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (\operatorname{ch} 6x + \operatorname{ch} 4x + \operatorname{ch} 2x + 1) \, dx = \frac{1}{24} \operatorname{sh} 6x + \frac{1}{16} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{8} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{4} x + C$$

4.106.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = \int \frac{u^2}{u+1} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u+1} du = \int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = u - \ln(u+1) + C = (*)$$

$$u = e^x \quad x = \ln u \quad dx = \frac{1}{u} du$$

$$(*) = e^x - \ln(e^x + 1) + C$$

4.107.

$$\int \frac{6}{e^x - 3} dx = \int \frac{6}{(u-3)u} du = \int \left(-\frac{2}{u} + \frac{2}{u-3}\right) du = 2 \ln \frac{e^x - 3}{e^x} + C$$

$$e^x = u \quad x = \ln u \quad dx = \frac{1}{u} du$$

4.108. A parciális integrálás alkalmazható, de a megoldás ilyen módon sokkal hosszabb, mintha  $\operatorname{sh} 3x$ -et  $e^x$ -el fejezzük ki, ezért ezt a megoldást ajánljuk hasonló esetekben is.

$$\int e^x \cdot \operatorname{sh} 3x dx = \int e^x \cdot \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} dx = \int \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2} dx = \frac{1}{8} e^{4x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + C$$

$$4.109. \quad \frac{1}{2} \left( \frac{e^{2x}}{2} - x \right) + c.$$

4.110.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}} dx = \int \frac{\frac{u^2-5}{3}}{u} \cdot \frac{2}{3} u du = \frac{2}{9} \int (u^2 - 5) du = \frac{2}{9} \left( \frac{u^3}{3} - 5u \right) + C = (*)$$

$$u = \sqrt{3x+5}; \quad 3x+5 = u^2; \quad x = \frac{u^2-5}{3}; \quad dx = \frac{2}{3} u du$$

$$(*) = \frac{2}{27} \sqrt{(3x+5)^3} - \frac{10}{9} \sqrt{3x+5} + C = \frac{2}{27} \sqrt{3x+5} \cdot (3x-10) + C$$

4.111.

$$\int (x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{2x-1} dx = \int \left( \frac{u^4 + 2u^2 + 1}{4} - 3 \cdot \frac{u^2 + 1}{2} + 2 \right) u \cdot u du = (*)$$

$$u = \sqrt{2x-1}; \quad u^2 = 2x-1; \quad x = \frac{u^2+1}{2}; \quad dx = u du$$

$$(*) = \frac{1}{4} \int (u^6 - 4u^4 + 3u^2) du = \frac{1}{4} \left( \frac{u^7}{7} - \frac{4u^5}{5} + u^3 \right) + C =$$

$$= \frac{1}{28} \sqrt{(2x-1)^7} - \frac{1}{5} \sqrt{(2x-1)^5} + \frac{1}{4} \sqrt{(2x-1)^3} + C$$

**4.112.** A feladatot kisebb lépésekben kétszeri helyettesítéssel is megoldhatjuk. Előbb  $e^x = t$ , majd pedig  $u = \sqrt{t+1}$  helyettesítést alkalmazva racionális törtfüggvény integrálására vezetjük vissza.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} &= \int \frac{dt}{t \cdot \sqrt{t+1}} = \int \frac{2u}{(u^2-1)u} du = 2 \int \frac{du}{u^2-1} = \\ &= -2 \operatorname{arth} u + C = -\ln \frac{1+u}{1-u} + C = \\ t = e^x; \quad x = \ln t; \quad dx &= \frac{1}{t} dt; \quad u = \sqrt{t+1}; \quad t = u^2 - 1; \quad dt = 2udu \\ &= \ln \frac{1-u}{1+u} + C = \ln \frac{1-\sqrt{e^x+1}}{1+\sqrt{e^x+1}} + C \end{aligned}$$

Természetesen rövidebb lesz a megoldás (és azért általában így is járunk el), ha a két helyettesítést összevonva egy megfelelő helyettesítést alkalmazunk.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2u}{u(u^2-1)} du = 2 \int \frac{du}{u^2-1}$$

(A folytatás azonos.)

$$\sqrt{e^x+1} = u \quad e^x = u^2 - 1 \quad x = \ln(u^2 - 1) \quad dx = \frac{2u}{u^2-1} du$$

**4.113.**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{u^4}{1+u^3} \cdot 6u^5 du = \\ x = u^6 \quad dx &= 6u^5 du \quad u = \sqrt[6]{x}. \end{aligned}$$

A gyökkitevők legkisebb közös többszöröse lesz a helyettesítendő kifejezés gyökkitevője.

$$\begin{aligned} 6 \int \frac{u^9}{u^3+1} du &= 6 \int \left( u^6 - u^3 + 1 - \frac{1}{u^3+1} \right) du = \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{4} \sqrt[6]{x^4} + 6\sqrt[6]{x} - 2 \ln(\sqrt[6]{x}+1) + \\ &+ \ln \left( \sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1 \right) - 2\sqrt{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + C = \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{4} \sqrt[6]{x^4} + 6\sqrt[6]{x} + \frac{\ln \sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1}{\ln \sqrt[6]{x^2} + 2\sqrt[6]{x} + 1} - \\ &- 2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

**4.114.**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} &= \int \frac{4u^3}{u^2+u} du = 4 \int \frac{u^2}{u+1} du = 4 \int \left( u - 1 + \frac{1}{u+1} \right) du = \\ &= 2u^2 - 4u + 4 \ln(u+1) + C = \\ x = u^4 \quad dx &= 4u^3 du \\ &= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C \end{aligned}$$

4.115.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} &= - \int \frac{4u^2}{(1+u^2)^2} \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} du = -4 \int \frac{u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} du = \\ &= \int \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \frac{0 \cdot u + 2}{u^2+1} \right) du = (*) \\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} &= u; \quad \frac{1-x}{1+x} = u^2; \quad x = \frac{1-u^2}{1+u^2}; \quad dx = \frac{-4u}{(1+u^2)^2} du \\ (*) &= \ln(u-1) - \ln(u+1) + 2 \operatorname{arctg} u + C = \ln \frac{u-1}{u+1} + 2 \operatorname{arctg} u + C = \\ &= \ln \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C = \ln \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C \end{aligned}$$

4.116.  $x^2 = t$  helyettesítéssel a gyökjel alatt már lineáris kifejezés lesz, tehát így sikerült a feladatot az előzőekben tárgyalt típusra visszavezetni. Az eljárás azért alkalmazható a jelen esetben, mert a számlálóban  $x^3 dx$  áll, ami így írható  $x^2 \cdot x dx$ . Itt  $x^2$  helyébe  $t$ ,  $x dx$  helyébe pedig  $\frac{1}{2} dt$  írható.

Gyakorlásképpen oldjuk meg a feladatot ilyen bontásban is. Tekintettel azonban arra, hogy az így nyert integrált egy újabb helyettesítéssel racionalizáljuk, joggal merül fel az az igény, hogy lehetőleg egyetlen helyettesítéssel oldjuk meg a feladatot. Ez lehetséges

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}} dx &= \int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1+2x^2}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{\frac{u-1}{2}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{8} \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{8} \int \left( \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du = \\ & \quad 1+2x^2 = u \quad du = 4x dx \quad x^2 = \frac{u-1}{2} \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{2}{3} \sqrt{u^3} - 2\sqrt{u} \right) + C = \frac{1}{12} \sqrt{1+2x^2} \cdot (1+2x^2-3) + C = \frac{1}{6} \sqrt{1+2x^2} \cdot (x^2-1) + C \end{aligned}$$

4.117.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = \frac{1}{3} \operatorname{arsh} (3x-1) + C$$

4.118.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{-(9x^2-12x+2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-[(3x-2)^2-4+2]}} = \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{2-(3x-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-2}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arc} \sin \frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \sin \frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

4.119.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(3x - 2)^2}}$$

A gyökjel alatti kifejezés az  $x = \frac{2}{3}$  hely kivételével (amikor is 0) mindenütt negatív, ezért belőle négyzetgyök nem vonható. Az integrálandó függvény tehát sehol nincs értelmezve (még az  $x = \frac{2}{3}$  helyen sem, mert ott a nevező 0).

4.120.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + 2x - x^2} dx &= \int \sqrt{1 - (x^2 - 2x)} dx = \int \sqrt{1 - [(x - 1)^2 - 1]} dx = \\ &= \int \sqrt{2 - (x - 1)^2} dx = \sqrt{2} \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x - 1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \\ &= \sqrt{2} \int \sqrt{1 - \sin^2 u} \sqrt{2} \cos u du = 2 \cdot \int \cos u \cdot \cos u du = \\ \frac{x - 1}{\sqrt{2}} &= \sin u ; \quad x = \sqrt{2} \sin u + 1 ; \quad dx = \sqrt{2} \cos u du \\ &= 2 \cdot \int \cos^2 u du = 2 \cdot \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du = u + \frac{1}{2} \sin 2u + C \end{aligned}$$

A visszahelyettesítéshez egyrészt

$$\frac{x - 1}{\sqrt{2}} = \sin u$$

kifejezésből felírjuk, hogy

$$u = \arcsin \frac{x - 1}{\sqrt{2}},$$

másrészt  $\sin 2u$ -t kifejezzük  $\sin u$ -val, mert  $\sin u$  helyébe  $\frac{x - 1}{\sqrt{2}}$  írható

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin 2u &= \sin u \cdot \cos u = \sin u \cdot \sqrt{1 - \sin^2 u} = \\ \frac{x - 1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x - 1}{\sqrt{2}}\right)^2} &= \frac{x - 1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2 - 2x + 1}{2}} \end{aligned}$$

tehát

$$\int \sqrt{1 + 2x - x^2} dx = \arcsin \frac{x - 1}{\sqrt{2}} + \frac{x - 1}{2} \sqrt{1 + 2x - x^2} + C$$

4.121.

$$\int \sqrt{3x^2 - 3x + 1} dx = \sqrt{3} \cdot \int \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{3}} dx = \sqrt{3} \cdot \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{\left(\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{(2\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 + 1} dx = (*) \\
&2\sqrt{3}x - \sqrt{3} = \operatorname{sh} t; \quad x = \frac{\operatorname{sh} t + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}; \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \operatorname{ch} t dt \\
(*) &= \frac{1}{2} \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \operatorname{ch} t dt = \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} dt = \\
&= \frac{1}{8\sqrt{3}} \left( \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} + t \right) + C = \frac{1}{8\sqrt{3}} \left( \operatorname{sh} t \cdot \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} + t \right) + C = \\
&= \frac{1}{8\sqrt{3}} \left[ \sqrt{3}(2x - 1) \sqrt{1 + 3(2x - 1)^2} + \operatorname{arsh} \sqrt{3} \cdot (2x - 1) \right] + C = \\
&= \frac{1}{8} (2x - 1) \sqrt{12x^2 - 12x + 4} + \frac{1}{8\sqrt{3}} \operatorname{arsh} \sqrt{3} \cdot (2x - 1) + C = \\
&= \frac{2x - 1}{4} \sqrt{3x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{8\sqrt{3}} \operatorname{arsh} \sqrt{3} \cdot (2x - 1) + C
\end{aligned}$$

4.122.

$$\int \sqrt{x^2 + 6x + 10} dx = \frac{x + 3}{2} \sqrt{x^2 + 6x + 10} + \frac{1}{2} \operatorname{arsh} (x + 3) + C$$

4.123.

$$\int \sqrt{3 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{3 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

4.124.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 40}} = \operatorname{arsh} \frac{x - 2}{6} + C$$

4.125.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 12x + 30}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arsh} \frac{x + 2}{\sqrt{6}} + C$$

4.126.

$$\int \sqrt{2x^2 + 8x + 5} dx = \frac{x + 2}{2} \sqrt{2x^2 + 8x + 5} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \operatorname{arch} \left[ \sqrt{\frac{2}{3}}(x + 2) \right] + C$$

4.127.

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{4 + x - x^2}} dx = \frac{31}{8} \arcsin \frac{2x - 1}{\sqrt{17}} - \frac{2x + 7}{4} \sqrt{4 + x - x^2} + C$$

## Improprius integrálok

4.201.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_2^{\omega} \frac{1}{x^2} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} \right]_2^{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{\omega} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{2}.$$

4.202.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_1^{\omega} \frac{1}{x} dx = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\ln \omega - \ln 1).$$

Mivel  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \ln \omega = \infty$ , ezért a fenti integrál divergens.

4.203.

$$\frac{\pi}{2}$$

4.204.

$$5\pi.$$

4.205.

$$-\frac{4}{e^3}.$$

4.206.

$$9e^{10}.$$

4.207. Divergens.

4.208.

$$\frac{1}{36}.$$

4.210.

$$\frac{1}{2e}.$$

4.211.

$$\sqrt{2}.$$

4.212.

$$1.$$

4.213.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-\ln(1-x)]_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\ln \varepsilon + \ln 1), \end{aligned}$$

tehát divergens.



**4.214.**

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-2\sqrt{1-x}]_0^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-2\sqrt{\varepsilon} + 2) = 2. \end{aligned}$$

**4.215.**

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x-1} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \frac{1}{2x-1} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2} \ln(2x-1) \right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \ln \varepsilon - \frac{1}{2} \ln 1 \right), \end{aligned}$$

tehát divergens.

**4.216.**

$$1.$$

**4.217.**

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

**4.218.**

$$\frac{\pi}{2}.$$

**4.219.**

$$\frac{2\sqrt{11}}{3}.$$

**4.220.**

$$-\frac{\pi}{4}.$$