II. rész

Valós függvények

Feladatok

3.1. Értelmezési tartomány

Határozza meg a következő függvények értelmezési tartományát!

$\boxed{\textbf{3.1.}}$

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

3.2.

$$y = \sqrt{3-2x}$$

3.3.

$$y = \frac{2x-3}{x+2}$$

3.4.

$$y = \frac{x+1}{x^2-3x}$$

$\boxed{\textbf{3.5.}}$

$$y = \ln(x^2-3x+2)$$

$\boxed{\textbf{3.6.}}$

$$y = \sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}$$

3.7.

$$y = \arcsin\frac{3-2x}{5}$$

3.8.

$$y = 2\arccos\sqrt{9-x^2}$$

3.9.

$$y = \ln\frac{x^2-2x-15}{x^2-10x+16}$$

3.10.

$$y = \ln\ln x$$

3.2. Határérték

Határozza meg a következő függvények határértékét az adott pontban!

3.11.

$$\lim_{x\to 2}(x^3-x^2-x+1)$$

3.12.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^k}, \quad k\epsilon\mathbb{N} \quad \text{rögzített.}$$

3.13.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2+x-2}$$

3.14.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4}$$

3.15.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2}{x^2-4x+4}$$

$\boxed{\textbf{3.16.}}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$$

3.17.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$$

3.18.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$$

3.19.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$$

3.20.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$$

3.21.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}\ n\epsilon\mathbb{Z}.$$

3.22.

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

3.23.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x^3-1}\right)$$

$\boxed{\textbf{3.24.}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

$\boxed{\textbf{3.25.}}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$$

3.26.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

3.27.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$$

3.28.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-6}+\sqrt{n}}{\sqrt[10]{x^7}+1963-x}$$

$\boxed{\textbf{3.29.}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

3.30.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$$

$\boxed{\textbf{3.31.}}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

3.32.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$$

3.33.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-x$$

3.34.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$$

3.35.

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

3.36.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$$

3.37.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$$

3.38.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$$

3.39.

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

3.40.

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

3.41.

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{-x}}$$

3.42.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$$

3.43.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}$$

3.44.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{nx}, \qquad n, m\epsilon\mathbb{N}$$

3.45.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}, \qquad a, b\epsilon\mathbb{R}, b\neq 0.$$

3.46.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\mathrm{tg}\ (x)}$$

3.47.

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \mathrm{ctg}\ (x)$$

3.48.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

3.49.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

3.50.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\mathrm{tg}\ x}\right)$$

3.51.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\ (x)-\sin(x)}{x^3}$$

3.52.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$$

3.53.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x^3}}{1-\cos x}$$

3.54.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\ 2x\mathrm{tg}\ \left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

3.55.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$$

3.56.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$$

3.57.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^2}{\mathrm{tg}\ ^3x-\sin^3 x}$$

3.58.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$$

3.59.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos(x)}$$

3.60.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos(x)}$$

3.61.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}\ (x)}-\sqrt{1-\mathrm{tg}\ (x)}}{\sin(x)}$$

3.62.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

3.63.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

3.64.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x$$

3.65.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$$

3.66.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

3.67.

$$\lim_{x\to 0}\Big(1+\mathrm{tg}\ (x)\Big)^{\mathrm{ctg}\ (x)}$$

3.3. Inverz függvény

Határozza meg a következő függvények inverz függvényét!

3.68.

$$y=1-2x$$

3.69.

$$y=1+x$$

3.70.

$$y=x^2+1$$

3.71.

$$y=\frac{1}{1-x}$$

3.72.

$$y=\sqrt[3]{x^2+1}$$

3.73.

$$y=\sqrt{x^2-16}$$

3.74.

$$y=\sqrt{3-x}$$

3.75.

$$xy-2x+y-3=0$$

3.76.

$$y=\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}$$

3.77.

$$y=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$$

3.4. Függvény ábrázolás

Rajzolja meg a következő függvények görbéit!

3.78.

$$y=\frac{x}{x-1}$$

3.79.

$$y=\frac{x^2+1}{x}$$

3.80.
$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

3.81.
$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

3.82.
$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$

3.83.
$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

3.84.
$$y = \frac{x}{4 - x^2}$$

3.85.
$$y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

3.86.
$$y = e^{-x^2}$$

3.87.
$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

3.88.
$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

3.89.
$$y = \arcsin(\sin(x))$$

3.90.
$$y = \arccos(\cos(x))$$

3.91.
$$y = \arctan(\mathrm{tg}\ (x))$$

3.92.
$$y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Mivel egyenlő?

3.93.
$$\sin\Big(\arcsin(x)\Big)$$

3.94.
$$\sin\Big(\arccos(x)\Big)$$

3.95.
$$\sin\Big(2\arccos(x)\Big)$$

3.96.
$$\mathrm{tg}\ \Big(\arccos(x)\Big)$$

3.97.
$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin(x)\right)$$

3.98.
$$\sin\Big(\mathrm{arctg}\ (2,4)\Big)$$

3.99.
$$\mathrm{sh}\ (2)$$

3.100.
$$\mathrm{ch}\ (3)$$

3.101.
$$\mathrm{ch}\ (2x), \quad \text{ha } \mathrm{sh}\ (x) = 1.$$

3.102.
$$\mathrm{arsh}(4)$$

3.103.
$$\mathrm{arch}(5)$$

3.104.
$$\mathrm{arth}(-0,6)$$

3.5. Egyváltozós függvény differenciálása

Határozzuk meg a következő függvények deriváltját!

3.105. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 7$

3.106. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3x - 2$

3.107. $f(x) = (x^3 - 3)\sin x$

3.108. $f(x) = \dfrac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$

3.109. $f(x) = \dfrac{x^3+3}{(x^2+x+1)\cos x}$

$\boxed{\textbf{3.110.}}$ $f(x) = \sin^2 x$

3.111. $f(x) = \sin x^2$

3.112. $f(x) = \mathrm{tg}\ x^3$

3.113. $f(x) = \cos^4 x$

3.114. $f(x) = \sin(x^2 - 5x + 8)$

3.115. $f(x) = (x^4 - 6x + 1)^6 \cdot \mathrm{tg}\ \dfrac{1}{x}$

3.116. $f(x) = \sin \dfrac{1+x}{1+x^2}$

3.117. $f(x) = \dfrac{\cos x^4}{2 + \sin^3 x}$

3.118. $f(x) = \mathrm{tg}\ {}^2 x^2$

3.119. $f(x) = sin^3(\dfrac{1+x^2}{\mathrm{tg}\ 2x})$

3.120. $f(x) = 2^x$

3.121. $f(x) = 10^{\sin x^3}$

3.122. $f(x) = \lg x$

3.123. $f(x) = e^{-x^2}$

3.124. $f(x) = \pi^{\sin x}$

3.125. $f(x) = \lg \sin 4x$

3.126. $f(x) = \sqrt{x}$

$\boxed{\textbf{3.127.}}$ $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

3.128. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$

3.129. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$\boxed{\textbf{3.130.}}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

3.131. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+\mathrm{tg}\ 3x}{x^2-1}}$

3.132. $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$

3.133. $f(x) = \sqrt{\lg(1+\sin^2 2x)}$

3.134. $f(x) = \mathrm{tg}\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

3.135. $f(x) = \mathrm{sh}\ [x^3 - \ln(x+7)]$

3.136. $f(x) = \mathrm{arth}\ (1-x^2)$

3.137. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

3.138. $f(x) = \arcsin \dfrac{2}{x}$

3.139. $f(x) = 2^{5 \arcsin x}$

3.140. $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2}$

3.141. $f(x) = \mathrm{arctg}\ {}^2 \dfrac{1}{x}$

$\boxed{\textbf{3.142.}}$ $f(x) = \mathrm{arch}\ \sqrt{x+1}$

$\boxed{\textbf{3.143.}}$ $f(x) = e^{\operatorname{arth} x^2}$

3.144. $f(x) = \sqrt[11]{2 - \sqrt[3]{x}}$

3.145. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{\cos x}$

Implicit módon megadott függvények deriválása

3.146. $x^2 + y^2 = 12$

3.147. $\dfrac{\sin x}{\cos y} + \dfrac{\sin y}{\cos x} = 1$

3.148. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

3.149. $(x-1)\cos y + \cos 2y = 0$

$\boxed{\textbf{3.150.}}$ $y^x = x^y$

3.151. $f(x) = x + \operatorname{arctg} f(x)$

$\boxed{\textbf{3.152.}}$ $f(x) = (1+x)^{(1-x)}$

3.6. Taylor polinom

Írja fel az alábbi függvények x_0 helyhez tartozó Taylor polinomját!

$\boxed{\textbf{3.153.}}$

$$f(x) = \ln x, \quad x_0 = e, \quad T_4(x) = ?$$

3.154.

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 2, \quad T_4(x) = ?$$

3.155.

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad T_3(x) = ?$$

3.156.

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad T_3(x) = ?$$

3.157.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x, \quad x_0 = 1, \quad T_4(x) = ?$$

$\boxed{\textbf{3.158.}}$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5, \quad x_0 = 2, \quad T_4(x) = ?$$

3.159.

$$f(x) = 2 + x^2 - 3x^5 + 7x^6, \quad x_0 = 1, \quad T_4(x) = ?$$

3.160.

$$f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 10, \quad x_0 = 1, \quad T_4(x) = ?$$

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ helyhez tartozó Taylor polinomját!

3.161.

$$f(x) = e^{2x}, \quad T_4(x) = ?$$

3.162.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x, \quad T_6(x) = ?$$

3.163.

$$f(x) = \cos 2x, \quad T_5(x) = ?$$

$\boxed{\textbf{3.164.}}$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad T_3(x) = ?$$

3.165.

$$f(x) = \ln(1+x), \quad T_n(x) = ?$$

3.166.

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad T_n(x) = ?$$

$\boxed{\textbf{3.167.}}$ Mekkora hibát követünk el, ha az $y = \sin x$ függvény értékét a $[0, 1]$ intervallumon a

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Taylor polinommal közelítjük?

$\boxed{\textbf{3.168.}}$ Határozzuk meg e értékét két tizedesjegy pontossággal Taylor polinom segítségével!

3.7. Differenciálszámítás alkalmazásai

Határérték meghatározása L'Hospital szabállyal

$\boxed{\textbf{3.169.}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

3.170. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}$

3.171. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$

3.172. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$

$\boxed{\textbf{3.173.}}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

3.174. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

3.175. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

3.176. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$

3.177. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - xe^{\cos x}}{1-\sin x - \cos x}$

$\boxed{\textbf{3.178.}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$

3.179. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

$\boxed{\textbf{3.180.}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \sin\dfrac{a}{x}$

3.181. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

3.182. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

3.183. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\text{ctg } x-\dfrac{1}{x}\right)$

$\boxed{\textbf{3.184.}}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\text{tg } x}$

3.185. $\lim\limits_{x\to 0} (\text{arc } \sin x)^{\text{tg } x}$

3.186. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\text{tg } x)^{2x-\pi}$

3.187. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\text{tg } x}$

Síkgörbék érintője és normálisa

$\boxed{\textbf{3.188.}}$ Határozzuk meg az $y = 3x - x^2$ parabola $x = 1$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének az egyenletét!

$\boxed{\textbf{3.189.}}$ Hol metszi az $y = \ln x$ görbe $x = e$ abszcisszájú pontjához húzott érintője az x tengelyt?

$\boxed{\textbf{3.190.}}$ Meghatározandó az $y = \text{tg } x$ görbének az a pontja, amely ponthoz tartozó érintő párhuzamos az $y_1 = 2x - 5$ egyenessel!

3.191. Meghatározandók az $y = x^3 - 6x + 1526$ görbének azok a pontjai, melyekben az érintő párhuzamos az $y_1 = 6(x - \pi)$ egyenessel!

3.192. Bizonyítsuk be, hogy az $xy = a^2$ görbe bármely pontjához húzott érintője és a koordináta tengelyek által alkotott háromszög területe független az érintési ponttól!

$\boxed{\textbf{3.193.}}$ Írjuk fel az $y = \text{tg } x$ görbe $x = \frac{\pi}{4}$ abszcisszájú pontjához tartozó normálisának az egyenletét.

$\boxed{\textbf{3.194.}}$ Meghatározandók az $y^3 - 3x^2 - 4xy + 3 = 0$ implicit alakban adott függvény görbéjének az $x = 1$ abszcisszájú pontjaihoz tartozó érintőinek és normálisainak egyenletei.

3.195. Keressük meg az $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ görbe azon pontjait, ahol

a.) az érintő párhuzamos az x tengellyel

b.) az érintő az x tengely pozitív irányával $45°$-os szöget zár be.

Egyváltozós függvények szélsőértéke

$\boxed{\textbf{3.196.}}$ Határozzuk meg az $y = x^3 - 12x$ függvény szélsőértékeit!

$\boxed{\textbf{3.197.}}$ Határozzuk meg az $y = x^4 e^{-x^2}$ függvény szélsőértékeit!

Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékeit!

3.198. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

3.199. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

3.200. $f(x) = x^2 \ln x$

$\boxed{\textbf{3.201.}}$ Határozzuk meg az R sugarú körbe írt legnagyobb területű derékszögű négyszöget.

3.202. Határozzuk meg az R sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú hengert.

3.203. Határozzuk meg az R sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúpot.

3.204. Határozzuk meg az egy literes, felül nyitott legkisebb felszínű hengert.

3.205. Egyenlő szélességű három deszkából csatornát készítünk. Az oldalfalak milyen hajlásszöge mellett lesz a csatorna keresztmetszete maximális?

3.206. Határozzuk meg a „h” alkotójú legnagyobb térfogatú kúpot.

3.207. Egy a szélességű csatornából derékszögben kinyúlik egy b szélességű csatorna. A csatornák falai egyenes vonalúak. Határozzuk meg azon gerenda legnagyobb hosszát, amely az egyik csatornából átcsúsztatható a másikba.

3.208. Keressük meg az $y^2 = 8x$ parabolának azt a pontját, amely a $(6, 0)$ ponttól a legkisebb távolságra van.

3.209. Feltételezve, hogy a gőzhajó energiafogyasztása a sebesség harmadik hatványával egyenesen arányos, keressük meg a leggazdaságosabb óránkénti sebességet abban az esetben, ha a hajó c km/óra sebességű vízsodrással szemben halad.

3.8. Függvényvizsgálat

$\boxed{\textbf{3.210.}}$ Vizsgáljuk és ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvényt!

Vizsgáljuk az alábbi függvényeket.

3.211. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 12$

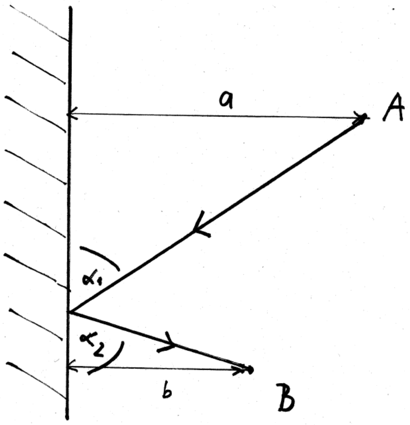
3.212. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

3.213. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

3.214. $f(x) = e^{-x^2}$

3.215. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

3.216. $f(x) = e^x \cos x$

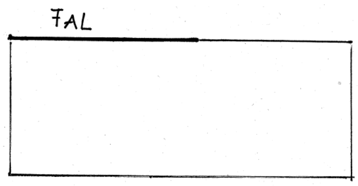


3.1. ábra. 3.269. feladat

3.9. Szöveges szélsőérték feladatok

3.269. Az A és B pontok a ill. b távolságra vannak a faltól. Melyik a legrövidebb út A-ból B-be a falat érintve?

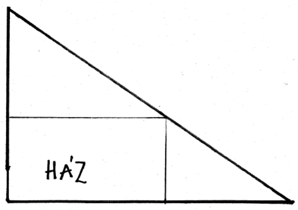
3.270. 200 m hosszú drótkerítéssel szeretnénk maximális területet közrezárni, miközben csatlakozunk egy már meglevő 100 m hósszú kőfalhoz. Mekkorák lesznek a kert oldalai?



3.2. ábra. 3.170. feladat

3.271. Keressük meg a $4x^2+9y^2 = 36$ elipszisnek azt a pontját, ami a $P(1,0)$ ponthoz legközelebb illetve legtávolabb van. Értelmezzük a kapott eredményt.

3.272. Egy derékszög alakú telek oldalai 100 m és 200 m. A sarokra épített téglalap alapú ház alapterülete mikor lesz maximális?



3.3. ábra. 3.172. feladat

3.273. Egy r sugarú félkörbe írható téglalapok küzuül melyik területe maximális? Melyik területe minimális?

$\boxed{\textbf{3.274.}}$ Egy fapados repülőgépen 300 ülőhely van. Csak akkor indítják a járatot, ha legalább 200 ülőhely foglalt. Ha 200 utas van, akkor egy jegy ára 30e Ft, és minden egyes plusz utas esetén a jegyárak egységesen csökkennek 100 Ft-tal. Hány utas eset lesz a légitársaság bevétele maximális illetve minimális?

3.275. Adott T területű téglalapok küzül melyik kerülete a minimális?

3.276. Egy x hosszú drótból levágunk egy darabot, négyzetet csinálunk belőle. A maradékot kör alakúra hajlítjuk. Mikor lesz a két alakzat össz-területe maximális?

Megoldások

3.1. Értelmezési tartomány

3.1. Az $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ azokra az x értékekre van értelmezve, melyek esetén a négyzetgyökjel alatti kifejezések nem negatívak, azaz, ha $1+x \geq 0$ és $1-x \geq 0$. Az értelmezési tartomány tehát: $-1 \leq x \leq 1$.

3.2. $x \leq \dfrac{3}{2}$

3.3. $x \epsilon \mathbb{R} \setminus \{2\}$

3.4. $x \epsilon \mathbb{R} \setminus \{0,\ 3\}$

3.5. Csak a pozitív számok logaritmusa valós érték. Ez a függvény tehát értelmezve van, ha $x^2 - 3x + 2 > 0$ Az egyenlőtlenséget megoldva azt nyerjük, hogy az értelmezési tartomány: $x \epsilon \mathbb{R} \setminus [1, 2]$

3.6. $\ln \dfrac{5x - x^2}{4} \geq 0$, ha $\dfrac{5x - x^2}{4} \geq 1$. Ezért: $1 \leq x \leq 4$.

3.7. $-1 \leq x \leq 4$.

3.8. $-3 \leq x \leq -\sqrt{8}, \quad \sqrt{8} \leq x \leq 3$.

3.9. $-\infty < x < -3, \quad 2 < x < 5, \quad 8 < x < \infty$

3.10. $1 < x < \infty$

3.2. Határérték

3.11. 3

3.12. 0

3.13. 0

3.14. 3

3.15. ∞

3.16. Ha a racionális függvény számlálója és nevezője az $x = a$ helyen zérus, akkor a tört $(x-a)$-val egyszerűsíthető.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x+1} = \frac{2+5}{2+1} = \frac{7}{3}$$

3.17. $\dfrac{3}{2}$

3.18. $\dfrac{2}{3}$

3.19. 6

3.20. 0

3.21. n

3.22. -1

3.23. ∞

3.24. Helyettesítsük $\sqrt[3]{1+x}$-et u-val. Ekkor $\sqrt[3]{1+x} = u$ és $x = u^3 - 1$.

Ha $x \to 0$, akkor $u \to 1$, tehát

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^3-1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \lim_{u\to 1} \frac{1}{u^2+u+1} = \frac{1}{3}$$

3.25. $x = u^{15}$ helyettesítés alkalmazásával

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}} = \lim_{u\to -1} \frac{1+u^5}{1+u^3} = \lim_{u\to -1} \frac{u^4-u^3+u^2-u+1}{u^2-u+1} = \frac{5}{3}$$

3.26. $\dfrac{1}{n}$

3.27. 1

3.28. 0

3.29. A számlálót és a nevezőt egyaránt szorozva $\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)$-el, a kifejezés értéke nem változik. Viszont a számlálóból eltűnik a négyzetgyök jel, és ezt követően a kifejezés egyszerűsithető x-el. Igy az ismert $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ összefüggést használtuk ki.

Négyzetgyökös kifejezések esetén hasonlóan szoktunk eljárni máskor is.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}$$

3.30. 2

3.31.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x^2+\sqrt{x}} = 3.$$

Ebben a példában ugyanaz a kifejezés volt a négyzetgyökjel alatt mind a két helyen, tehát az előzőekben említett példa módjára úgy is eljárhattunk volna, hogy $x = u^2$ helyettesítésével oldjuk meg a feladatot. Az itt bemutatott módszer azonban általánosabb esetben is alkalmazható.

3.32. 1

3.33. 0

3.34. 0

3.35. $\dfrac{1}{2}$

3.36. 4

3.37. ∞

3.38. ∞

3.39. $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

3.40. $\frac{1}{4}$

3.41. $\frac{3}{2}$

3.42. $\frac{5}{3}$

3.43. 5

3.44. $\frac{m}{n}$

3.45. $\frac{a}{b}$

3.46. 2

3.47. 1

3.48. $\frac{1}{2}$

3.49. $\frac{1}{2}$

3.50. 0

3.51. $\frac{1}{2}$

3.52. -1

3.53. 0

3.62. e^2

3.63. $\frac{1}{e}$

3.64. ∞

3.65. ∞

3.66. 1

3.67. e

3.3. Inverz függvény

3.68. $y = \frac{1-x}{2}$

3.69. $y = x - 1$

3.70. $y = \sqrt{x-1}$

3.71. $y = \frac{x-1}{x}$

3.72. $y = \sqrt{x^3 - 1}$

3.73. $y = \sqrt{x^2 + 16}$

3.74. $y = 3 - x^4$

3.75. $y = \frac{3-x}{x-2}$

3.76. $y = x + \frac{1}{x}$

3.77. $y = -\frac{x}{(x+1)^2}$

3.4. Függvény ábrázolás

Racionális törtfüggvényeknél az ábrázolás előtt határozzuk meg, hogy hol lesznek a görbének a koordináta tengelyekkel párhuzamos aszimptotái.

Törtfüggvénynek pólusa van, ahol a nevezője zérus. Itt van függőleges aszimptota. A vízszintes aszimptota helyét a függvény végtelenben vett határértéke határozza meg

3.93. x

3.94. $\sqrt{1-x^2}$

3.95. $\sin(\arccos x) = 2\sin(\arccos x)\cdot\cos(\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

3.96. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

3.97. $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}$

3.98. $\sin(x) = \dfrac{\text{tg } x}{\sqrt{1+\text{tg }^2 x}}, \qquad \sin(\text{arctg } 2.4) = \dfrac{12}{13}$

3.99. $\text{sh } (2) = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} = 3.627$

3.100. $\text{ch } (3) = 10.068$

3.101. $\text{ch } (2x) = \text{ch }^2 x + \text{sh }^2 x = 1 + 2\text{sh }^2 x = 3$, ha $\text{sh } x = 1$.

3.102. $\text{arsh } x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, ezért $\text{arsh } 4 = \ln(4+\sqrt{17}) = 2.094$

3.103. $\text{arch } x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 11})$, ezért

$$\begin{aligned} \text{arch } 5 = \ln(5 \pm \sqrt{24}) &= \ln 9.8999 = 2.292 \\ &= \ln 0.101 = -2.292 \end{aligned}$$

3.104. $\text{arth } x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$, ezért $\text{arth } (-0.6) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{0.4}{1.6} = -0.693.$

3.5. Egyváltozós függvény differenciálása

3.105. $f'(x) = 12x^2 - 2x$

3.106. $f'(x) = 4x^3 + 4x + 3$

3.107. $f'(x) = 3x^2 \cdot \sin x + (x^3 - 3) \cdot \cos x$

3.108. $f'(x) = \dfrac{-3[-2x(1-2x^3) + (1-x^2)(-6x)]}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2} = \dfrac{6x(4-3x^2-2x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$

3.109. $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2+x+1)\cos x - (x^3+3)[(2x+1)\cos x - (x^2+x+1)\sin x]}{(x^2+x+1)^2\cos^2 x}$

3.110. $f(x) = (\sin x)(\sin x)$ tehát $f'(x) = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

3.111. $f'(x) = \cos x^2 \cdot (2x)$

3.112. $f'(x) = \dfrac{3x^2}{\cos^2 x^3}$

3.113. $f'(x) = -4\cos^3 x \cdot \sin x$

3.114. $f'(x) = (2x-5)\cos(x^2-5x+8)$

3.115. $f'(x) = 6(x^4-6x+1)^5 \cdot (4x^3-6)\mathrm{tg}\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{(x^4-6x+1)^6}{x^2\cos^2\frac{1}{x}}$

3.116. $f'(x) = \cos\dfrac{1+x}{1+x^2} \cdot \dfrac{1+x^2-2x(1+x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}\cos\dfrac{1+x}{1+x^2}$

3.117. $f'(x) = \dfrac{-4x^3\sin x^4 \cdot (2+\sin^3 x) - 3\cos x^4 \sin^2 x \cdot \cos x}{(2+\sin^3 x)^2}$

3.118. $f'(x) = \dfrac{2\mathrm{tg}\ x^2}{\cos^2 x^2} \cdot 2x = \dfrac{4x\mathrm{tg}\ x^2}{\cos^2 x^2}$

3.119. $f'(x) = 3\sin^2(\dfrac{1+x^2}{\mathrm{tg}\ 2x}) \cdot \cos(\dfrac{1+x^2}{\mathrm{tg}\ 2x}) \cdot \dfrac{2(x\mathrm{tg}\ 2x - \frac{1+x^2}{\cos^2 2x})}{\mathrm{tg}\ ^2 2x}$

3.120. $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2$

3.121. $f'(x) = 10^{\sin x^3} \cdot \ln 10 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3(\ln 10)x^2 \cdot 10^{\sin x^3} \cdot \cos x^3$

3.122. $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln 10}$

3.123. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

3.124. $f'(x) = \pi^{\sin x}\ln\pi \cdot \cos x$

3.125. $f'(x) = \dfrac{4\cos 4x}{\sin 4x \cdot \ln 10} = \dfrac{4}{\ln 10} \cdot \mathrm{ctg}\ 4x$

3.126. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3.127. $f(x) = x^{\frac{7}{8}}$ tehát $f'(x) = \dfrac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}$

3.128. $f'(x) = \dfrac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$

3.129. $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

3.130. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2-1} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = -\dfrac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

3.131. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{1+\operatorname{tg} 3x}} \cdot \dfrac{\frac{3}{\cos^2 3x}\cdot(x^2-1) - 2x(1+\operatorname{tg} 3x)}{(x^2-1)^2}$

3.132. $f'(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x-1}}}{2\sqrt{x-1}}$

3.133. $f'(x) = \dfrac{4\sin 2x\cos 2x}{2\sqrt{\lg(1+\sin^2 2x)\ln(10)}\cdot(1+\sin^2 2x)} = \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{\lg(1+\sin^2 2x)\ln(10)}\cdot(1+\sin^2 2x)}$

3.134. $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} \cdot \dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}\cdot\cos^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

3.135. $f'(x) = \operatorname{ch}\,[x^3 - \ln(x+7)]\cdot(3x^2 - \dfrac{1}{x+7})$

3.136. $f'(x) = \dfrac{2}{x^3-2x}$

3.137. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}}$

3.138. $f'(x) = -\dfrac{2}{x\sqrt{x^2-4}}$

3.139. $f'(x) = \dfrac{5\cdot 2^{5\arcsin x}\cdot\ln 2}{\sqrt{1-x^2}}$

3.140. $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3.141. $f'(x) = -\dfrac{2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$

3.142. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}^2-1}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$

3.143. Mivel $\operatorname{arth}\,(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, ezért

$$e^{\operatorname{arth}\,x^2} = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}} = e^{\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)^3}}$$

3.144. $f'(x) = \frac{1}{11} \frac{1}{(\sqrt[11]{2-\sqrt[3]{x}})^{10}} \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}$

3.145. $f'(x) = \frac{(2x-1)\cos x + \sin x(x^2-x-1)}{\cos^2 x}$

Implicit módon megadott függvények deriválása

3.146. $y' = -\frac{x}{y}$

3.147.

$$\frac{\cos x\ \cos y + \sin x\ \sin y y'}{\cos^2 y} + \frac{\cos x\ \cos y y' + \sin x\ \sin y}{\cos^2 x} = 0$$

3.148. $f'(x) = \frac{a \cdot f(x) - x^2}{f(x)^2 - a^x}$

3.149. $f'(x) = \frac{\cos f(x)}{2\sin 2f(x) + (x-1)\sin f(x)}$

3.150. Vegyük mindkét oldal logaritmusát: $x \ln f(x) = f(x) \ln x$.

Deriváljuk mindkét oldalt: $\ln f(x) + \frac{x}{f(x)} f'(x) = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x}$.

Innen azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{f(x)^2 - xf(x)\ln f(x)}{x^2 - xf(x)\ln x}$$

3.151. $f'(x) = 1 + \frac{1}{f(x)^2}$

3.152. Mindkét oldalnak a logaritmusát vesszük, aztán mint implicit függvényt deriváljuk: $\ln f(x) = (1-x)\ln(1+x)$

$\frac{1}{f(x)} f'(x) = -\ln(1+x) + \frac{1-x}{1+x}$

$f'(x) = (1+x)^{1-x} \cdot (\frac{1-x}{1+x} - \ln(1+x))$

3.6. Taylor polinomok

3.153. A Taylor polinom képlete szerint:

$$T_4(x) = f(e) + \frac{f'(e)}{1!}(x-e) + \frac{f''(e)}{2!}(x-e)^2 + \frac{f'''(e)}{3!}(x-e)^3 + \frac{f^{(4)}(e)}{4!}(x-e)^4$$

A fenti képletbeli számítások: $f(e) = \ln e = 1$,

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $\quad f'(e) = \frac{1}{e}$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $\quad f''(e) = -\frac{1}{e^2}$,

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $\quad f'''(e) = \frac{2}{e^3}$,

$f^{(IV)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4}$, $\quad f^{(IV)}(e) = -\frac{6}{e^4}$.

Így a keresett polinom:

$$T_4(x) = 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x-e)^3 - \frac{1}{4e^4}(x-e)^4.$$

3.154.

$$T_4(x) = e^2[1 + \frac{1}{1!}(x-2) + \frac{1}{2!}(x-2)^2 + \frac{1}{3!}(x-2)^3 + \frac{1}{4!}(x-2)^4]$$

3.155.

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x-\frac{\pi}{4}) + \frac{4}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{16}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3$$

3.156.

$$T_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 + \frac{1}{1!}(x-\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3]$$

3.157.

$$T_4(x) = \frac{1}{2}[\sin^3 + \frac{3\cos 3}{1!}(x-1) - \frac{3^2\sin 3}{2!}(x-1)^2 - \frac{3^3\cos 3}{3!}(x-1)^3 + \frac{3^4\sin 3}{4!}(x-1)^4]$$

3.158. Mivel az n-ed fokú polinom megegyezik bármely helyen felírt n-ed fokú Taylor polinomjával, feladatunk az $f(x)$ függvény $x_0 = 2$ helyhez tartozó harmadfokú Taylor polinomjának felírása.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5$, $\quad f(2) = 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$, $\quad f'(2) = -1$

$f''(x) = 6x - 12$, $\quad f''(2) = 0$

$f'''(x) = 6$, $\quad f'''(2) = 6$.

Tehát a keresett polinom:

$$T_3(x) = 1 - \frac{1}{1!}(x-2) + \frac{6}{3!}(x-2)^3 =$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = (x-2)^3 - (x-2) + 1$$

3.159.

$$\begin{aligned} T(x) &= 7 + 29(x-1) + 76(x-1)^2 + 110(x-1)^3 + 90(x-1)^4 + \\ &+ 39(x-1)^5 + 7(x-1)^6 \end{aligned}$$

3.160. $T(x) = 6 + 5(x-1) + (x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 4(x-1)^4 + (x-1)^5$

3.161. $T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$

3.162. $T_6(x) = T_5(x) = \frac{1}{2}[x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5]$

3.163. $T_5(x) = T_4(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$

3.164. $f(x) = \text{arctg}\, x, \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)4} = -\frac{2+10x^2}{(1+x^2)^3}, \qquad f'''(0) = -2.$

Tehát a keresett polinom:

$$T_3(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3}$$

3.165.

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{(n+1)}\frac{x^4}{n}$$

3.166.

$$\begin{aligned} t_n(x) &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \\ &+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k \end{aligned}$$

3.167. A felírt polinom hatodfokúnak is tekinthető, ezért az elkövetett hiba

$$|R_6(x)| = \left|\frac{f^7(\xi)}{7!}x^7\right| = \frac{|-cos(\xi)|x|^7|}{5040} < \frac{1}{5040} < \frac{1}{5000} < 5 \cdot 10^{-3},$$

mert $|-cos(x)| \leq 1$ bármilyen x esetén, és a $0 \leq i \leq 1$ feltevés miatt $|x| < 1$. Ha tehát a 0-tól 1 radiánig ($\approx 57,3°$)terjedő szögek sinusát az előbbi ötödfokú polinommal számítjuk ki, akkor a hiba 2 tízezrednél kisebb.

3.168. Az e számot az $y = e^x$ függvény x=1 helyen vett értéke adja. A feladat most annak megállapítása, hányadfokú Taylor polinom szükséges a kívánt pontosságú megközelítéshez. Az e^x Taylor-sora:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

alakú. A hibára az

$$|R_n(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{(n+1)}| = \frac{e^{(\xi)}|x|^{(n+1)}}{(n+1)!} < 5 \cdot 10^{-3}$$

előírást tettük. Írjuk még be az x helyébe az x=1 érétket, s akkor a következő becslést kapjuk:

$$\frac{e^(\xi)}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 5 \cdot 10^{-3}$$

A megjelölt egyenlőtlenséget kísérletezéssel tudjuk csak megoldani. Mindenesetre vegyük mindkét oldal reciprokát! Ekkor az

$$(n+1)! > 600$$

egyenlőtlenségre jutunk, amiből $n \geq 5$ következik. Mi ötödfokú Taylor polinomot veszünk,

$$T_5(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

ennek értéke az $x = 1$ helyen

$$\begin{aligned} T_5(1) &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= 2 + 0,5 + \frac{0,5}{3} + \frac{0,5}{3 \cdot 4} + \frac{0,5}{3 \cdot 4 \cdot 5} = 2,5 + 0,1667 + \frac{0,1667}{4} + \frac{0,1667}{4 \cdot 5} \\ &= 2,667 + 0,0417 + \frac{0,0417}{5} = 2,7084 + 0,0083 = 2,7167 \end{aligned}$$

Végeredményben az e értéke két tizedes pontossággal:

$$e \approx 2,71$$

3.7. Differenciálszámítás alkalmazásai

3.169 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\text{tg } 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ \cos 3x}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\ \cos 3x\ \cos^2 5x=\ \frac{3}{5}$

3.170. $\frac{1}{2}$

3.171. $-\frac{1}{2}$

3.172. 1

3.173. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ \sinh x-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ \cosh x-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\ \sinh x}{\sin x}=$
$\lim_{x\to 0}\frac{2\ \cosh x}{\cos x}$

3.174. 2

3.175. 1

3.176. 0

3.177. $e-1$

3.178. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\ \cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x\ \ -x\sin x}=1$

3.179. 0

3.180. $\lim_{x\to\infty}x\ \sin\frac{a}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}$
$\frac{1}{x}=0, x=\frac{1}{n}$, ha $x\to\infty$ akkor $u\to 0$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin au}{u}=\lim_{x\to 0}\frac{a\ \cos au}{1}=1$

3.181. 1

3.182. $-\frac{1}{3}$

3.183. 0

3.184. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\text{tg } x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\text{tg } x\ln\sin x}=1$
mert $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\text{tg } x*\ln\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\text{ctg } x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}-\sin x\cos x=0$, és $e^0=1$

3.185. 1

3.186. 1

3.187. 1

3.188.
Az érintő egyenlete $y-y(a)=y'(a)(x-a)$
Példánkban $a=1,\ y(1)=2,\ y'(1)=1$
Az érintő egyenlete $y=(x-1)+2$, azaz $y=x+1$

3.189.
Az érintő egyenlete $y=\frac{1}{e}x$
Az x tengelyt ott metszi, ahol $y=0$.
Ebből $x=0$.Az érintő az origón megy keresztül.

3.190.

Az érintő iránytangense y' megegyezikaz egyenes meredekségével.

$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2$. Innen $\cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Az x tengelyt ott metszi, ahol $y = 0$.

Ebből $x = 0$. Az érintő az origón megy keresztül.

3.191. $P_1(-2, 1530)$; $P_2(2, 1522)$

3.192. $T_{\triangle} = 2a$

3.193.

A függvénygörbe P pontjához tartozó normálisán azt az egyenest értjük, amely a P pontban az érintőre merőlegesen megy át.

A normális meredeksége $m = -\dfrac{1}{y'}$, $y = -\dfrac{1}{2}x + 1 + \dfrac{\pi}{8}$

3.194.

Keressük meg először a jelzett pontokat. Az $x = 1$ értéket a függvénybe beírva:

$y^3 - 3 - 4y + 3 = 0$. Innen $y(y^2 - 4) = 0$

Három értéket találunk: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = -2$

$P_1(1, 0)$; $P_2(1, 2)$; $P_3(1, -2)$

A derivált $y' = -\dfrac{-6x - 4y}{3y^2 - 4x} = \dfrac{6x + 4y}{3y^2 - 4x}$

$y'(P_1) = -\dfrac{3}{2}$; $y'(P_2) = \dfrac{7}{4}$; $y'(P_3) = -\dfrac{1}{4}$;

Éintő egyenesek:

$y = -\dfrac{3}{2}(x - 1)$; $y - 2 = \dfrac{7}{4}(x - 1)$; $y + 2 = -\dfrac{1}{4}(x - 1)$;

Normális egyenesek:

$y = \dfrac{2}{3}(x - 1)$; $y - 2 = -\dfrac{4}{7}(x - 1)$; $y + 2 = 4(x - 1)$;

3.195.

$a)P_1(0, 1)$; $P_2(2, -\dfrac{1}{3})$

$b)P_3(1 + \sqrt{2}, \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $P_4(1 - \sqrt{2}, \dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3})$

Egyváltozós függvények szélsőértéke

3.196. A függvénynek szélsőértéke ott lehet, ahol az első derivált zérus. Ha ezen a helyen az első el nem tűnő derivált páros rendű, akkor van szélsőérték. Ha ez a derivált az adott pontban pozitív, akkor minimum, ha negatív, akkor maximum van.

$y = x^3 - 12x$, $y' = 3x^2 - 12$, $y'' = 6x$

$y' = 0$ ha $x^2 = 4$, azaz $x = \pm 2$

$y''(2) = 12 > 0$, minimum van $y(2) = -16$

$y''(-2) = -12 < 0$, maximum van $y(-2) = 16$.

3.197. $y' = (4x^3 - 2x^5)e^{-x^2} = x^3(4 - 2x^2)e^{-x^2}$

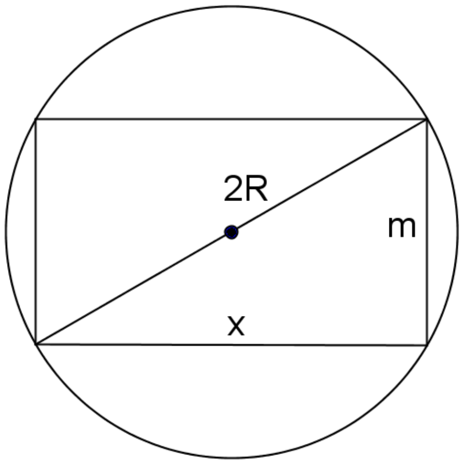
Mivel e^{-x^2} mindenütt pozitív, $y' = 0$ akkor lehet, ha $x_1 = 0$ ill. $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$

$y'' = (12x^2 - 18x^4 + 4x^6)e^{-x^2}$
$y''(0) = 0$, tehát ezt a helyet tovább kell vizsgálni.
$y''(\sqrt{2}) = y''(-\sqrt{2}) = -\dfrac{16}{e^2} < 0$, tehát ezeken a helyeken a függvénynek maximuma van.
Vizsgáljuk az $x = 0$ helyet.
$y''' = (24x - 96x^3 + 60x^5 - 8x^7)e^{-x^2}$; $y'''(0) = 0$
$y^{(\mathrm{IV})} = (24 - 336x^2 + 492x^4 - 176x^6 + 16x^8)e^{-x^2}$
$y^{(\mathrm{IV})}(0) = 24 > 0$, tehát a függvénynek az $x = 0$ helyen van szélsőértéke: minimuma van.
$x_1 = 0$-nál $y_{min} = 0$
$x_2 = \sqrt{2}$ és $x_3 = -\sqrt{2}$-nél $y_{max} = \dfrac{4}{e^2}$.

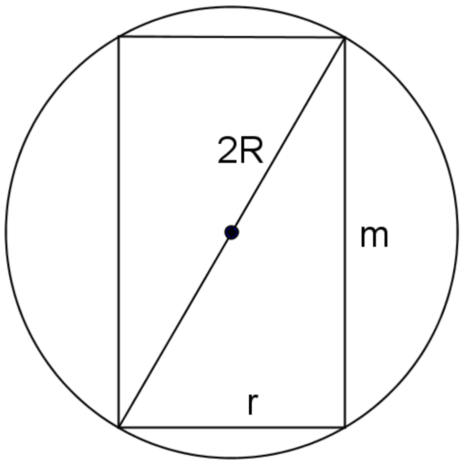
3.198. $f(x)_{max} = 4$, ha $x = 1$
$f(x)_{min} = -28$, ha $x = 5$

3.199. $f(x)_{max} = -2$, ha $x = -1$
$f(x)_{min} = 2$, ha $x = 1$

3.200. $f(x)_{min} = -\dfrac{1}{e^2}$, ha $x = \dfrac{1}{e}$



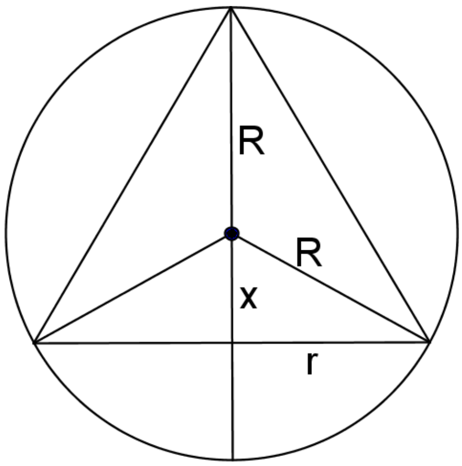
3.201. feladat



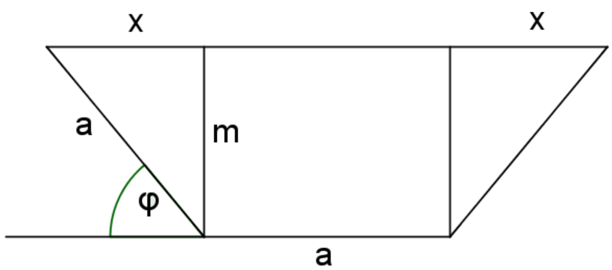
3.202. feladat

3.201. Jelöljük a négyszög alapját x-el, magasságát m-el, akkor a terület $T = x \cdot m$.
Az ábra alapján $x^2 + m^2 = 4R^2$, ahonnan $m = \sqrt{4R^2 - x^2}$, így $T = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$.
A kapott függvény maximumát kell keresnünk.
Egyszerűsítést jelenthet, ha a területfüggvény helyett annak négyzetét tekintjük. T^2-nek ugyanott van maximuma, ahol T-nek.
$T^2 = x^2(4R^2 - x^2)$.
A maximális területű négyszög négyzet: $x = m = \sqrt{2}R$. $T = 2R^2$.

3.202. Legyen a henger sugara r, magassága m.
$V = r^2\pi m$
$V_{max} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}R^3\pi$, ha $r = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}R$.



3.203. feladat



3.205. feladat

3.203. Legyen a kúp alapkörének a sugara r, magassága m. Vezessük be az ábrán jelzett „x”-et. Ezzel a kúp sugara és magassága is kifejezhető.

$V = \dfrac{r^2\pi m}{3}$; $r^2 = R^2 - x^2$, $m = R + x$.

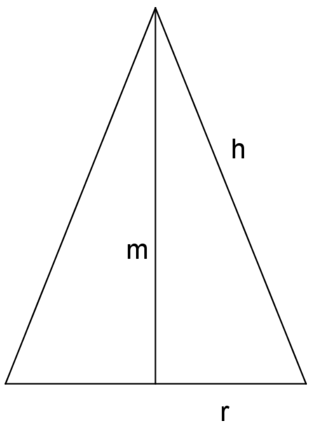
$V = \dfrac{\pi}{3}(R^2 - x^2)(R + x)$

$V_{max} = \dfrac{32}{81}R^3\pi$, ha $m = \dfrac{4}{3}R$, $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$.

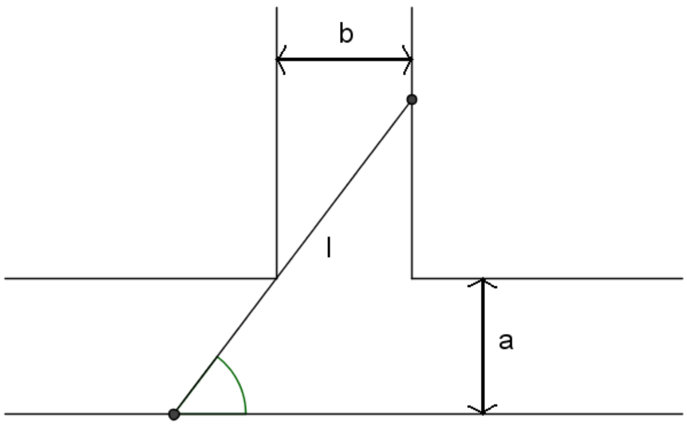
3.204. $r = m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$

3.205. $T = \dfrac{2a + 2x}{2}m = (a + x)m$

$\varphi = 60^\circ$.



3.206. feladat



3.207. feladat

3.206. $V_{max} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi h^3$, ha $r = \sqrt{\dfrac{2}{3}}h$, $m = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

3.207. $l_{max} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, ha tg $\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$.

3.208. P(2,±4).

$\boxed{\textbf{3.209.}}$

Egy óra alatt a hajó v-c km utat tesz meg felfelé. Ez alatt a fogyasztása

$E = av^3$(a konstans arányossági tényező). D költséget az egy km megtételéhez felhasznált energiával mérhetjük. A hajózás akkor a leggazdaságosabb, ha egy km út felfelé való megtételéhez
a legkevesebb energia szükséges. A költség minimumát a
$K = a\frac{v3}{v-c}$ költségfüggvény minimuma adja. A leggazdaságosabb sebesség:
$v = \frac{3}{2}c\ km/h$

3.8. Függvényvizsgálat

3.210.

A függvényvizsgálat kiterjed az

- értelmezési tartomány és az értékkészlet meghatározására
- a függvény viselkedése az értelmezési tartomány határain
- gyök meghatározása
- szélsőérték, inflexiós pont meghatározása
- növekvő és csökkenő szakaszok
- konvex és konkáv szakaszok meghatározása

Az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény értelmezési tartománya $D_f := \{x > 0\}$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
Gyöke az $\ln x = 0$ azaz $x = 1$ helyen van.
$f'(x) = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = x(2\ln x\ \ + 1)$
$f''(x) = 2\ln x\ \ + 1 + \frac{x^2}{x} = 2\ln x\ 3$
$f'''(x) = \frac{2}{x}$
$f'(x) = 0$, ha $2\ln x + 1 = 0$ akkor $x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$
($x = 0$ nincs az értelmezési tartományban
$f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -1 + 3 = 2 > 0$, tehát minimuma van. $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$
$f''(x) = 0$, ha $2\ln x + 3 = 0,\ \ x = e^{-\frac{3}{2}}$
$f'''\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = 2e^{\frac{3}{2}} \neq 0$, itt tehát inflexiós pont van.
$f(x)$ a $0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ szakaszon csökken, az $\frac{1}{\sqrt{e}} < x < +\infty$ szakaszon nő.
A $0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$ szakaszon konkáv, az $e^{-\frac{3}{2}} < x < +\infty$ szakaszon alulról konvex

3.211.

$f(-1)$: maximum, $f(4)$: minimum, $f\left(\frac{3}{2}\right)$: inflexió.

3.212.

$D_f : \{|x| < \infty\},\ x = 0$ gyök.
$f(1) = \frac{1}{2}$: maximum, $f(-1) = -\frac{1}{2}$: minimum, 0; $\pm\sqrt{3}$: inflexiós pontok.
A függvény páratlan; $(-\infty,\ -1)$ és $(1, \infty)$ szakaszon csökken, $(-1, 1)$ szakaszon nő.
$(-\infty,\ -\sqrt{3})$ és $(0,\ \sqrt{3})$ szakaszon alulról homorú, $(-\sqrt{3},\ 0)$ és $(\sqrt{3},\ +\infty)$ szakaszon alulról

domború.
Aszimptotája az x tengely.
$R_f = \left\{-\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\right\}$

$\boxed{\textbf{3.213.}}$

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $D_f : \{x \in R \,/ \{0\}\}$; páratlan függvény.
$f(1) = 2$: minimum; $f(-1) = -2$ maximum, inflexiós pontja nincs.
$(-\infty,\ -1)$ és $(1,\ \infty)$ szakaszokon nő, $(-1,\ -0)$ és $(0,\ 1)$ szakaszokon csökken.
$(-\infty,\ -1)$: konkáv, $(0,\ \infty)$ konvex. $R_f : \{f(x) \leq -2,\ f(x) \geq 2\}$
Az $y = x$ a függvény aszimptotája.

$\boxed{\textbf{3.214.}}$

$D_f : \{x \in R\}$; $f(1)$: maximum hely. az $x \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ helyeken inflexiós pont van.
A $(-\infty,\ 0)$ szakaszon a függvény monoton nő, a $(0,\ +\infty)$ szakaszon monoton csökken.
A $\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ és $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ +\infty\right)$ szakaszokon alulról domború, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ között homorú.
Aszimptotája az x tengely. $R_f : \{0 < f(x) \leq\ 1\}$

$\boxed{\textbf{3.215.}}$

$D_f : \{x \in R/\{-1\}\}$; $f(0) = 0$: minimum, $f(-2) = 4$: maximum, inflexió nincs, aszimptotája az $y = x - 1$ egyenes.
$(-\infty,\ -2)$ és $(0,\ +\infty)$ szakaszokon növekvő, $(-2,\ -1)$ és $(-1,\ 0)$ szakaszokon csökkenő.
$R_f : \{0 < f(x) \leq\ -4,\ f(x) \geq 0\}$

$\boxed{\textbf{3.216.}}$

$D_f : \{x \in R\}$; $R_f : \{y \in R\}$
Az $x = \frac{\pi}{4} \pm 2k\pi$ helyeken maximum,
az $x = \frac{5\pi}{4} \pm 2k\pi$ helyeken minimum,
az $x = 2k\pi$ helyeken inflexiós pont van.

3.9. Szöveges szélsőérték feladatok

3.269. Minimális távolság esetén $\alpha_1 = \alpha_2$.

3.270. Maximális terület 500 m^2, míg a minimális terület 0 (egyenes vonal).

3.271. A legközelebbi pont $A(3, 0)$, a legtávolabbi $B(-3, 0)$.

3.272. A ház oldalainak hossza 75 m és 50 m.

3.273. A maximális területű téglalap oldalai $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ és $\dfrac{2r}{\sqrt{2}}$. A minimális területű téglalap a degenerált eset: egyetlen vonal.

$\boxed{\mathbf{3.274}}$ Legyen $f(x)$ a bevétel, ha x utas van. A 200 fölöttiek száma $x - 200$, ezért a jegyek ára ennyivel csökken, tehát darabonként $30.000 - 100 \cdot (x - 200)$. Ezért az összes jegy ára:

$$f(x) = x\Big(30.000 - 100(x - 200)\Big) = 50.000x - 100x^2$$

Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 250$, így a potenciális szélsőérték helyek: $x = 200$, $x = 250$, $x = 350$. A megfelelő függvényértékek:

$$f(200) = 600.000, \qquad f(250) = 625.000, \qquad f(350) = 525.000$$

Maximális a bevétel 250 utas esetén, és minimális 350 utas esetén. (A feladat csupán elméleti...)

3.275. Négyzet.

3.276. Az egész drótból kört hajlítunk.