I. rész

Valós számok

Feladatok

Teljes indukció

Igazolja a teljes indukcióval a következő állítások helyességét!

1.1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

1.2. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2.$

1.3. a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1.$

b) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}.$

1.4. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$

1.5. $\displaystyle 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$

$\boxed{\textbf{1.6.}}$ $\displaystyle\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 2^2 x \ldots \cos 2^n x = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin x}.$

$\boxed{\textbf{1.7.}}$ $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ osztható 133-mal.

1.8. $4^n + 15n - 1$ osztható 9-cel.

1.9. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$

Egyenlőtlenségek

Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket!

1.10. $\displaystyle\frac{37-2x}{3} + 9 \leq \frac{3x-8}{4}.$

1.11. $8x - 4x^2 < 3.$

1.12. $x^2 + 5x - 14 \geq 0.$

1.13. $x^2 - 3x - 4 \leq 0.$

1.14. $(x^3 - 1)(x - 1) \geq 0.$

1.15. $\dfrac{x-5}{x+3} > 0.$

1.16. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}} > 1.$

1.17. $|2x-3| < 2.$

1.18. $\left|\dfrac{1}{x+1}\right| \geq 1.$

1.19. $\dfrac{|x+2|}{|x-1|} \geq 1.$

1.20. $|3\ln x - 1| < 2.$

1.21. $\sin|2x-4| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Megoldások

Teljes indukció

1.6 $n = 0$-ra az egyenlőség egy ismert trigonometrikus azonosság átrendezése.

Az indukciós lépés:

$$\cos x \cos 2x \cos 2^2 x \ldots \cos 2^n x \cos 2^{n+1} x = \frac{\sin 2^{n+1} x \cos 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x} =$$

$$= \frac{\sin 2^{n+2} x}{2^{n+2} \sin x}.$$

Az első egyenlőség az indukciós feltételből, a második a $2 \cos y \sin y = \sin 2y$ azonosságból ($y = 2^{n+1} x$ helyettesítéssel) adódik.

1.7

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \equiv (121 + 12) \cdot 11^n \equiv 0 \ (mod 133)$$

Az első kongruencia $144 \equiv 11$ (mod 133) miatt adódik.

Egyenlőtlenségek

1.10. $x \geq 56$

1.11. $x < \frac{1}{2}, x > \frac{3}{2}$

1.12. $x \leq -7, \quad x \geq 2$

1.13. $-1 \leq x \leq 4$

1.14. $-\infty < x < \infty$

1.15. $x > 5, \quad x < 3$

1.16. $x < -1, \quad -1 < x < 0$

1.17. $\frac{1}{2} < x < 5$

1.18. $x \geq 0$ vagy $x \leq -2$

1.19. $x \geq -\frac{1}{2}$

1.20. $10^{-1/3} < x < 10$

1.21. $2 - \frac{\pi}{6} + k\pi < x < 2 + \frac{\pi}{6} + k$

II. rész

Sorozatok, végtelen sorok

Feladatok

Számsorozat megadása

Írja fel az alábbi sorozatok n-dik elemét! Vizsgálja meg, hogy a sorozat korlátos-e, monoton-e, illetve konvergens-e!

2.1.

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

2.2.

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \ldots$$

2.3.

$$-1, 2, 5, 8, \ldots$$

2.4.

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

2.5.

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

2.6.

$$0,9; -0,99; 0,999; -0,9999, \ldots$$

2.7.

$$1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{4}, \ldots$$

2.8.

$$1, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{4}, 1, \frac{4}{5}, \ldots$$

Írja fel az alábbi sorozatok első néhány elemét. Vizsgálja meg, hogy a sorozat korlátos-e, monoton-e, konvergens-e!

2.9.

$$a_n = 3n$$

2.10.

$$a_n = (-1)^n$$

2.11.

$$a_n = 2 + 4n$$

2.12.

$$a_n = -\frac{3}{n^2}$$

2.13.

$$a_n = 3^n$$

2.14.

$$a_n = \frac{1}{4^n - 1}.$$

Számsorozat határértéke

Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

2.15

$$a_n = 2n^2 - 7n + 4$$

$\boxed{\textbf{2.16}}$

$$a_n = \frac{n^8 - 9}{n^9 + 12n^2 + 5}$$

$\boxed{\textbf{2.17}}$

$$a_n = \frac{3n - 4}{5n + 1}$$

2.18

$$a_n = \frac{2n^2 - 7n + 4}{3n^3 + 5n - 8}$$

2.19

$$a_n = \frac{2n^3 - 7n + 4}{3n^2 + 5n - 8}$$

2.20

$$a_n = \frac{3n^5 + 4n - 2}{7n^5 + 3n^3}$$

2.21

$$a_n = \frac{2n^2 - 7n + 4}{3n^2 + 5n - 8}$$

2.22

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 5}$$

Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét!

2.24 $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$\boxed{\textbf{2.25}}$ $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

2.26 $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n}$

2.27 $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

2.28 $a_n = n\sqrt[4]{n^4+n^2} - n^2$

2.29 $a_n = \sqrt{n + 4\sqrt{n}} - \sqrt{n - 10\sqrt{n}}$

2.30 $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

2.31 $a_n = \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$

$\boxed{\textbf{2.32}}$ $a_n = \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$

2.33 $a_n = n(\sqrt{n^2-1} - n)$

$\boxed{\textbf{2.34}}$ $a_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n}$

2.35 $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

2.36 $a_n = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{16} + \cdots + \dfrac{3^{n+1}}{2^{2n}}$

2.37 $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{(n+1)(n+2)}$

2.38 $a_n = \dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{2+4+\cdots+2n}$

2.39 $a_n = \dfrac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3}$

$\boxed{\textbf{2.40}}$ $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

2.41 $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \cdots \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

2.42 $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{n+1}$

2.43 $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$

2.44 $a_n = \sqrt[n]{2^n+5^n}$

2.45 $a_n = \sqrt[n]{n^6+2^n}$

2.46 $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^3+2n^2}{3^{2n}+7n}}$

2.47 $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^{3n+1}+n^4}{8^n+n^2}}$

Vizsgálja meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorozatok. Ha igen, akkor határozza meg azt az $N(\varepsilon)$ küszöbindexeket, melynél nagyobb indexű elemek a számsorozatban az előírt ε-nál kisebb hibával közelítik meg a sorozat határértékét.

2.48 $a_n = \dfrac{4n+3}{5n-1} \qquad \varepsilon = 10^{-3}$

$\boxed{\textbf{2.49}}$ $a_n = \dfrac{n-1}{2n+1} \qquad \varepsilon = 10^{-5}$

2.50 $a_n = \dfrac{4n+1}{7-5n} \qquad \varepsilon = 10^{-4}$

2.51 $a_n = \dfrac{2}{(n+1)^2} \qquad \varepsilon = 10^{-4}$

$\boxed{\textbf{2.52}}$ $a_n = \sqrt[n]{2} \qquad \varepsilon = 10^{-1}$

2.53 $a_n = \dfrac{1}{3^n+1} \qquad \varepsilon = 10^{-6}$

2.54
$$a_n = \frac{3n^2+1}{16-n^2} \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

2.55
$$a_n = \sqrt{\frac{n+4}{n}} \qquad \varepsilon = 10^{-1}$$

2.56
$$a_n = \frac{2n^5-7}{3n^5+n^4-2n^3-1} \qquad \varepsilon = 10^{-3}$$

Vizsgálja meg, hogy alábbi sorozatokban milyen N(K) küszöbindextől kezdve lesznek a sorozat elemei az adott K számnál nagyobbak!

$\boxed{\textbf{2.57}}$
$$a_n = n^2 \qquad K = 10^6$$

2.58
$$a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} \qquad K = 6500$$

2.59
$$a_n = \frac{5^n}{3^{n+2}} \qquad K = 10^{30}$$

2.60
$$a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}} \qquad K = 10^{20}$$

Határozza meg az alábbi határértékeket!

2.61
$$a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$$

2.62
$$a_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$$

$\boxed{\textbf{2.63}}$
$$a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$$

2.64
$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

2.65
$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}$$

2.66
$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$$

2.67
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+3}$$

2.68
$$a_n = (\frac{n+2}{n+3})^{3n}$$

2.69
$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n-2}$$

2.70
$$a_n = \left(\frac{3n-4}{3n+5}\right)^{4n+2}$$

2.71

$$a_n = (\frac{n+1}{2n-1})^{3n+1}$$

2.72

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^{n+3}+3}$$

2.73

$$a_n = (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$$

2.74

$$a_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n$$

2.75

$$a_n = [1 + (\frac{1}{2})^n]^{2^n}$$

2.76

$$a_n = (\frac{n^2-1}{n^2})^{n^4}$$

2.77

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$$

$\boxed{\textbf{2.78}}$

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)}{n^3}$$

Határozza meg az alábbi rekurzív sorozatok határértékét!

$\boxed{\textbf{2.79}}$

$$a_n = \frac{1}{4} + a_{n-1}^2, \qquad a_0 = 0$$

2.80

$$a_n = \frac{2}{1 + a_{n-1}}, \qquad a_0 = 0$$

2.81

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \qquad a_0 = \sqrt{2}$$

2.82

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4}, \qquad a_0 = 1$$

Számsorok

Konvergensek-e az alábbi végtelen sorok?

2.83.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$$

$\boxed{\textbf{2.84}}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.5^n}{n}$$

$\boxed{\textbf{2.85}}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

$\boxed{\textbf{2.86}}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+2}{n^2+1}$$

2.87
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{10n+2}$$

2.88
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n+1)}$$

$\boxed{\textbf{2.89}}$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n+2}-27}$$

$\boxed{\textbf{2.90}}$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+2}$$

2.91
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2.92
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$$

2.93
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+1}$$

2.94
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n}$$

2.95
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

2.96
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$$

$\boxed{\textbf{2.97}}$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

2.98
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$$

2.99
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 2^n}$$

2.100
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n}$$

2.101
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 4^n}$$

$\boxed{\textbf{2.102}}$
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$$

2.103

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

2.104

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

2.105

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$$

2.106

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$$

2.107

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

2.108

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

2.109

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n+2)(2n+1)}$$

2.110

$$\frac{1}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{4^3}{3^4} + \frac{5^3}{3^5} + \dots$$

2.111

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k}$$

2.112

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$$

2.113

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{ahol} \qquad a_k = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 1, \\ -\dfrac{1}{k+2} & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ \dfrac{1}{k} & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}$$

2.114

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(-2)^n(n^2-n+1)}.$$

2.115

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$

2.116

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

2.117

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{(2n+1)!}$$

Abszolút konvergensek-e az alábbi végtelen sorok?

2.118

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2-2}$$

2.119

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+1}$$

2.120

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+2}$$

2.121

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$$

2.122

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

2.123

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

2.124

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}$$

2.125

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2}$$

2.126

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Számítsa ki a következő sorok összegét!

2.127

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$\boxed{\textbf{2.128}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)^n, \qquad k \neq 0 \text{ rögzített.}$$

2.129

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$$

2.130

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{5}{n^2-5n}$$

2.131
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

2.132
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$$

2.133
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{3^{2n}}$$

2.134
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

2.135 Írja fel közönséges tört alakban az alábbi tizedestörteket!

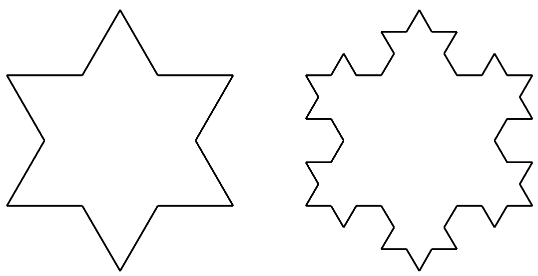
a, $1,7972972972...$

b, $0,78\ 123\ 123...$

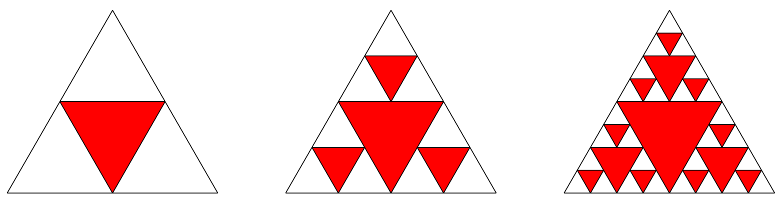
2.136 Képezzünk sokszöget egy szabályos a oldalú, T területű háromszögből a következő rekurzív eljárással:

1. Osszunk minden oldalt 3 egyenlő részre.
2. Minden középső oldal szakaszra illesszünk szabályos háromszöget.
3. Ismételjük meg az előző lépéseket.

Az így kapott sokszög az úgynevezett Koch-görbe. Mennyi a Koch görbe kerülete és területe?



2.137 Egységnyi területű szabályos háromszögbe beírjuk a középvonalai által alkotott háromszöget. Ezután vesszük az eredetivel egyállású részeket es azokba is beírjuk a kozépvonalai által alkotott háromszögeket. Ezt rekurzívan ismételjük. A kapott alakzat a SIERPINSKI háromszög. A középvonalak által alkotott háromszögek összterülete hányadik iteráció után haladja meg a 175/256 értéket?



Megoldások

Számsorozat megadása

2.1 $a_n = n^2$, a sorozat divergens.

2.2 $a_n = \frac{n}{(n+1)}^{2}$, a sorozat konvergens.

2.3 $a_n = -4 + 3n$, a sorozat divergens.

2.4 $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, a sorozat konvergens.

2.5 $a_n = (-1)^n$, a sorozat divergens.

2.6 $a_n = 1 - 10^{-(n-1)}$, a sorozat konvergens.

2.7 $a_n = (-1)^{n+1}\frac{2n-1}{n}$, a sorozat divergens.

2.8 $a_n = 1 - (1 + (-1)^{(n+1)})\frac{1}{n}$, a sorozat konvergens.

Számsorozat határértéke

2.15 ∞

2.16

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8 - 9}{n^9 + 12n^2 + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{9}{n^8}}{n + \frac{12}{n^6} + \frac{5}{n^8}} = 0$$

2.17

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n - 4}{5n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{n}}{5 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{5}$$

2.18 0.

2.19 ∞.

2.20 $\frac{3}{7}$.

2.21 $\frac{2}{3}$.

2.22 ∞.

2.24 0.

2.25

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0$$

2.26 $-\frac{1}{2}$.

2.27 $\frac{1}{2}$.

2.28 $\frac{1}{4}$.

2.29 7.

2.30 1.

2.31 3.

2.32

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!((n+2)+1)}{(n+1)!(n+2)(n+3)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^2+5n+6} = 0$$

2.33 $-\frac{1}{2}$

2.34

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(1+n)n}{2}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n}{2} = \infty$$

2.35 2.

2.36 9.

2.37 $\frac{1}{2}$.

2.38 1.

2.39 $\frac{1}{3}$.

2.40 Teljes indukcióval belátható, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

2.41 $\frac{1}{2}$.

2.42 1.

2.43 0.

2.44 5.

2.45 2.

2.46 $\frac{1}{9}$.

2.47 1.

2.48 760.

2.49

$$\left|\frac{n-1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2-2n-1}{4n+2}\right| = \left|\frac{-3}{4n+2}\right| < 10^{-5},$$

ha

$$\frac{3\cdot 10^5 - 2}{4} < n \quad \text{azaz} \quad N = 74999$$

2.50 $N = 13201$.

2.51 $N = 140$.

2.52 $|\sqrt[n]{2} - 1| = \sqrt[n]{2} - 1 < 10^{-1}$, azaz $\sqrt[n]{2} < 1.1$. Mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát véve kapjuk, - a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt - hogy

$$\frac{1}{n} < \log_2 1.1$$

azaz $N = 7$.

2.53 $N = 12$.

2.54 $N = 700$.

2.55 $N = 200$.

2.56 $N = 222$.

2.57 $n^2 > 10^6 \Leftrightarrow n > 10^3$, így ez a szám jó lesz N küszöbindexnek.

2.58 $N = 6501^2$.

2.59 $N = 139$.

2.60 $N = 115$.

2.61 e^3.

2.62 e^{-2}.

2.63

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n}}\right)^n = e^2$$

2.64 e^2.

2.65 $\frac{1}{e}$.

2.66 e.

2.67 e^2.

2.68 $\frac{1}{e^3}$.

2.69 e^2.

2.70 e^{-6}.

2.71 0.

2.72 e^8.

2.73 0.

2.74 1.

2.75 e.

2.76 0.

2.77

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n+1) \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \infty$$

2.78

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}{n^3} = \frac{1}{3}$$

2.79 Teljes indukcióval belátható, hogy a sorozat monoton növő, és korlátos. Ebből következik, hogy konvergens, vagyis létezik a

$$\lim a_n = \lim a_{n+1} = A$$

határérték. Amiből

$$\frac{1}{4} + A^2 = A,$$

ennek megoldása $A = \frac{1}{2}$.

2.80 1.

2.81 2.

2.82 2.

Számsorok

2.83 Divergens.

2.84 Pozitív tagú sor, és a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ konvergens geometriai sor majorálja, tehát konvergens.

2.85 $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$, tehát a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül: a sor divergens.

2.86 A sor divergens, ugyanis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 \cdot n + 2}{n^2 + 1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n + 2}{(n+1)^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

a sort tehát a harmonikus sor minorálja, amely divergens.

2.87 Divergens.

2.88 Konvergens.

2.89 Divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+2} - 27} = \frac{1}{9},$$

s így a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

2.90 Pozitív tagú sor, melyet majorál a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergens geometriai sor, tehát konvergens.

2.91 Divergens.

2.92 Divergens.

2.93 Divergens.

2.94 Divergens.

2.95 Konvergens.

2.96 Divergens.

2.97 Konvergens. A pozitív tagú sort majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ sor, amely konvergens, mert pl. a gyök-kritériumot alkalmazva

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

2.98 Divergens.

2.99 Divergens.

2.100 Divergens.

2.101 Konvergens.

2.102 Divergens. Ugyanis

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{3}{n-2},$$

s így

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n-2} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ez a harmonikus sor viszont divergens.

2.103 Divergens.

2.104 Konvergens.

2.105 Konvergens.

2.106 Konvergens.

2.107 Divergens.

2.108 Konvergens.

2.109 Konvergens.

2.110 Konvergens.

2.111 Konvergens.

2.112 Konvergens.

2.113 Konvergens.

2.114 Konvergens.

2.115 Konvergens.

2.116 Divergens.

2.117 Konvergens.

2.118 Feltételesen konvergens.

2.119 Abszolut konvergens.

2.120 Abszolut konvergens.

2.121 Feltételesen konvergens.

2.122 Divergens.

2.123 Feltételesen konvergens.

2.124 Feltételesen konvergens.

2.125 Abszolut konvergens.

2.126 Feltételesen konvergens.

2.127 3.

2.128 Konvergens geometriai sor: $q = \dfrac{k^2}{1+k^2} < 1$.

2.129 $\dfrac{1}{3}$.

2.130 $\dfrac{137}{60}$.

2.131 $\dfrac{1}{2}$.

2.132 $\dfrac{1}{4}$.

2.133 $\dfrac{81}{20}$.

2.134 1.

2.135 a, $\dfrac{399}{222}$; b, $\dfrac{5203}{6660}$.

2.136 $K = \infty$, $T = \dfrac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

2.137 $n = 4$.