Függvények

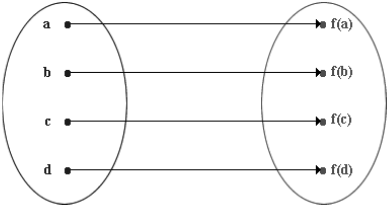
2014. október 2.

Tartalom

Alaptulajdonságok

Adott egy $f : X \longrightarrow Y$ leképezés. Ez azt jelenti, hogy minden $x \epsilon X$ elemhez hozzárendelünk az Y halmazból egy y elemet, és ezt így jelöljük:

$$y = f(x), \qquad x \mapsto y$$



A függény **értelmezési tartományát** D_f jelöli.
A függvény **értékkészlete**

$$R_f = \{y \epsilon Y \ : \quad \exists x \epsilon X, \quad y = f(x)\}.$$

Definíció. Az f függvény **injektív**, ha $f(x_1) \neq f(x_2)$ bármely $x_1 \neq x_2 \epsilon D_f$ esetén.

A függvény **szürjektív**, ha minden $y \epsilon Y$- hoz létezik x, melyre $y = f(x)$.

A függvény **bijektív**, ha injektív és szürjektív, azaz a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű X és Y között.

Definíció. Adott két függvény, $f : X \to Y$ és $g : Y \to Z$.
Az **összetett f¨üggvény** $X \to Z$ típusú hozzárendelés lesz, melyre $x \mapsto g(f(x))$.
Jele: $g \circ f$, ahol g a külső-, f a belső függvény. Értelmezési tartománya

$$D_{g \circ f} = \{x :\ x \epsilon X,\ f(x) \epsilon D_g\}.$$

Példa. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$. Ekkor $f \circ g$ és $g \circ f$ is értelmezhető:

$$f \circ g(x) = \sin^2(x), \qquad g \circ f(x) = \sin(x^2).$$

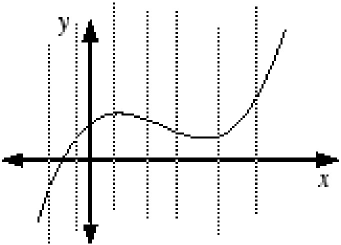
Valós függvények

A fenti definíciók tetszőleges X és Y esetén értelmezhetőek.

A továbbiakban csak **valós függvényekkel** foglalkozunk.

Feltesszük, hogy

$$X \subset \mathbb{R}, \qquad Y \subset \mathbb{R}.$$



Függőleges vonal tesz

Ha a függvény bijektív, akkor létezik **inverz függvény**

$$f^{-1} : Y \;\to\; X,$$

melyre

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad f(f^{-1}(y)) = y$$

Tehát

$$f \circ f^{-1} : Y \to Y, \qquad f^{-1} \circ f : X \to X$$

identitás függvények az adott térben.

FIGYELEM! A függvények esetén az $\mathbf{f^{-1}}$ jelölés **NEM jelent reciprokot**! Egészen mást jelent, mint az $\mathbf{\frac{1}{f}}$ függvény.

Valós függvények esetén szemléletesen az inverzfüggvény gráfját úgy kapjuk, hogy az x és y tengelyek felcserélődnek.

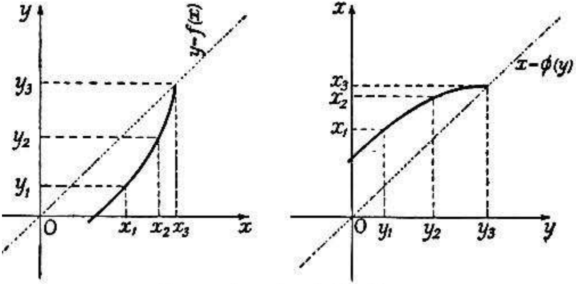


Fig. 10.—Inversion of a function

Egy függvény akkor invertálható, ha bármely x tengellyel párhuzamos egyenes legfeljebb csak egy pontban metszi a gráfot.

Korlátosság

Definíció.
Az f függvény **alulról korlátos**, ha R_f alulról korlátos.

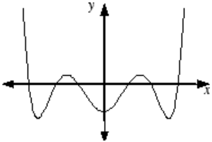
Az f függvény **felülről korlátos**, ha R_f felülről korlátos.

Végül az f függvény **korlátos,** ha R_f korlátos.
Másképp fogalmazva, az f függvény korlátos, ha van olyan K szám, hogy

$$|f(x)| \leq K \qquad \forall x \epsilon D_f.$$

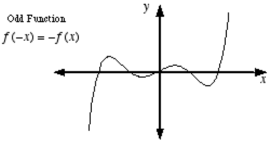
Definíció. Az f függvény **páros**, ha D_f szimmetrikus (azaz $x \epsilon D_f$ esetén $-x \epsilon D_f$ is teljesül) és

$$f(-x) = f(x) \qquad \forall x \epsilon D_f .$$



Az f függvény **páratlan**, ha D_f szimmetrikus és

$$f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \epsilon D_f .$$



Monotonítás

Definíció. Az f függvény **monoton növő**, ha minden $x_1, x_2 \epsilon D_f$ esetén

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

f **szigorúan monoton növő**, ha minden $x_1, x_2 \epsilon D_f$ esetén

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Definíció. Az f függvény **monoton fogyó**, ha minden $x_1, x_2 \epsilon D_f$ esetén

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

f **szigorúan monoton fogyó**, ha minden $x_1, x_2 \epsilon D_f$ esetén

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Periodicitás

Definíció. Az f függvény **periodikus** p periódussal, ha tetszőleges $x, x + p \epsilon D_f$ esetén

$$f(x + p) = f(x).$$

Megjegyzés. Ha egy függvény periodikus p periódussal, akkor p tetszőleges egész számú többszöröse is periódusa lesz.

Tartalom

Polinomok

Definíció. Egy valós együtthatós polinom általános alakja:

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_k \epsilon \mathbb{R}.$$

Ezekre a polinomokra $D_f = \mathbb{R}$. A polinom **foka** n

– $n = 1$ esetén $p_1(x) = ax + b$ **lineáris** függvény,

– $n = 2$ esetén $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ **kvadratikus** függvény.

Racionális függvények

Definíció. Racionális törtfüggvény két polinom hányadosaként áll elő:

$$y = f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}, \quad n, m \epsilon \mathbb{N}.$$

Ha a nevező zérushelyeit H jelöli, akkor

$$D_f = \mathbb{R} \setminus H.$$

Például

$$y = \frac{1}{x}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Algebrai függvények

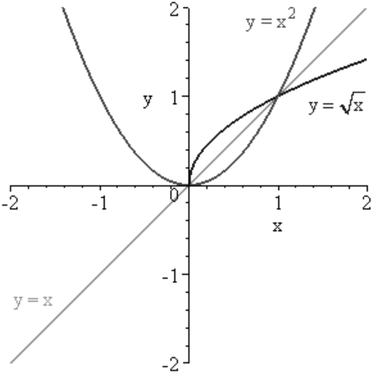
Ezek a racionális törtfüggvények inverzei.

Például az $f(x) = x^n$ függvény $\mathbb{R}^+$-re vett leszűkítését tekintjük.

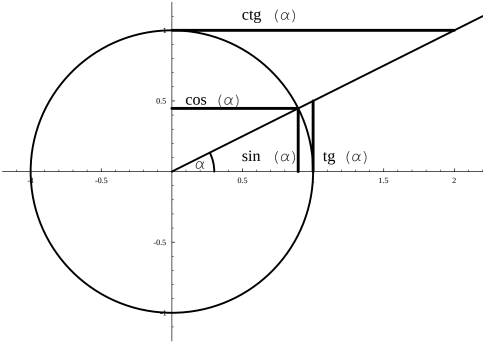
Ennek inverze:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Az inverzfüggvény értelmezési tartománya $D_f = \{x : x \geq 0\}$.



Trigonometrikus függvények



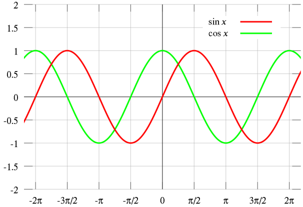
– sin(x), cos(x) függvények geometriai értelmezése, $x \epsilon [0, 2\pi]$

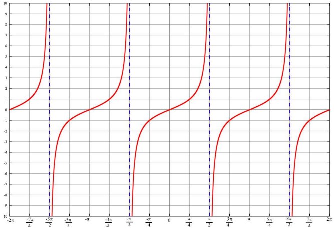
– tg (x) értelmezése $x \epsilon (-\pi/2, \pi/2)$

– ctg (x) értelmezése $x \epsilon (0, \pi)$

Trigonometrikus függvények II.

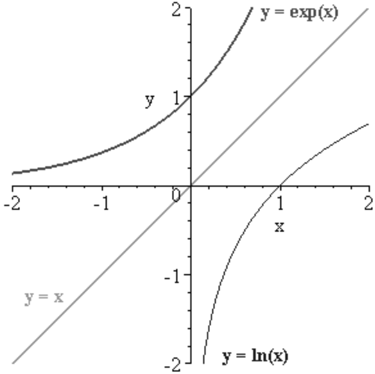
Tetszőleges $x \epsilon \mathbb{R}$ esetén a fent definiált függvényeket terjesztjük ki 2π szerint (ill. π szerint) periodikusan.
Ne felejtsük el, hogy a szögeket radiánban mérjük, nem fokban.





Exponenciális és logaritmus függvények

Ha $a > 0$, akkor $y = a^x$, egyenlőre $x \epsilon \mathbb{Q}$ esetén van csak értelmezve.



Tartalom

A folytonosság értelmezése

Heurisztikusan egy függvény x_0 **pontbeli folytonossága** a azt jelenti, hogy ha x_0-ban picit változtatunk, akkor a függvényérték is picit változik, nincs *ugrás* a függvény gráfjában.

Definíció.
Adott egy $f : X \to Y$ függvény és egy $x_0 \epsilon D_f$ pont.

Azt mondjuk, hogy f **az x_0-ban folytonos**, ha $\forall \varepsilon > 0$ hoz létezik olyan $\delta > 0$, melyre teljesül, hogy

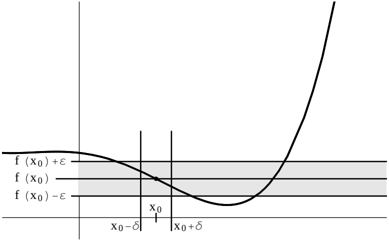
$$\forall x \epsilon D_f, \qquad |x - x_0| < \delta$$

esetén

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

A folytonosság értelmezése II.

Szemléletesen:



Legyen az $f(x_0) = y_0$.

Az y_0 körül tekintünk egy tetszőleges $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ vízszintes sávot.

Ekkor ehhez létezik az x_0 körül egy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (függőleges) sáv, hogy a függvény grafikonja az $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ és $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sávok metszetébe esik.

A folytonosság értelmezése III.

Definíció átfogalmazása:

Definíció. Az f függvény folytonos az $x_0 \epsilon D_f$ pontban,

ha $f(x_0)$ tetszőleges U környezetéhez

létezik az x_0-nak olyan V környezete,

melyre minden $x \epsilon V$, $x \epsilon D_f$ esetén $f(x) \epsilon U$.

A folytonosság, példák

1. Tekintsünk egy lineáris függvényt, legyen $f(x) = 5x + 3$ és $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ tetszőleges pont.

Ekkor

$$|f(x) - f(x_0)| = |(5x + 3) - (5x_0 + 3)| = |5(x - x_0)|.$$

Adott $\varepsilon > 0$.

Kérdés: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ mikor teljesül?

Válasz:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$$

választással, ha $|x - x_0| < \delta = \varepsilon/5$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

A folytonosság, példák II.

2. Az $f(x) = \sin(x)$ függvény folytonos minden pontban.

Felhasználjuk a megfelelő trigonometrikus azonosságot:

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Másrészt ismert, hogy $|\sin x| \leq |x| \qquad \forall x \epsilon \mathbb{R}.$

Legyen x_0 tetszőleges valós szám.Ekkor

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \leq$$

$$2\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \leq \left|2\,\frac{x-x_0}{2}\right| \leq |x-x_0|.$$

Így ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\delta = \varepsilon$ jó választás. Hiszen

$$|x-x_0| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \qquad \surd.$$

A folytonosság, példák III.

További példák. A korábban átismételt elemi függvények folytonosak értelmezési tartományuk minden pontjában.