Függvények

2019. október 17.

A folytonosság, ismétlés

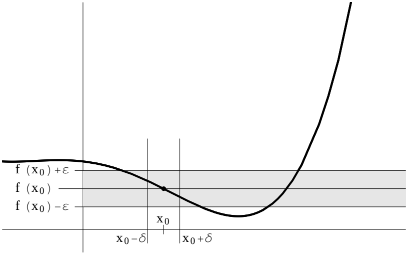
Adott egy $f : X \to Y$ függvény és egy $x_0 \epsilon D_f$ pont.

Heurisztikusan egy függvény x_0 **pontbeli folytonossága**:

x_0-ban picit változtatunk $\Longrightarrow$ a függvényérték is picit változik

Definíció. Az f **függvény x_0-ban folytonos**, ha $\forall \varepsilon > 0$ hoz $\exists \delta > 0$, melyre teljesül, hogy

$$\forall x \epsilon D_f, \qquad |x - x_0| < \delta \qquad \text{esetén} \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



Folytonosság és sorozatfolytonosság, ismétlés

Definíció. Az f függvény **sorozatfolytonos** az $x_0 \epsilon D_f$ pontban,

ha $\forall (x_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Tétel. Az f függvény az x_0-ban folytonos $\Longleftrightarrow$ sorozatfolytonos.

Weierstrass I. tétel

(Ismétlés)

Speciális folytonos függvény:

ÉT= korlátos és zárt (KOMPAKT)

Tétel. (Weierstrass I. tétele) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. **Ekkor** f **korlátos.**

Weierstrass II. tétel

Tétel. (Weierstrass II. tétele)

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ekkor f felveszi infimumát és supremumát $[a, b]$-n.

Ez azt jelenti, hogy $\exists \xi_1$ és $\exists \xi_2$:

$$f(\xi_1) = \max\{f(x),\ x \epsilon [a, b]\},$$

$$f(\xi_2) = \min\{f(x),\ x \epsilon [a, b]\}.$$

Weierstrass II. tétel, bizonyítás

A maximum létezését igazoljuk.

$$H = \{f(x) : x \epsilon [a, b]\} = R_f.$$

Weierstrass I. tétel alapján H korlátos

$$\beta := \sup(H) < \infty.$$

Ekkor $\forall n$-re $\exists x_n$:

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta.$$

$a \leq x_n \leq b$ ezért az (x_n) sorozat korlátos.

Az (x_n) sorozat korlátos.

Tehát $\exists(x_{n_k})$ konvergens részsorozata (B-W tétel):

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

$[a,b]$ zárt, ezért $\xi\epsilon[a,b]$. Itt f folytonos (sorozatfolytonos is):

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Másrészt

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_{n_k}) \le \beta, \quad \Longrightarrow \quad \beta = f(\xi) \quad \Longrightarrow \quad \beta\epsilon H.$$

Ezért valóban $\beta = \max(H)$.

A minimum létezését hasonlóan igazolhatjuk.

Bolzano és Weierstrass tételek következménye

Tétel.

Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ekkor f ÉK-e is korlátos, zárt intervallum:

$$f : [a, b] \to [\alpha, \beta].$$

Bizonyítás. W2: f felveszi infimumát és supremumát $[a, b]$-n.

$$f(\xi_1) = \max\{f(x),\ x \epsilon [a, b]\} = \alpha,$$

$$f(\xi_2) = \min\{f(x),\ x \epsilon [a, b]\} = \beta.$$

B. : $\forall c \epsilon [\alpha, \beta]$ értéket felvesz.

$\frac{0}{0}$ típus.

$\lim \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$, ha $x \to x_0$

Algebrai azonosság:

$$x^2 - x_0^2 = (x - x_0)(x + x_0).$$

Ezt felhasználva:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = \; = 1 \cdot 2x_0.$$

$\frac{0}{0}$ típus.

$\lim \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$, ha $x \to x_0$

Algebrai azonosság:

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + \dots x^j x_0^{n-1-j} \dots + x_0^{n-1}).$$

Ezt felhasználva:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + \dots + x^j x_0^{n-1-j} + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + \dots x^j x_0^{n-1-j} \dots + x_0^{n-1}) =$$

$$= 1 \cdot n x_0^{n-1}.$$

$$\lim \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}, \; x \to x_0$$

Trigonometrikus azonosság:

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right).$$

Ezt felhasználva:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -2 \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} =$$

$$= -1 \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0} \sin\left(\frac{x + x_0}{2}\right) =$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{x_0 + x_0}{2}\right) = -\sin x_0.$$

$\frac{0}{0}$ típus.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = ?$$

Trigonometrikus azonosság:

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right).$$

Ezt felhasználva:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = 2 \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = \Big|_{t = \frac{x - x_0}{2}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \cos\left(\frac{x_0 + x_0}{2}\right) = 1 \cdot \cos x_0.$$

Az e szám, mint határérték

Láttuk, hogy $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

A határértéket tekinthetjük a valós számokon keresztül is:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Valóban,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1+\frac{1}{[x]}\right)\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} \to 1\cdot e$$

Alsó becslés hasonlóan.

Az e szám, mint határérték

(Folytatás)

Ugyanígy igazolható, hogy

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a},$$

tetszőleges $a\epsilon\mathbb{R}$ esetén.

Ez alapján,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{u\to\infty}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to\infty}(1-\frac{1}{u})^{u}}=$$

$$=\frac{1}{e^{-1}}=e$$

$\frac{0}{0}$ típusú határérték: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = ?$

Ismétlés: $\ln(x) = \log_e(x)$

Külön kell számolni az egyoldali határtértékeket.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to\infty} t\ln(1+\frac{1}{t}) = \lim_{t\to\infty} \ln(1+\frac{1}{t})^t =$$

$$= \ln\left(\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t\right) = \ln e = 1.$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{t\to-\infty} t\ln(1+\frac{1}{t}) = \lim_{t\to-\infty} \ln(1+\frac{1}{t})^t = ... = 1.$$

Végső eredmény:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Folytonos függvény

Definíció.

$\boxed{f \text{ folytonos } D_f\text{-en}}$ ha $\forall x_0 \in D_f$-re folytonos x_0-ban.

A folytonosság definíciójában szereplő δ-ra

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0).$$

Létezik-e olyan függvény, mely ”közös” δ-val rendelkezik, $\delta = \delta(\varepsilon)$ minden x_0 pontban?

Van-e olyan függvény, mely ”közös” δ-val rendelkezik, $\delta = \delta(\varepsilon)$ minden x_0 pontban?

Igen.

Pl. $f(x) = x^2 + 1$, ennek megszorítását nézzük $D_f = [1, 2]$-re.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|x^2 + 1 - x_0^2 - 1\right| = |(x - x_0)(x + x_0)| \leq$$

$$\leq |x - x_0| \cdot 4,$$

u.i. $|x + x_0| \leq 4$ teljsül $\forall x, x_0 \epsilon [1, 2]$.

Ezért $\delta = \varepsilon/4$ választás $\forall x_0$-ra jó.

Egyenletes folytonosság

Definíció.
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény $\boxed{\text{egyenletesen folytonos } D_f\text{-en}}$,

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$, melyre

$$\forall x_1, x_2 \epsilon D_f, \quad |x_1 - x_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

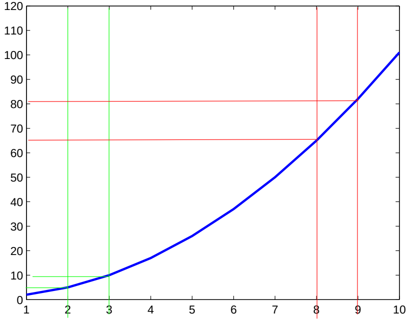
Következmény.

Ha f egyenletes folytonos D_f-en, akkor $\forall x_0 \epsilon D_f$-ben folytonos.

1. Példa

$f(x) = x^2 + 1$, $D_f = [0, +\infty)$.

NEM egyenletesen folytonos.



Legyen $\varepsilon = 2$. Belátjuk, hogy erre $\forall\delta$ "rossz".
Valóban, ha $\dfrac{1}{n} < \delta$, akkor válasszuk:

$$x_1 = n, \qquad x_2 = n + \frac{1}{n}.$$

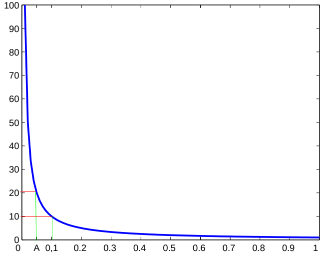
Bár $|x_1 - x_2| < \delta$, mégis

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| n^2 + 1 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 1 \right| =$$

$$= \left| n^2 - n^2 - 2 - \frac{1}{n^2} \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 = \varepsilon.$$

2. Példa

$$f(x) = \frac{1}{x},\ x \epsilon (0, 1).$$



Ha $x_1 = \frac{1}{n}$, $x_2 = \frac{1}{n+1}$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1$.

Az alappontok távolsága tetszőlegesen kicsi lehet

$$|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} < \delta.$$

Ezért az $\varepsilon = 1$-hez nincs "jó" δ.

3. Példa

$f(x) = \sin(x), \qquad x \epsilon \mathbb{R}.$

Állítás. Egyenletesen folytonos az egész $\mathbb{R}$-en.

Alapötlet a bizonyításhoz:

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0|$$

Így $\forall \varepsilon > 0$-ra $\delta = \varepsilon$ választás x_0-tól függetlenül jó.

Folytonosság és egyenletes folytonosság

$f : D_f \to \mathbb{R}$ Folytonos.

Fontos speciális eset: $D_f = [a, b]$. Korlátos és zárt ($\equiv$ kompakt).

Tétel. (Heine tétel)

Ha az $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor egyenletesen is folytonos.

Bizonyítás

Indirekt.
Tegyük fel, hogy $\exists \varepsilon > 0$ melyre $\forall \delta > 0$ rossz, például $\delta = \frac{1}{n}$ sem jó.

(Részletek a jegyzetben...)

Példák folytatása

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ megszorítása a $[\delta, 1]$, $(0 < \delta < 1)$ halmazra egyenletesen folytonos.

2. $f(x) = x^2$ megszorítása a $[0, K]$ intervallumra ($\forall K > 0$ esetén) egyenletesen folytonos.

Elégséges feltétel.

Tétel.

Legyen $f: [a; \infty) \to \mathbb{R}$ folytonos. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A < \infty$$

Ekkor f egyenletesen folytonos.

Példa. Vajon $f(x) = x^5 + 4x^2 + 3$, $D_f = (0, 1]$ egyenletesen folytonos-e?

Igen, hiszen $(0, 1] \subset [0,\ 1]$.
$f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos, a Heine tétel miatt.