Függvények

Határérték. Folytonosság.

2019. október 14.

Példa

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = ?$$

Elegendő a $0 < x < \pi/2$ intervallumot tekinteni, hisz f páros.
Itt

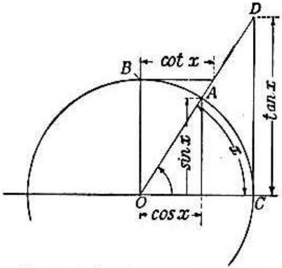


Fig. 13.—The trigonometric functions

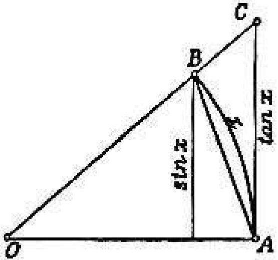


Fig. 18

Példa, folytatás

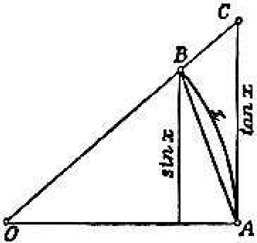


Fig. 18

Az ábráról is leolvashatók:

$$\sin(x) < x, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Másrészt $\operatorname{tg}(x) > x$. Így

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} > x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x).$$

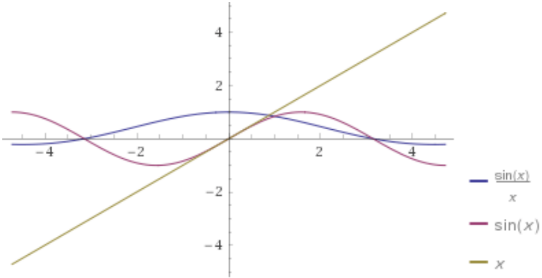
Példa, folytatás

Tehát

$$\cos x < \frac{\sin(x)}{x} < 1.$$

Határértéket véve

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$



Kompozíció határértéke

Állítás. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha, \qquad \lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta,$$

ahol $\alpha, \beta, x_0 \epsilon \mathbb{R}$

Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \beta.$$

Kompozíció határértéke. $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = \beta.$

Bizonyítás. Átviteli elv segítségével. (HF)

Megjegyzés. A fenti képletben szereplő konstansok értéke akár $\pm\infty$ is lehet.

Kompozíció határértéke, példa

$$f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A jobboldali határérték

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} =?$$

Mivel

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \text{ezért} \quad \lim_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Emiatt

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0.$$

Kompozíció határértéke, példa, folytatás

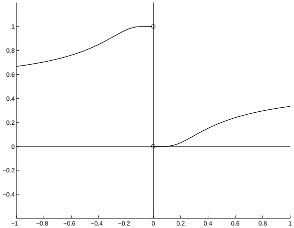
Baloldali határérték:

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \Rightarrow \qquad , \lim_{x \to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Ezért

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1$$

Tehát a $\lim_{x \to 0} f(x)$ nem létezik.



Monoton függvény határértéke

Állítás. $f : X \to Y$ adott függvény. Tfh $\exists U = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$:

$$\forall x_1 < x_2 \,\epsilon U \setminus \{x_0\} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \leq f(x_2),$$

azaz f monoton nő x_0 egy környezetében .

Ekkor léteznek a határértékek:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x)$$

éspedig

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : \; x_0 - \varepsilon < x < x_0\},$$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf\{f(x) : \; x_0 < x < x_0 + \varepsilon\}.$$

A határérték monotonitása.

Állítás.

1. Tegyük fel, hogy

$$f(x) \ \leq \ g(x) \qquad \forall x \epsilon U \setminus \{x_0\}.$$

Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \ \leq \ \lim_{x \to x_0} g(x).$$

2. Tegyük fel, hogy

$$f(x) < g(x) \qquad \forall x \epsilon U \setminus \{x_0\}.$$

Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

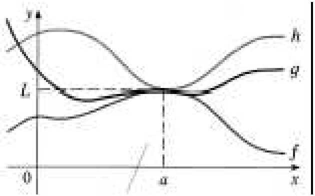
Rendőrelv függvényekre

Adottak $f, \; g, \; h, \; : D \to \mathbb{R}$, melyekre

$$f(x) \;\leq\; g(x) \;\leq\; h(x), \qquad x \epsilon U, \; x \neq x_0,$$

Feltesszük továbbá, hogy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \alpha.$$

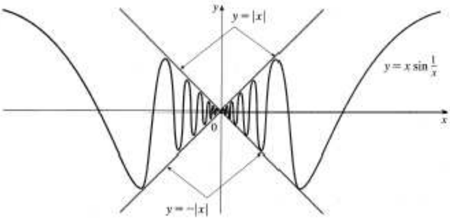


Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha$$

Rendőrelv függvényekre. Példa.

$$f(x) = x \ \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$



$$-|x| \le x \ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le |x|, \qquad x \neq 0.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0} |x| = \lim\limits_{x\to 0} (-|x|) = 0$, így

$$\lim_{x\to 0} x \ \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Folytonosság és határérték

Állítás.
Az f függvény pontosan akkor folytonos $x_0 \epsilon \operatorname{int} D_f$-ben, ha

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

és

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definíció. Ha f $x_0 \epsilon D_f$ pontjában *nem folytonos*, akkor itt

szakadási helye van.

Szakadási helyek osztályozása

Elsőfajú szakadás, ha

$$\exists \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0) < \infty$$

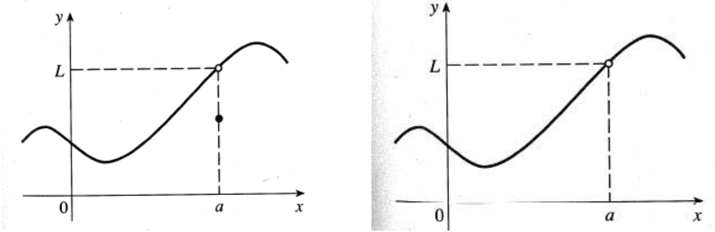
$$\exists \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0) < \infty$$

Speciális eset: x_0-ban megszüntethető a szakadás, ha léteznek a jobb- és baloldali határértékek, ezek *megegyeznek*, de

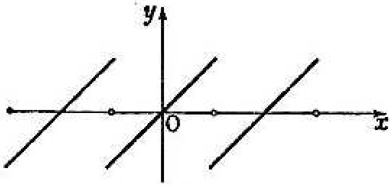
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Elsőfajú szakadás

Példa megszüntethető szakadásra

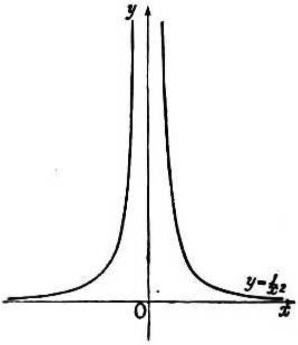


Példa nem megszüntethető szakadásra



Másodfajú szakadás

Definíció. Másodfajú a szakadás, ha nem elsőfajú.

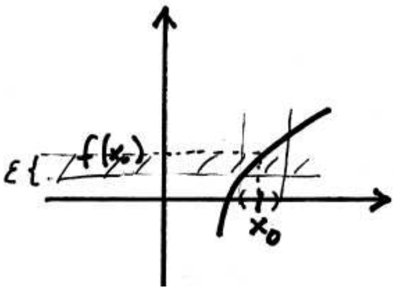


Állítás.

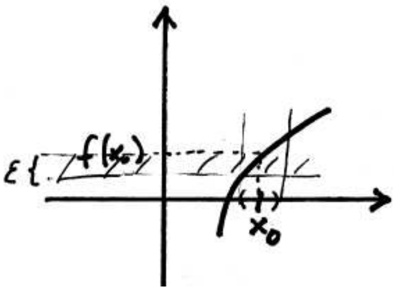
Tegyük fel, hogy f folytonos x_0-ban és $f(x_0) > 0$.

Ekkor $\exists U$ környezete x_0-nak, melyre

$$f(x) > 0, \qquad \forall x \epsilon U \cap D_f.$$



Bizonyítás.



Legyen $0 < \varepsilon < f(x_0)$. A folytonosság miatt $\exists \delta > 0$:

$$|x - x_0| < \delta, \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ezen x pontokra tehát

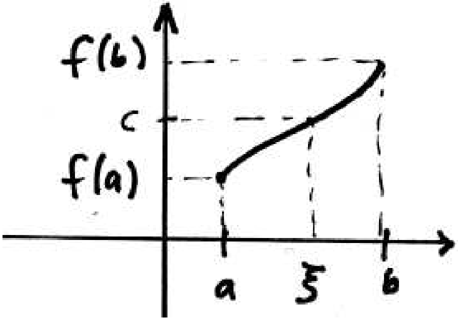
$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon > 0.$$

Bolzano tétel

Tétel.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **folytonos** függvény, tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$.

Ekkor $\forall c$: $f(a) < c < f(b)$]-hez $\exists \xi \epsilon (a, b)$, melyre $f(\xi) = c$.



Bolzano tétel, bizonyítás

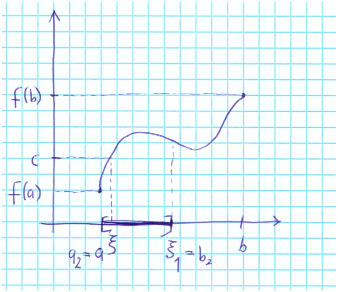
Konstruktív bizonyítás. 1. lépes. Legyen $a_1 = a, \; b_1 = b$.

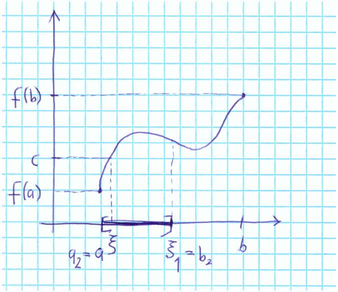
2. lépes. Legyen $\xi_1 := \dfrac{a+b}{2}$.

– Ha $f(\xi_1) = c$, akkor $\surd$.

– Ha $f(\xi_1) > c$, akkor legyen $a_2 := a_1, \quad b_2 := \xi_1$.

– Ha $f(\xi_1) < c$, akkor legyen $a_2 := \xi_1, \quad b_2 := b_1$.





Ekkor

$$f(a_2) < c \text{ és } f(b_2) > c,$$

és $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ éppen fele hosszúságú.

3. lépes. $[a_3, b_3] \subset [a_2, b_2]$ konstrukciója: $f(a_3) < c < f(b_3)$, stb.

Ekkor két eset lehetséges:

– véges sok lépésben vége van az iterációnak, $\xi\surd$

– ”nincs vége”.

Bolzano tétel, bizonyítás

Ha ”nincs vége”, ekkor

$$(a_n): \quad f(a_n) < c$$

$$(b_n): \quad f(b_n) > c.$$

$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \ldots$, és az intervallumok hossza tart a 0-hoz.

A Cantor-féle közöspont-tétel: $\exists! \xi \; \xi \epsilon (a, b)$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

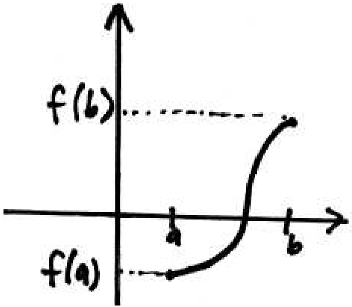
A folytonosság miatt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) \leq c, \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi) \geq c.$$

Ezért $f(\xi) = c$.

Bolzano tétel, következmény

Következmény. Ha f folytonos és $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, akkor f-nek van gyöke $[a, b]$-n: $\exists \xi$, hogy $f(\xi) = 0$.



Következmény. Ha f páratlan fokú polinom, akkor van valós gyöke.

Weierstrass I. tétel

$f : D_f \to \mathbb{R}$ folytonos. Fontos speciális eset:

$D_f = [a, b]$. Korlátos és zárt ($\equiv$ kompakt).

Tétel. (Weierstrass I. tétele)

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ekkor f korlátos.

Weierstrass I. tétel, bizonyítás

Indirekt. Tfh *felülről nem korlátos*: $\forall n$-hez $\exists x_n \epsilon [a, b]$: $f(x_n) > n$.

Mivel $a \le x_n \le b$ ezért az (x_n) sorozat korlátos.

Tehát $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata (B-W tétel), limese:

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = \xi.$$

$[a, b]$ zárt , ezért $\xi \epsilon [a, b]$. Itt f folytonos (sorozatfolytonos is):

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

A konstrukció szerint $f(x_{n_k}) > n_k$, ezért

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = +\infty. \qquad \downdownarrows$$

Weierstrass II. tétel

Tétel. (Weierstrass II. tétele)

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ekkor f felveszi infimumát és supremumát $[a, b]$-n.

Ez azt jelenti, hogy $\exists \xi_1$ és $\exists \xi_2$:

$$f(\xi_1) = \max\{f(x),\ x \epsilon [a, b]\},$$

$$f(\xi_2) = \min\{f(x),\ x \epsilon [a, b]\}.$$

Weierstrass II. tétel, bizonyítás

A maximum létezését igazoljuk.

$$H = \{f(x) : x \epsilon [a, b]\} = R_f.$$

Weierstrass I. tétel alapján H korlátos

$$\beta := \sup(H) < \infty.$$

Ekkor $\forall n$-re $\exists x_n$:

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta.$$

$a \leq x_n \leq b$ ezért az (x_n) sorozat korlátos.

Az (x_n) sorozat korlátos.

Tehát $\exists(x_{n_k})$ konvergens részsorozata (B-W tétel):

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

$[a,b]$ zárt, ezért $\xi\epsilon[a,b]$. Itt f folytonos (sorozatfolytonos is):

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Másrészt

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_{n_k}) \leq \beta, \quad \Longrightarrow \quad \beta = f(\xi) \quad \Longrightarrow \quad \beta\epsilon H.$$

Ezért valóban $\beta = \max(H)$.

A minimum létezését hasonlóan igazolhatjuk.