Differenciálegyenletek

2018. december 13.

Elsőrendű DE

Definíció. Az elsőrendű differenciálegyenlet általános alakja

$$y' = f(x,y),$$

ahol $f(x,y)$ adott kétváltozós függvény.

Minden $y = y(x)$ függvény, amire ez teljesül: a DE **megoldása**.

$y : I \to \mathbb{R}$, ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum,

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in I.$$

DE és **kezdeti érték** együtt: **Cauchy feladat**

$$y' = f(x,y) \qquad y(x_0) = y_0,$$

ahol x_0 és y_0 adott számok.

Nincs *általános megoldás*, amely tetszőleges $f(x,y)$ esetén alkalmazható.

Két megoldható alaptípus:

Szeparábilis = szétválasztható változójú. $f(x,y) = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(y)}$

Szeparábilis DE: $\boxed{y' = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(y)}}$.

Lineáris. $f(x,y) = ay + b, \qquad a = a(x),\ b = b(x)$

Lineáris DE: $\boxed{y' = ay + b}$.

Lineáris differenciálegyenlet

Elsőrendű DE: $y' = f(x, y)$.

Lineáris Differenciál Egyenlet általános alakja:

$$\boxed{y' = ay + b} \qquad a = a(x),\ b = b(x)$$

ahol $a(x)$, $b(x)$ adott függvények.

$$y' = ay + b$$

Ha $a, b \epsilon \mathbb{R}$, akkor már meg tudjuk oldani:

$$y' = ay + b \quad \Rightarrow \quad y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$$

A változókat szétválasztottuk.

$$\frac{(dy/dx)}{y + (b/a)} = a$$

Kiintegrálva

$$\ln|y + (b/a)| = ax + C.$$

A megoldás $y = -(b/a) + ce^{ax}$.

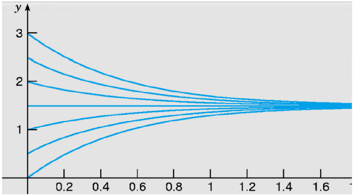
Példa. $y' = -2y + 3.$

$$y' = -2(y - \frac{3}{2}) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{(dy/dx)}{y - (3/2)} = -2$$

Kiintegrálva

$$\int \frac{1}{y - (3/2)} dy = \ln |y - (3/2)|, \qquad \int (-2) dx = -2x.$$

Az általános megoldás $y = \frac{3}{2} + ce^{-2x}$.



LDE

Lineáris Differenciál Egyenlet LDE **általános eset**:

$$y' = ay + b$$

ahol $a = a(x),\ b = b(x)$ ahol $a(x)$, $b(x)$ adott függvények.

$a = a(x)$ *és* $b = b(x)$ *esetén MÁSKÉPP.*

– Ha $b(x) \equiv 0$, akkor a DE *homogén*

– Ha $b(x) \neq 0$, akkor a DE *inhomogén*.

Homogén LDE

$y' = ay, \qquad a = a(x).$

Állítás.

A homogén LDE általános megoldása:

$$y(x) = ce^{A(x)}, \quad c \epsilon \mathbb{R}$$

ahol

$$A(x) = \int a(x) dx,$$

az a függvény egyik primitív függvénye.

Homogén LDE és kezdeti feltétel

A Cauchy feladat:

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Konkrét primitív függvényt használunk:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt.$$

Ekkor a kezdeti érték feladat megoldása

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(t)dt}.$$

Állandó együtthatós homogén LDE

Speciális eset:

$$y' = ay, \qquad y(x_0) = y_0$$

ahol $a(x) \equiv a$ konstans, és x_0, y_0 adott számok.

A Cauchy feladat megoldása

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Inhomogén LDE. $y' = ay + b$

Tétel. A LDE megoldásainak struktúrája:

1. Ha y_1 a homogén LDE mo-a és y_2 az inhomogén LDE mo-a

$$\Downarrow$$

$$y_1 + y_2 \text{ az } \underline{\text{inhomogén}} \text{ LDE mo-a.}$$

2. Ha y_1 és y_2 az inhomogén LDE mo-a

$$\Downarrow$$

$$y_1 - y_2 \text{ a } \underline{\text{homogén}} \text{ LDE mo-a}$$

Következmény

Ha a homogén egyenlet <u>általános</u> megoldása $y_{h,a}$.

Az inhomogén egyenlet <u>partikuláris</u> megoldása $y_{i,p}$.

Ekkor az *inhomogén egyenlet <u>általános</u>* megoldása

$$y_{i,a} = y_{h,a} + y_{i,p}$$

Feladat: Az inhomogén egyenlet EGYETLEN (tetszőleges) megoldása?

Inhomogén LDE. $y' = ay + b$

A homogén egyenlet megoldása $y = ce^{A(x)}$, ahol $c \epsilon \mathbb{R}$, $A' = a$.

Az inhomogén egyenlet megoldását így keressük:

$$y = u(x)e^{A(x)}, \qquad u = u(x) = ?$$

$(c \simeq u(x))$, konstans helyett függvény.

Ekkor a DE baloldala $y' = u'e^A + uA'e^A = u'\,e^A + u\,a\,e^A$.

Másrészt, a DE jobboldala $ay + b = a\,u\,e^A + b$.

Összehasonlítva a két egyenletet:

$$u'\,e^A + u\,a\,e^A = a\,u\,e^A + b$$

$$u'\,e^A + u\,a\,e^A = a\,u\,e^A + b$$

Ebből egyszerűsítve

$$u'e^A = b \quad \Rightarrow \quad u' = be^{-A} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx$$

Az inhomogén DE partikuláris mo-a: $y(x) = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}dx$

Az inhomogén DE általános megoldása:

$$y(x) = \underbrace{e^{A(x)}}\left(c + \underbrace{\int b(x)e^{-A(x)}dx}\right)$$

– az első tag a homogén egyenlet általános megoldása,

– a második az inhomogén egyenlet egy konkrét megoldása.

Egy példa

$y' = -xy - x. \qquad a(x) = -x, \quad b(x) = -x$

A megoldás több lépcsőben történik.

1. lépés A **homogén** egyenlet megoldása.

$$A(x) = \int a(x)dx = \int (-x)dx = \frac{-x^2}{2},$$

az általános megoldás

$$y_h(x) = ce^{\frac{-x^2}{2}}, \quad c \epsilon \mathbb{R}$$

$$y' = -xy - x$$

2. lépés Az **inhomogén** egyenlet megoldása. $y_{ih} = ue^{\frac{-x^2}{2}}$, $u = ?$

$$\begin{aligned} y'_{ih} &= u'e^{\frac{-x^2}{2}} + ue^{\frac{-x^2}{2}}(-x) \\ &= -xy - x = -x \cdot ue^{\frac{-x^2}{2}} - x \end{aligned}$$

Összehasonlítva:

$$u'e^{\frac{-x^2}{2}} + ue^{\frac{-x^2}{2}}(-x) = -x \cdot ue^{\frac{-x^2}{2}} - x \quad \Rightarrow \quad u(x) = -e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Az inhomogén egyenlet egyik megoldása.

$$y_{ih} = \left(-e^{\frac{x^2}{2}}\right) e^{\frac{-x^2}{2}} = -1$$

3. lépés Az **általános** megoldás.

Eddigi eredmények:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= ce^{\frac{-x^2}{2}}, \quad c\epsilon\mathbb{R} \\ y_{ih}(x) &= -1 \end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$\boxed{y(x) = ce^{\frac{-x^2}{2}} - 1 \qquad c\epsilon\mathbb{R}}$$

Ellenőrzés. $y(x) = ce^{\frac{-x^2}{2}} - 1 \qquad c \epsilon \mathbb{R}$

A DE baloldala:

$$y'(x) = ce^{\frac{-x^2}{2}}(-x)$$

A DE jobboldala:

$$-x \cdot y(x) - x = -x\left(ce^{\frac{-x^2}{2}} - 1\right) - x = -x \cdot ce^{\frac{-x^2}{2}}$$

Ezek valóban megegyeznek. $\surd$

Példa: $y' = -\frac{2}{x}\, y + 4x \qquad y(1) = 2$

Itt $a(x) = -\dfrac{2}{x}, \quad b(x) = 4x$

1. lépés A homogén egyenlet megoldása.

$$A(x) = \int_1^x a(t)dt = \int_1^x \left(-\frac{2}{t}\right) dt = -2\ln(x) = \ln(x^{-2}),$$

az általános megoldás

$$y_h(x) = ce^{\ln(x^{-2})} = \frac{c}{x^2}, \quad c\epsilon\mathbb{R}$$

$$y_h(x) = \frac{c}{x^2}, \quad c \epsilon \mathbb{R}$$

2. lépés Az inhomogén egyenlet megoldása. $y_{ih} = u \cdot \frac{1}{x^2}$, $u = ?$

Az általános képlet szerint

$$u(x) = \int b(x) e^{-A(x)} dx$$

Most tehát egy konkrét megoldásra

$$u(x) = \int 4x \cdot e^{2\ln(x)} dx = \int 4x^3 = x^4$$

Az inhomogén egyenlet egyik megoldása.

$$y_{ih} = x^4 \cdot \frac{1}{x^2} = x^2.$$

3. lépés Az általános megoldás.

Eddigi eredmények:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= \frac{c}{x^2}, \quad c \epsilon \mathbb{R} \\ y_{ih}(x) &= -x^2 \end{aligned}$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása

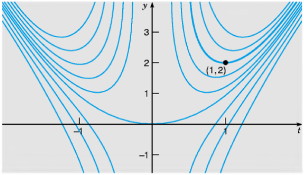
$$y_{alt}(x) = \frac{c}{x^2} + x^2.$$

Az általános megoldás: $y_{alt}(x) = \dfrac{c}{x^2} + x^2.$

4. lépés A kezdeti érték feladat megoldása

$$y(1) = c + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

A feladat megoldása $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{x^2} + x^2}$



Rezgőmozgás fizikai leírása

m tömegű részecske (rugó) az x tengely mentén mozog.

A t időpillanatban a kitérés: $x(t)$.

A mozgást $x = x_0$ -ból indul $t = 0$ időpontban.

A pillanatnyi sebesség: $\dot{x}(t)$, a pillanatnyi gyorsulás: $\ddot{x}(t)$.

A ható erők az alábbiak:

1. rugóerő: $-kx$ (a kitéréssel arányos, azzal ellentétes irányú),
2. közegellenállási erő: $-r\dot{x}$ (a pillanatnyi sebességgel arányos, azzal ellentétes irányú),
3. külső gerjesztés: $f(t)$ (pl. meglökjük időközönként)

A Newton-törvény szerint: az eredő erők összege

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + f.$$

Az $x(t)$ mozgást leíró differenciálegyenlet tehát

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f.$$

Ebben az esetben a független változó t, a függő változó pedig x.

Ha $f \equiv 0$ (szabad mozgás), akkor *homogén DE*-ről beszélünk,

Ha $f \neq 0$ (kényszermozgás), akkor *inhomogén DE*-t kapunk.

A homogén DE megoldását fogjuk meghatározni.

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \qquad x(t) = ?$$

Első lépésben keressük a megoldást $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban. Ekkor

$$x(t) = e^{\lambda t} \qquad / \cdot k$$

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \qquad / \cdot r$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \qquad / \cdot m.$$

A fenti öszefüggéseket öszeadva:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = ke^{\lambda t} + r\lambda e^{\lambda t} + m\lambda^2 e^{\lambda t} =$$

$$= e^{\lambda t}(m\lambda^2 + r\lambda + k) = 0 \qquad \forall t.$$

Ez csak akkor teljesülhet, ha

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldása

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4mk}}{2m}.$$

1. eset. $r^2 - 4mk > 0$

Ekkor $\exists \lambda_1, \lambda_2 \epsilon \mathbb{R}$ gyökök, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ekkor $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

A DE-nek két megoldása is van,

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \qquad x_2(t) = e^{\lambda_2 t},$$

és ezek tetszőleges lineáris kombinációja

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

is kielégíti az egyenletet. Mivel $\lambda_1, \lambda_2 < 0$, a megoldás exponenciális sebességgel tart 0-hoz.

2. eset. $r^2 - 4mk = 0$

Akkor a másodfokú egyenletnek kétszeres gyöke van, $\lambda_0 = -\dfrac{r}{2m}$.

Ekkor láttuk, hogy megoldás: $x_1(t) = e^{\lambda_0 t}$.

Belátjuk, hogy $w(t) = te^{\lambda_0 t}$ is megoldás.

$$\dot{w}(t) = e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 t e^{\lambda_0 t}$$
$$\ddot{w}(t) = \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + \lambda_0^2 t e^{\lambda_0 t},$$

így behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$m\ddot{w} + r\dot{w} + kw = e^{\lambda_0}\{t(m\lambda_0^2 + r\lambda_0 + k) + 2m\lambda_0 + r\} \quad \equiv \quad 0.$$

Az általános megoldás ebben az esetben

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_0 t} + c_2 t e^{\lambda_0 t}, \qquad c_1, c_2 \epsilon \mathbb{R},$$

és mivel $\lambda_0 < 0$, ezért ez is exponenciálisan lecseng.

3. eset. $r^2 - 4mk < 0$

Akkor nincs valós gyöke a másodfokú egyenletnek. Formálisan azt írhatjuk, hogy

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{-\nu^2},$$

ahol:

$$-\nu^2 = \frac{r^2 - 4mk}{4m^2}.$$

Két megoldás adódik:

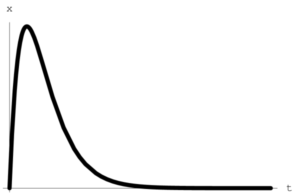
$$v_1(t) = e^{-\mu t}\cos(\nu t)$$

$$v_2(t) = e^{-\mu t}\sin(\nu t)$$

Ezek valóban megoldások. Behelyettesítéssel ellenőrizhető.

Fizikai interpretáció. [1-2.] eset.

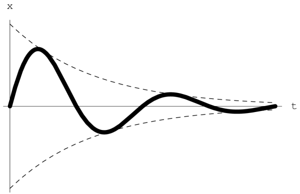
Ha $r^2 - 4mk \geq 0$, ekkor $r \geq \sqrt{4mk}$. Ez azt jelenti, hogy olyan nagy a közegellenállás, hogy a rugó kitérés exponenciálisan csökken.



Nagy a közegellenállás: a rugó kitérése exponenciálisan lecseng.

[3.] eset. $r < \sqrt{4mk}$

Akkor kicsi a közegellenállás, és a rugó oszcilláló mozgást fog végezni.



Kicsi a közegellenállás: a rugó csillapított rezgőmozgást végez.