

IDŐSOROK SZTOCHASZTIKUS MODELLJEI

VÁGÓ ZSUZSANNA

(Oktatási segédlet)

Budapest

Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem

Statisztika Tanszék

Tartalom

1	Alapfogalmak	5
1.1	Sztochasztikus folyamatok	5
1.2	Fehér zaj folyamat	7
1.3	Egy példa	8
1.4	Nagy számok törvényei	10
2	Idősorok speciális modelljei	12
2.1	Lineáris szűrők	12
2.2	Bolyongási folyamat	13
2.3	AR folyamatok	14
2.4	MA folyamatok	16
2.5	ARMA folyamatok	19
2.6	ARIMA folyamatok	21
3	Stacionárius folyamatok reprezentációja	22
3.1	Herglotz tétel	22
3.2	Folytonos spektrum	23
3.3	Diszkrét spektrum	27
4	Paraméterbecslés	31
4.1	AR paraméterek legkisebb négyzetes becslése	31
4.2	ARMA folyamat maximum likelihood identifikációja	35
4.3	ARMA folyamatok előrejelzése	42

	3
5 Többdimenziós idősorok	43
5.1 Állapottér reprezentáció	44
5.2 Többdimenziós ARMA folyamatok	47
6 Nem-stacionárius modellek	48
6.1 Integrált és kointegrált idősorok	49
6.2 A kointegrációs tér ML becslése	50
6.3 Hosszú távú modellek	50

Bevezetés

Ennek a jegyzetnek az a célja, hogy a IV. éves "Idősorok sztochasztikus modelljei" című tantárgy előadásaihoz kapcsolódóan olyan írásos anyagot adhassunk, amely megfelelő áttekintést ad a sztochasztikus idősorelemzéshez. Így a jegyzet részben több, részben kevesebb, mint az előadások anyaga. Az áttekinthetőség kedvéért igyekszünk tömören fogalmazni, az előadások folyamán fogunk kitérni a részletekre. A jegyzetben megadjuk azokat a referenciákat, ahol az egyes témák iránt érdeklődők részletesebb leírást találhatnak. Az idősorok sztochasztikus vizsgálatával foglalkozó könyvek közül legelőször a klasszikusnak számító Box-Jenkins könyvet említjük [?]. Közgazdasági szakemberek számára igen hasznos az Éltető-Meszéna-Ziermann könyv [?], míg a matematikai érdeklődésűek számára a Tusnády G. és Ziermann M. szerkesztette könyvet [?] ajánljuk.

A II. éves valószínűségszámítás és statisztika tantárgyakhoz folytatásaként sztochasztikus megközelítésben vizsgáljuk az idősorokat. Ez azt jelenti, hogy a kapott adatokra illesztett modellbe már eleve beépítünk véletlen hatásokat. Tehát nem csak azt fogadjuk el, hogy az adataink mérési vagy mintavételezési hibákat tartalmaznak, hanem a vizsgált jelenséget eleve 'bizonytalan'-nak tekintjük. Természetesen a feltételezett sztochasztikus tulajdonság igen sokféle lehet. Célunk ezeknek a megközelítéseknek a bemutatása, az idő rövideje miatt csak dióhéjban.

A kurzus folyamán azt is szeretnénk bemutatni, hogy a gyakorlatban hogyan végezhetjük el egy adott számsor kiértékelését. Az előadásokon megismert eljárások számítógépes megvalósítását az SPSS programcsomag segítségével fogjuk bemutatni. Sok egyéb statisztikai programcsomag létezik még ilyen feladatok megoldására, ezek későbbi alkalmazásához nagy segítséget nyújt az SPSS - mint egyik lehetőség - ismerete.

1 Alapfogalmak

1.1 Sztochasztikus folyamatok

*Sztochasztikus folyamat*nak nevezzük valószínűségi változók egy sorozatát. Pontosabban, legyen adott valamilyen T indexhalmaz, és tekintjük az $\{x_t, t \in T\}$ valószínűségi változók halmazát. Gazdasági folyamatok esetén az indexhalmaz diszkrét pontokból áll, gyakran a pozitív egész számok egy részhalmaza. Műszaki problémák vizsgálatakor előfordulnak folytonos paraméterű sztochasztikus folyamatok is, ezekkel most nem foglalkozunk. Az $\{x_t, t \in T\}$ folyamatot szokás *elméleti idősor*-nak is nevezni.

Természetesen ezeket a valószínűségi változókat nem "látjuk", a T paraméterhalmaz minden pontjában egy megfigyelésünk van a megfelelő változóra. Ez a megfigyeléssorozat a folyamat *realizációja*. A megfigyelt folyamatot *empírikus idősor*nak is nevezzük. Gyakran a tényleges paraméterhalmaz egy részére vannak csak megfigyeléseink. Ezeket a realizációkat *parciális realizációnak* hívjuk.

Az elméleti idősor pontos matematikai leírását az $\{x_t, t \in T\}$ folyamat összes véges dimenziós eloszlásának megadásával végezhetnénk el. A gyakorlatban ez azonban nehezen oldható meg, így a modellalkotásban azokat a sztochasztikus folyamatokat részesítjük előnyben, amelyek kevesebb jellemzővel is leírhatók. A legfontosabb elméleti momentumok, amelyekkel foglalkozni fogunk a következők:

- várható érték függvény:

$$m(t) \triangleq \mathbb{E}(x_t),$$

- szórásnégyzet-függvény:

$$\sigma^2(t) \triangleq D^2(x_t) = \mathbb{E}(x_t - m(t))^2,$$

- autokovariancia-függvény:

$$\text{Cov}(t, s) \triangleq \mathbb{E}(x_t - m(t))(x_s - m(s)).$$

- autokorrelációs-függvény:

$$\rho(t, s) \triangleq \frac{\text{Cov}(t, s)}{\sigma(t)\sigma(s)}.$$

Matematikailag könnyebben kezelhetőek, és emiatt különösen fontosak azok az idősorok, amelyek eltolás-invariánsak.

Definíció 1.1 *Egy sztochasztikus folyamatot (erős értelemben) stacionárius folyamatnak nevezünk, ha tetszőleges $k \geq 1$ esetén a k -dimenziós eloszlások eltolás-invariánsak. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges t_1, \dots, t_k , indexhalmaz esetén, az $(x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$ és $(x_{t_1+h}, \dots, x_{t_k+h})$ k -dimenziós valószínűségi változók eloszlása megegyezik, minden $h \in \mathbb{N}$ mellett.*

Természetesen a gyakorlatban általában nem remélhetjük, hogy az összes véges dimenziós eloszlás esetén ellenőrizhető, vajon eltolás-invariáns-e. Bevezetjük a következő definíciót:

Definíció 1.2 *Egy sztochasztikus folyamatot gyengén stacionárius folyamatnak nevezünk, ha első és második momentuma eltolásinvariáns, azaz*

$$m(t) = m, \quad \text{Cov}(t, s) = \text{Cov}(t - s).$$

Ez azt jelenti, hogy várható értéke konstans és kovarianciafüggvénye csak az időeltolódástól függ.

A kétfajta stacionaritás közötti kapcsolat könnyen látható. Ha egy erősen stacionárius idősornak létezik második momentuma, akkor gyenge értelemben is stacionárius. Általában ez a reláció nem fordítható meg. Kivétel például az az eset, amikor feltesszük, hogy a valószínűségi változók együttesen normális eloszlásúak. Ekkor a gyenge stacionaritásból következik az erős stacionaritás, hiszen a normális eloszlást első két momentuma egyértelműen meghatározza.

Gyengén stacionárius folyamat autokorrelációs függvénye

$$\rho(h) = \frac{\text{Cov}(h)}{\text{Cov}(0)} = \frac{\text{Cov}(h)}{\sigma^2}.$$

Ez páros függvény, melyre $|\rho(h)| \leq 1$.

A gyakorlatban a fenti jellemzőket a minta alapján kell meghatározni. Tekintsünk tehát egy gyengén stacionárius idősort és tegyük fel, hogy ennek egy x_1, \dots, x_N realizációjával dolgozunk. Feltesszük, hogy a közös várható érték 0. Ekkor a minta alapján a $C(k)$ kovariancia becslése a következő :

$$\hat{C}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k}.$$

Speciálisan tehát

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{C}(0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N x_t^2.$$

Az autokorrelációs együttható $\hat{\rho}_k$ becslése:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k}}{(\sum_{t=1}^{N-k} x_t^2)^{1/2} (\sum_{t=1}^{N-k} x_{t+k}^2)^{1/2}}$$

Ha az idősor várható értéke nem 0, akkor a fenti formulák kicsit bonyolultabbak lesznek, x_t helyett az $x_t - \bar{x}$ mennyiségekkel kell számolni. A $\hat{C}(k)$ becsléseket *empirikus autokovarianciáknak* hívjuk, a $\hat{\rho}_k$ mennyiségeket pedig *empirikus autokorrelációs együtthatóknak*. Ezeket a korrelációkat k függvényében ábrázolva az idősor *korrelogramját* kapjuk. Egy-egy ilyen ábra gyakran hasznos felismerésekre vezetheti a modellezőt. Ahhoz azonban, hogy kellő alaposággal értékelhessük a korrelogram alapján kapott információkat ismernünk kell a speciális típusú folyamatok korrelogramjának törvényszerűségeit. Ha például egy stacionárius idősor tagjai korrelálatlanok, akkor $\rho_0 = 1$ és $\rho_k = 0$ ha $k \neq 0$. Így nagy N esetén valamennyi $k \neq 0$ -ra $\hat{\rho}_k$ 0-hoz tart.

Definíció 1.3 *Egy sztochasztikus folyamat Markov folyamat, ha a*

$$E(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) = E(x_t | x_{t-1}).$$

A fenti tulajdonság szavakban így fogalmazható meg: ha az idősor értéke a t -dik időpontban x , akkor az, hogy a $t + 1$ -dik időpillanatra milyen állapotba megy át nem függ mástól, mint x -től és egy véletlen α_t tényezőtől, ami az idősor múltjától független. Ezek az α_t -k független valószínűségi változók.

Az (x_t) Markov folyamatot *Gauss-Markov folyamatnak* hívjuk, ha a valószínűségi változók normális eloszlásúak.

1.2 Fehér zaj folyamat

Stacionárius Markov folyamatra a legegyszerűbb példa a fehér zaj folyamat.

Definíció 1.4 Egy (e_t) folyamatot fehér zaj-nak hívunk, ha a sorozat független, azonos eloszlású valószínűségi változókból áll, melyek várható értéke 0, és szórása véges.

Könnyen látható, hogy a fenti folyamat gyenge és erős értelemben is stacionárius. Valóban, kovarianciafüggvénye így írható:

$$\text{Cov}(k) = E(e_{t+k}e_t) = Ee_{t+k} Ee_t = 0, \quad \text{ha } k > 0,$$

autokorrelációs függvénye pedig

$$\rho(k) = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

Gyakran feltesszük még azt is, hogy a fehér zaj normális eloszlású valószínűségi változókból áll.

1.3 Egy példa

Tegyük fel, hogy az (x_t) idősor eleget tesz az alábbi rekurzióknak:

$$x_{t+1} = \alpha x_t + e_t, \quad x_0 = \xi, \quad (1.1)$$

ahol α valós szám, (e_t) normális eloszlású fehér zaj σ szórással, mely ξ -től független.

Elsőként belátjuk a Markov tulajdonság teljesülését:

$$E(x_{t+1} \mid x_t, x_{t-1}, \dots) = E(\alpha x_t + e_t \mid x_t, x_{t-1}, \dots) =,$$

ami a feltételes várható érték linearitása miatt így folytatható:

$$= \alpha E(x_t \mid x_t, x_{t-1}, \dots) + E(e_t \mid x_t, x_{t-1}, \dots).$$

A fenti összeg első tagjában x_t benne van a feltételi halmazban, így a feltételes várható érték önmaga. A második tagban pedig e_t független a feltételtől, ezért a feltételes várható érték a közönséges várható értékkel egyezik meg, ami feltevésünk szerint 0. Végül azt kapjuk tehát, hogy

$$E(x_{t+1} \mid x_t, x_{t-1}, \dots) = \alpha x_t,$$

s ezzel beláttuk, hogy (x_t) Markov tulajdonságú.

Megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett lesz a fenti idősor gyengén stacionárius. Az (1.1) egyenletből fokozatos behelyettesítéssel az következik, hogy

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \alpha x_t + e_t = \alpha(\alpha x_{t-1} + e_{t-1}) + e_t = \dots \\ &= e_t + \alpha e_{t-1} + \dots + \alpha^t e_0 + \alpha^{t+1} x_0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Várható értéket véve azt kapjuk, hogy

$$Ex_{t+1} = \alpha^{t+1} Ex_0,$$

hiszen a fehér zaj 0 várható értékű. A fenti kifejezés csak akkor lesz t -től független, ha $Ex_0 = 0$, és ekkor $Ex_t \equiv 0$.

Vizsgáljuk meg a szórásnégyzet függvényét. (1.2)-ből azt kapjuk a fehér zaj függetlensége miatt, hogy

$$Ex_{t+1}^2 = \sigma^2(1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2t}) + \alpha^{2(t+1)} Ex_0^2.$$

Ugyanígy felírhatjuk x_t szórásnégyzetét is:

$$Ex_t^2 = \sigma^2(1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2t-2}) + \alpha^{2t} Ex_0^2.$$

A gyenge stacionaritáshoz *szükséges*, hogy $Ex_{t+1}^2 = Ex_t^2$ teljesüljön. A fenti két egyenletet kivonva egymásból azt kapjuk, hogy

$$\alpha^{2t} Ex_0^2 = \sigma^2 \alpha^{2t} + \alpha^{2t+2} Ex_0^2,$$

ahonnan formálisan azt írhatjuk, hogy

$$Ex_0^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}.$$

Mivel egy valószínűségi változó szórásnégyzetét írtuk fel, ennek akkor van értelme, ha

$$|\alpha| < 1.$$

Ekkor a szórásnégyzet függvény konstans lesz, és pedig

$$Ex_t^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}.$$

Nézzük meg, ez a feltétel *elegendő*-e. Tegyük fel, hogy $|\alpha| < 1$, és számoljuk ki a folyamat autokovariancia függvényét, $E(x_{t+k}x_t)$ -t. A (1.2) kifejezéshez hasonlóan azt írhatjuk, hogy

$$x_{t+k} = \alpha^k x_t + e_{t+k-1} + \alpha e_{t+k-2} + \dots + \alpha^{k-1} e_t.$$

A fenti egyenletet x_t -vel szorozva, majd várható értéket véve azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}(x_{t+k}x_t) = \alpha^k \mathbb{E}x_t^2 + \mathbb{E}(x_t(e_{t+k-1} + \alpha e_{t+k-2} + \dots + \alpha^{k-1}e_t)).$$

A jobboldal második tagja független tényezőkből áll, várható értéke 0. Ezért

$$\mathbb{E}(x_{t+k}x_t) = \alpha^k \mathbb{E}x_t^2 = \alpha^k \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2},$$

ami valóban csak k -tól függ.

A folyamat autokovarianciafüggvénye tehát így írható:

$$C(k) = \mathbb{E}(x_{t+k}x_t) = \begin{cases} \alpha^k \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} & \text{ha } k > 0 \\ \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} & \text{ha } k = 0 \\ \alpha^{-k} \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2} & \text{ha } k < 0 \end{cases} .$$

Beláttuk tehát a következő tétel egyik állítását; a másik állítás igazolása túlmutat a jegyzet keretein.

Tétel 1.1 *Egy 0 várható értékű (x_t) folyamat pontosan akkor stacionárius Gauss-Markov folyamat, ha létezik olyan $|\alpha| < 1$ valós szám és létezik (e_t) normális eloszlású fehér zaj, hogy*

$$x_{t+1} = \alpha x_t + e_t$$

teljesül.

1.4 Nagy számok törvényei

Az idősorelemzésben többször használni fogjuk azokat az összefüggéseket, amelyek valószínűségi változók sorozatának bizonyos aszimptotikus tulajdonságait írják le. Most felsoroljuk a témakör legalapvetőbb tételeit.

Nagy számok Bernoulli-féle törvénye.

Tekintsünk egy A véletlen eseményt, melynek valószínűsége p . Erre az eseményre

független kísérleteket végzünk a $t = 1, 2, \dots$ időpontokban. Az x_t valószínűségi változó értéke legyen 1, ha a t -dik kísérletben A bekövetkezik, egyébként pedig 0. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \longrightarrow p \quad \text{sztochasztikusan}$$

azaz minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ melyre

$$P\left(\left|\frac{\sum_{t=1}^n x_t}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta$$

ha n elég nagy.

Nagy számok erős törvénye (Borel tétel).

Legyen (x_t) független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyek negyedik momentuma létezik. Legyenek $m = \mathbb{E}x_t$, $\sigma^2 = \mathbb{E}(x_t - m)^2$. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \longrightarrow m \quad 1 \text{ vsz-gel}$$

Statisztika alaptétele. (Glivenko tétel)

Legyen (x_t) független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyek közös eloszlásfüggvénye $F(x)$. Legyen $F_N(x)$ az x_1, \dots, x_N megfigyelésen alapuló tapasztalati eloszlásfüggvény. Ekkor

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_N(x) - F(x)| \longrightarrow 0 \quad 1 \text{ vsz-gel}$$

Centrális határeloszlástétel

Legyen (x_t) független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyekre $m = \mathbb{E}x_t$, $\sigma^2 = \mathbb{E}(x_t - m)^2$. Jelölje

$$y_t = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - nm}{\sqrt{n}\sigma}.$$

Ekkor y_t eloszlása $t \rightarrow \infty$ esetén a standard normális eloszláshoz tart.

Emlékeztetünk rá, hogy az e valószínűségi változó *standard normális eloszlású*, ha sűrűségfüggvénye

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2 Idősorok speciális modelljei

2.1 Lineáris szűrők

Legyen (e_t) egy sztochasztikus folyamat, és legyen (h_j) , $j \geq 0$ valós számsorozat, melyre

$$\sum_{j=0}^{\infty} h_j^2 < \infty.$$

Képezzük az alábbi folyamatot:

$$x_t \triangleq \sum_{j=0}^{\infty} h_j e_{t-j} \quad (2.1)$$

A szakirodalomban szokásos elnevezéssel azt mondjuk, hogy az (e_t) folyamatot a (h_j) súlyokkal megadott lineáris szűrőn engedjük át; a szűrő inputja (e_t) (bemenő jel), outputja (x_t) (kimenő jel).

Speciálisan, ha (e_t) σ szórású fehér zaj, akkor a x_t 0 várható értékű, és véges szórású lesz. Valóban,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}x_t &= \sum_{j=0}^{\infty} h_j \mathbb{E}e_{t-j} = 0 \\ D^2(x_t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h_j h_k \mathbb{E}(e_{t-j} e_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2. \end{aligned}$$

A következő fejezetekben szereplő modellek (AR, MA, ARMA) ennek az általános sémának speciális esetei.

Vezessük be az idősorok körében az időeltolás z operátorát. Legyen

$$zx_t \triangleq x_{t-1}.$$

Értelmezhetjük ennek az operátornak a hatványait:

$$z^j x_t = x_{t-j},$$

továbbá polinomjait is. Ha például

$$A(s) = 1 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_p s^p$$

egy valós együtthatós polinom, akkor az $A(z)$ operátort így értelmezzük:

$$A(z)x_t = x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p}.$$

Ekkor a

$$H(z) \triangleq \sum_{j=1}^{\infty} h_j z^j$$

jelöléssel a fenti (2.1) szűrővel definiált folyamat így írható:

$$x_t = H(z)e_t.$$

2.2 Bolyongási folyamat

Tegyük fel, hogy az x_t folyamatot az alábbi egyenlet írja le

$$x_t = x_{t-1} + e_t, \quad x_0 = 0,$$

ahol (e_t) egy m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű fehér zaj folyamat. Ekkor egymás utáni behelyettesítésekkel azt kapjuk, hogy

$$x_t = \sum_{i=1}^t e_i,$$

és emiatt $Ex_t = tm$, $D^2x_t = t\sigma^2$, tehát a bolyongás nem lesz stacionárius folyamat. Figyeljük meg azonban, hogy az első differenciák sorozata, $x_t - x_{t-1}$, teljesen véletlen folyamat, tehát stacionárius.

Egy véletlen bolyongást olyan folyamatnak tekinthetünk, ami *pontosan* emlékszik az előző értékre, de csak arra. Egy véletlen faktortól eltekintve minden érték az előzővel egyezik meg.

Néhány megjegyzés bolyongásokkal kapcsolatban:

- Fontos idősor, bár nem tudunk túl sokat mondani róla.
- Definíció szerint véletlen zajok összege. Ha a zaj várható értéke 0 - mint általában -, nem lesz benne trend. Gyakran eltávolodik azonban a hosszú távú átlagtól.
- Ha az átlag 0, akkor a következő időszak legjobb becslése a legutóbbi megfigyelés.

Példa: részvények árai. Ha megnézzük a részvényárak alakulását, akkor azt tapasztaljuk, hogy az adatok az átlag körül ingadoznak látható szabályszerűség nélkül. Ez az adatsor nem stacionárius, de a differenciákat tekintve fehér zaj folyamatot kapunk. Itt szemléletesen érzékeltethető az a tény, hogy az egy lépéses predikció (előrejelzés) nem lehet jobb, mint a legutolsó érték. Ha ugyanis a korábbi adatokból azt tudnánk jóslani, hogy felmegy a részvények ára, akkor mások is erre a következtetésre jutnának, tehát elkezdődne a részvények felvásárlása. Amitől persze egy idő múlva biztosan lefele menne a részvények ára. Ebből következik, hogy az esetek döntő többségében *minden* jó előrejelzési módszer szerint - ami az addig hozzáférhető adatokon alapul - a legjobb előrejelzés az, hogy a részvények ára változatlan fog maradni.

Bár az általános bolyongásról nem tudunk nagyon sokat mondani, az alábbi speciális eset vizsgálata potosan elvégezhető. Nem tartozik a szorosán vett tananyagunk körébe, így akiket érdekel ez az (egyébként szép) témakör, Feller [?] könyvében utánanézhhetnek.

Speciális eset. Tekintsük azt az esetet, amikor a fehér zaj olyan valószínűségi változókból áll, amelyek csak 1 és -1 értékeket vehetnek fel, $1/2 - 1/2$ valószínűséggel. Ekkor többek között igaz a *Pólya tétel*, amely azt mondja ki, hogy a kiindulási pontba 1 valószínűséggel végtelen sokszor vissza fog térni a bolyongás. Ráadásul, ezeknek a visszatérési időknak az eloszlása is megadható. Azt is ki tudjuk számolni, hogy átlagosan mennyi időt tölt a folyamat egy adott intervallumban.

2.3 AR folyamatok

Definíció 2.1 Azt mondjuk, hogy (x_t) p -ed rendű autoregresszív folyamat, ha

$$x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} = e_t \quad (2.2)$$

ahol (e_t) egy σ szórású fehér zaj. Ezt röviden úgy jelöljük, hogy (x_t) $AR(p)$ folyamat.

A fenti folyamathoz hozzárendelt operátor a következő:

$$A(z) = 1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_p z^p,$$

ahol z az egységnyi időeltolás operátora.

Tétel 2.1 A (2.2) egyenlettel definiált folyamat csak akkor stacionárius (megfelelő indítás esetén), ha az $A(s)$ komplex változós polinomra teljesül, hogy

$$A(s) \neq 0 \quad \text{ha } |s| \leq 1.$$

Bizonyítás. (Vázlat) Az alapgondolat a következő. Ha $A(s)$ gyökei különbözőek, akkor $1/A(s)$ elemi törtekre bontható:

$$\frac{1}{A(s)} = \sum_{k=1}^p \frac{A_k}{1 - \beta_k s} = \sum_{k=1}^p A_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} \beta_k^j s^j \right), = \sum_{j=1}^{\infty} s^j \left(\sum_{k=1}^p A_k \beta_k^j \right),$$

ahol $|\beta_k| < 1$ (ui. ezek a gyökök reciprokai). Így a jobboldalon szereplő sor abszolút konvergens.

Határozzuk meg (x_t) autokovarianciáit. Legyen

$$c_k := E(x_{t+k}x_t), \quad k \geq 0,$$

nyilván $c_{-k} = c_k$. Ha megszorozzuk a (2.2) egyenlet mindkét oldalát x_{t-k} -val, $0 \leq k \leq p$, és várható értéket veszünk, akkor az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} c_0 + \alpha_1 c_1 \dots + \alpha_p c_p &= \sigma^2 \\ c_1 + \alpha_1 c_0 \dots + \alpha_p c_{p-1} &= 0 \\ &\vdots \\ c_k + \alpha_1 c_{k-1} \dots + \alpha_p c_{p-k} &= 0 \\ &\vdots \\ c_p + \alpha_1 c_{p-1} \dots + \alpha_p c_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ez $p+1$ lineáris összefüggés az első $p+1$ autokovarianciára. A fenti lineáris egyenletrendszert *Yule - Walker egyenletrendszernek* hívják. A megoldhatóság feltétele, hogy $A(s)$ -nek ne legyen egységnyi abszolútértékű gyöke. $k > p$ esetén az autokovarianciák az alábbi rekurzióval számolhatóak:

$$c_k = -\alpha_1 c_{k-1} - \dots - \alpha_p c_{k-p}.$$

Speciális eset. Ha $p = 1$, akkor a Yule-Walker egyenletrendszer két egyenletből áll:

$$\begin{aligned} c_0 + \alpha c_1 &= \sigma^2 \\ c_1 + \alpha c_0 &= 0, \end{aligned}$$

aminek megoldása már jól ismert:

$$c_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}, \quad c_1 = -\alpha \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2},$$

és általában $c_k = (-\alpha)^k \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}$, $k > 0$ esetén.

2.4 MA folyamatok

Definíció 2.2 Az (x_t) folyamatot q -ad rendű mozgóátlag folyamatnak hívjuk, ha

$$x_t = \beta_0 e_t + \dots + \beta_q e_{t-q} \quad (2.3)$$

ahol β_j valós konstansok, (e_t) pedig 0 várható értékű fehér zaj egységnyi szórással. Azt mondjuk, hogy (x_t) MA(q) folyamat.

Nyilvánvalóan egy MA(q) folyamat stacionárius lesz, gyenge és erős értelemben egyaránt.

Könnyen látható, hogy a fenti folyamat autokovariancia-függvényét így számolhatjuk ki:

$$c_k = \begin{cases} \sum_{j=0}^q \beta_j^2 & k = 0 \\ \sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k} & 0 < k \leq q \\ 0 & k > q \\ c_{-k} & k < 0 \end{cases} .$$

Tehát $(\beta_0, \dots, \beta_q)$ -ből (c_0, c_1, \dots, c_q) egyértelműen meghatározható. Visszafelé ez nem egyértelmű, ezt mutatja be az alábbi egyszerű példa.

Példa. Tekintsük az alábbi stacionárius folyamatokat:

$$x_t = e_t + \beta e_{t-1} \quad (2.4)$$

$$y_t = \beta e_t + e_{t-1}. \quad (2.5)$$

Ha feltesszük, hogy $\beta \neq 1$, akkor a két folyamat nyilván különböző lesz. Ennek ellenére, mindkét folyamat autokovariancia függvénye ugyanaz, és pedig

$$c_k = \begin{cases} 1 + \beta^2 & k = 0 \\ \beta & k = 1 \\ 0 & k > 1 \\ c_{-k} & k < 0 \end{cases}.$$

A háttérben az áll, hogy csak az egyik esetben tudjuk csak a fehér zajt visszaállítani, β értékétől függően. (2.4)-ből e_t -t kifejezve, majd ezt újra felhasználva a következő formális sorfejtést kapjuk:

$$\begin{aligned} e_t &= x_t - \beta e_{t-1} = x_t - \beta(x_{t-1} - \beta e_{t-2}) = \\ &= \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta^k x_{t-k}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Hasonlóan, (2.5)-ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} e_t &= \frac{1}{\beta}(y_t - e_{t-1}) = \frac{1}{\beta}y_t - \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}y_{t-1} - e_{t-2}\right) = \\ &= \dots = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\beta^k} y_{t-k}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Így az (e_t) idősor kétfajta formális előállítását kaptuk. Látható, hogy a (2.6) lineáris szűrő pontosan akkor értelmezhető, ha $\sum_{k=0}^{\infty} \beta^{2k}$ konvergens, azaz ha $|\beta| < 1$. Hasonlóan, a (2.7) lineáris szűrő pontosan akkor értelmezhető, ha $|\beta| > 1$. Tehát bár (x_t) és (y_t) autokovarianciafüggvénye megegyezik, de csak az egyikből tudjuk a fehér zajt rekonstruálni, β értékétől függően.

Definíció 2.3 Egy (x_t) MA(q) folyamatot invertálhatónak nevezünk, ha $B(s)$ gyökei az egységkörön kívül vannak.

Meghatározzuk most általános esetben, hogy adott (c_0, c_1, \dots, c_q) sorozathoz hogyan tudunk MA(q) sorozatokat hozzárendelni, melyeknek éppen ezek az autokovarianciái.

Lemma 2.1 Adott (c_0, c_1, \dots, c_q) -hoz akkor és csak akkor létezik olyan $(\beta_0, \dots, \beta_q)$ melyekre

$$c_k = \beta_0 \beta_k + \beta_1 \beta_{k+1} + \dots + \beta_{q-k} \beta_q, \quad k = 0, \dots, q \quad (2.8)$$

ha egyrészt $c_0 > 0$, másrészt a

$$\Gamma(s) := c_0 + \sum_{k=1}^q c_k \left(s^k + \frac{1}{s^k} \right)$$

komplex függvénynek az egységkörön csak páros multiplicitású gyöke van.

Bizonyítás. (Vázlat.) A bizonyítás azon alapul, hogy az adott feltétel mellett $s^q \Gamma(s)$ valós polinomok szorzatára bontható:

$$s^q \Gamma(s) = B(s) s^q B\left(\frac{1}{s}\right),$$

ahol a $B(s)$ q -ad fokú polinom együtthatói a megfelelő β számok. Ez abból látható, hogy a lemma feltételei esetén ha s_0 gyöke az $s^q \Gamma(s)$ polinomnak, akkor $1/s_0$ is az.

Lemma 2.2 $\Gamma(s)$ -nek pontosan akkor van egységkörön csak páros multiplicitású gyöke, ha

$$\Gamma(e^{i\lambda}) \geq 0 \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

azaz $\Gamma(s)$ a komplex egységkörön nemnegatív valós értékeket vesz fel.

Tétel 2.2 (Wold, 1954)

1.) Ha valamely (c_0, c_1, \dots, c_q) -hoz létezik olyan $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_q)$, melyre (2.8) teljesül, akkor található olyan (x_t) MA(q) folyamat, melyre $E(x_{t+k}x_t) = c_k$, $k = 0, \dots, q$.

2.) Ha valamely stacionárius (x_t) Gauss folyamatra teljesül az, hogy

$$c_k = E(x_{t+k}x_t) = 0, \quad k \geq q,$$

akkor ez a folyamat MA(q).

Bizonyítás. A tétel első része az eddig elmondottakból következik.

A második részhez tekintsünk egy (x_t) stacionárius folyamatot, melyre $E(x_{t+k}x_t) = 0$, ha $k > q$. A 2.2 lemma feltételének teljesülését fogjuk igazolni. Legyen $\omega \in [-\pi, \pi]$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &\leq E \frac{1}{2n} \left| \sum_{t=-n}^n x_t e^{it\omega} \right|^2 = \frac{2}{2n} \sum_{t=-n}^n \sum_{\tau=-n}^n E(x_t x_\tau) e^{i(t-\tau)\omega} = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{t=-n}^n \sum_{k=t-n}^{t+n} c_k e^{ik\omega} = \sum_{k=-q}^q \frac{2n+1-|k|}{2n} c_k e^{ik\omega}. \end{aligned}$$

A jobboldal $\Gamma(e^{i\omega})$ -hoz tart, ami ezért tehát nemnegatív. Így az előző lemma alapján a tételt beláttuk.

A fenti tételből egyszerűen következik az alábbi:

Következmény 2.1 *Ha (x_t) és (y_t) független MA folyamatok, rendjük q_1 és q_2 , akkor $(x_t + y_t)$ is MA folyamat, és rendje $q = \max(q_1, q_2)$.*

Az 2.1. Lemma bizonyításában elmondottak alapján $B(s)$ meghatározása úgy történik, hogy az $s^q \Gamma(s)$ függvény gyökpárjait tetszőlegesen csoportosítva szorzattá bontjuk:

$$s^q \Gamma(s) = B(s) \left(s^q B\left(\frac{1}{s}\right) \right).$$

Ebből is látható, hogy miért nem egyértelmű az autokovarianciák alapján a MA együtthetők meghatározása.

2.5 ARMA folyamatok

Definíció 2.4 *Az (x_t) stacionárius folyamat ARMA (autoregresszív mozgóátlag) folyamat, ha léteznek (α_i) és (β_j) számok, hogy*

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + \beta_0 e_t + \beta_1 e_{t-1} + \dots + \beta_q e_{t-q}, \quad (2.9)$$

ahol (e_t) egységnyi szórású fehér zaj. Azt mondjuk, hogy (x_t) ARMA(p, q) folyamat.

A z időeltolás operátorral a fenti egyenlet így írható:

$$A(z)x_t = B(z)e_t$$

ahol

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_p z^p \\ B(z) &= \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_q z^q. \end{aligned}$$

Az eddig elmondottakból következik az alábbi tétel:

Tétel 2.3 *1). Ha $A(z)$ gyökei az egységkörön kívül vannak, akkor létezik a fenti egyenlettel definiált ARMA folyamat, és ennek létezik $MA(\infty)$ előállítása.*

2). Ha $B(z)$ gyökei az egységkörön kívül vannak, akkor (x_t) invertálható és létezik $AR(\infty)$ előállítása.

Az ARMA felírás nem egyértelmű, hiszen az (2.9) egyenlet mindkét oldalára alkalmazva a z operátor egy r -ed fokú $P(z)$ polinomját, akkor egy másik leírást kapunk. Nevezetesen egy ARMA($p+r, q+r$) reprezentációt:

$$\tilde{A}(z)x_t = \tilde{B}(z)e_t,$$

ahol $\tilde{A}(z) = P(z)A(z)$ és $\tilde{B}(z) = P(z)B(z)$. Ezért fel szokták tenni, hogy a (2.9) egyenletben szereplő polinomok relatív prímek.

Határozzuk meg (x_t) autokovarianciáit. Legyenek

$$c_k = E(x_t x_{t-k}), \quad d_k = E(x_t e_{t-k}).$$

Először a d_k értékeket számoljuk ki. Nyilván

$$d_k = 0, \quad k < 0,$$

hiszen x_t csak $\{e_t, e_{t-1}, \dots\}$ -től függ. megszorozva az (2.9) egyenlet mindkét oldalát e_{t-k} -vel, $k = 0, 1, \dots$, majd várható értéket véve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} d_0 &= \beta_0 \\ d_1 &= \alpha_1 d_0 + \beta_1 \\ d_2 &= \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \beta_2 \\ &\vdots \\ d_k &= \alpha_1 d_{k-1} + \dots + \alpha_p d_{k-p} + \beta_k, \end{aligned}$$

tehát d_k rekurzívan számolható. Most szorozzuk meg az (2.9) egyenlet mindkét oldalát x_{t-k} -vel, $k = 0, 1, \dots$, majd vegyünk várható értéket. Az alábbi lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} c_0 &= \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_p c_p + \beta_0 d_0 + \beta_1 d_1 + \dots + \beta_q d_q \\ c_1 &= \alpha_1 c_0 + \dots + \alpha_p c_{p-1} + \beta_1 d_0 + \beta_2 d_1 + \dots + \beta_q d_{q-1} \\ &\vdots \\ c_q &= \alpha_1 c_{q-1} + \dots + \alpha_p c_{p-q} + \beta_q d_0. \end{aligned}$$

Ez egy lineáris egyenletrendszer (c_0, \dots, c_q) -ra, ahol az együttható mátrix ugyanaz, mint a Yule-Walker egyenleteknél. $k > q$ esetén az autokovarianciák egyszerű rekurzióval számolhatók:

$$c_k = \alpha_1 c_{k-1} + \dots + \alpha_p c_{k-p}.$$

Az autokovarianciák nagyságrendjéről szól az alábbi tétel:

Tétel 2.4 Legyen (x_t) egy stacionárius ARMA(p, q) folyamat, (c_k) autokovarianciafüggvény. Ekkor

$$|c_k| \leq K k^p \left(\frac{1}{R}\right)^k,$$

ahol K konstans k -tól független, és az AR részhez tartozó $A(z)$ polinom gyökei az R sugarú körön kívül vannak (tehát $R > 1$).

A tételből következik, hogy stacionárius ARMA folyamatok autokovarianciái exponenciálisan lecsengenek.

2.6 ARIMA folyamatok

Az idősor gyakran magában hordozza valaminek a kumulatív hatását. A folyamat csak a megfigyelési szint *változásaiért* felelős, de nem a szintért. Ebben az esetben a megfigyelési pontok közti *különbség* lesz stacionárius, tehát az eddig leírt modellekkel jellemezhető.

Az ARMA folyamatok körénél egy fokkal általánosabb modellt írunk le az ARIMA folyamatok. Itt a már megismert ARMA részhez egy harmadik, I rész adódik, ami az integrálás rövidítése. Ezzel jellemezzük azt a részt, ami a bolyongáshoz kapcsolódó, nem stacionárius komponenst írja le. Egy általános ARIMA modellt három egész szám, p, d, q jellemez, tehát ARIMA(p, d, q) folyamatról beszélünk. Ekkor az autoregresszív együtthatók száma p , a mozgóátlag együtthatók száma q , és d -szer kell differenciálnunk a sort, hogy stacionáriussá váljon. Például egy ARIMA(0,1,0), (azaz egy I(1) folyamat) egy véletlen bolyongást jelent, ami önmagában általában nem stacionárius. A differenciák sorozata már stacionárius lesz. Általános tapasztalat szerint az integrált modelleknél elegendő egyszer differenciálni a sort ahhoz, hogy stacionáriussá váljon. Néha az is előfordul, hogy a differenciákat még egyszer kell differenciálni, azaz I(2) modellt kell tekinteni.

Tulajdonképpen tekinthetnénk egy I(1) folyamatot AR(1) folyamatként is $\alpha = 1$ együtthatóval. Láttuk azonban, hogy egy AR(1) folyamat stacionaritásához szükséges, hogy $|\alpha| < 1$ teljesüljön. Emiatt, 1-hez közeli együttható esetén az autoregresszív folyamat numerikusan igen instabil lesz, könnyebb a folyamat differenciáival dolgozni.

3 Stacionárius folyamatok reprezentációja

3.1 Herglotz tétel

Az előző fejezetben meghatároztuk annak feltételét, hogy egy véges (c_0, c_1, \dots, c_q) számsorozat mikor lehet egy q -ad rendű mozgóátlag folyamat autokovariancia függvénye. Most általánosan kimondjuk (bizonyítás nélkül) annak feltételét, hogy egy végtelen (c_0, c_1, \dots) számsorozat valamilyen stacionárius folyamat autokovariancia függvénye lehessen.

Tétel 3.1 (Herglotz tétel). *Legyen (c_k) egy valós számsorozat. Ekkor létezik olyan (x_t) stacionárius folyamat, melyre $c_k = \mathbb{E}(x_{t+k}x_t)$, pontosan akkor, ha c_k előállítható a következő alakban:*

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} F(d\lambda), \quad (3.1)$$

ahol $i = \sqrt{-1}$, és $F(d\lambda)$ szimmetrikus mérték a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.

A tételben szereplő F mértéket *spektrális mérték*nek nevezzük.

Megjegyzés. Azok számára, akik még nem találkoztak a fenti típusú integrállal, néhány szóban elmondom hogyan értelmezhető az ebben az esetben. Az $F(d\lambda)$ szimmetrikus mérték azt jelenti, hogy minden $A \subset [-\pi, \pi]$ mérhető halmazhoz tartozik egy véges $F(A) \geq 0$ szám (mérték), melyre

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B) \quad \text{ha} \quad A \cap B = \emptyset,$$

$$F(A) = F(-A).$$

A (3.1) integrált közelítő összegek határértékeként definiáljuk a következőképpen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} F(d\lambda) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max(\delta_j) \rightarrow 0}} \sum_{j=1}^n e^{ik\lambda_{j-1}} F([\lambda_{j-1}, \lambda_j]),$$

ahol $-\pi = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_j = \pi$ az intervallum egy felosztása, és $\delta_j = \lambda_j - \lambda_{j-1}$ a j -dik részintervallum nagysága.

Két speciális esetet fogunk megvizsgálni. Elsőként tegyük fel, hogy az F mérték abszolút folytonos a Lebesgue mértékre nézve. Ekkor létezik egy $f(\lambda)$ integrálható függvény, hogy tetszőleges $A \subset [-\pi, \pi]$ mérhető halmaz esetén

$$F(A) = \int_A f(\lambda) d\lambda.$$

Ezt az f függvényt *spektrális sűrűségfüggvénynek* hívjuk. Ekkor c_k így állítható elő:

$$c_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad (3.2)$$

ami éppen f Fourier transzformációja (konstanstól eltekintve). Ha az idősor autokovarianciái (3.2) alakban állíthatók elő, akkor azt mondjuk, hogy *folytonos spektruma van*.

Második speciális esetként azt tekintjük, amikor az F mérték néhány pontra van koncentrálva. Legyenek ezek a pontok

$$\lambda_j \in [-\pi, \pi], \quad \lambda_{-j} = -\lambda_j,$$

$j \in \mathbb{N}$. A megfelelő súlyokat jelölje σ_j^2 . ($\sigma_j^2 = \sigma_{-j}^2$.) Ekkor egy A halmaz mértéke így számolható:

$$F(A) = \sum_{\lambda_j \in A} \sigma_j^2.$$

Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az idősornak *diszkrét spektruma van*. Ekkor a (3.1) integrál összegként számolható a következőképpen:

$$c_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sigma_j^2 e^{ik\lambda_j}.$$

Felhasználjuk, hogy az F mérték szimmetrikus, ezért c_k így számítható:

$$c_k = \sigma_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 (e^{ik\lambda_j} + e^{-ik\lambda_j}) = \sigma_0^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j).$$

3.2 Folytonos spektrum

Tegyük fel, hogy az idősor spektruma (3.2) alakban áll elő. Ekkor a (c_k) autokovarianciák ismeretében a spektrális sűrűségfüggvény inverz Fourier transzformációval határozható meg:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik\lambda}.$$

Használjuk fel, hogy $c_{-k} = c_k$, így azt kapjuk, hogy

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left(c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\lambda) \right). \quad (3.3)$$

1. *Példa.* Tekintsünk egy (e_t) fehér zaj folyamatot, ennek autokovarianciái:

$$c_k = \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}.$$

Ekkor a (3.3) képlet alapján a spektrális sűrűségfüggvény

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi},$$

azaz konstans lesz. Valóban, elvégezhetjük az ellenőrzést:

$$c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma^2}{2\pi} d\lambda = \sigma^2,$$

$$c_k = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} d\lambda = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\lambda) d\lambda + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\lambda) d\lambda \right) = 0.$$

2. *Példa.* Legyen (x_t) elsőrendű mozgóátlag folyamat, azaz

$$x_t = \beta_0 e_t + \beta_1 e_{t-1},$$

ahol (e_t) egységnyi szórású fehér zaj. Ennek autokovarianciái:

$$c_0 = \beta_0^2 + \beta_1^2$$

$$c_1 = \beta_0 \beta_1,$$

$$c_k = 0, \quad k > 1.$$

Ekkor a spektrális sűrűségfüggvény (3.3) alapján így írható:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} (\beta_0^2 + \beta_1^2 + 2\beta_0\beta_1 \cos(\lambda))$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\beta_0 + \beta_1 e^{-i\lambda}|^2.$$

3. *Példa.* Tekintsünk most egy AR(1) folyamatot. Legyen

$$x_t = \alpha x_{t-1} + e_t,$$

ahol (e_t) σ szórású fehér zaj, $|\alpha| < 1$. Ennek autokovarianciáit már meghatároztuk, éspedig:

$$c_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \alpha^2}$$

$$c_k = \alpha^k c_0, \quad k > 0.$$

Így a (3.2) képletet alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f(\lambda) = \frac{c_0}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\lambda k) \right).$$

A jobboldalon levő összeg kiszámításához vezessük be a

$$z_0 = \alpha e^{i\lambda} = \alpha(\cos(\lambda) + i \sin(\lambda))$$

komplex számot. Ekkor azt írhatjuk, hogy

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\lambda k) = 1 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z_0^k \right) = 2\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} z_0^k \right) - 1.$$

Mivel $|z_0| = |\alpha| < 1$, ezért a fenti mértani sor konvergens. Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_0^k = \frac{1}{1 - z_0}.$$

Némi számolás után végeredményül

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\alpha \cos(\lambda) + \alpha^2}$$

adódik. Egyszerűen igazolható az is, hogy

$$f(\lambda) = \frac{c_0}{2\pi} \left| \frac{1}{1 - \alpha e^{-i\lambda}} \right|^2.$$

A fenti példák után megvizsgáljuk, hogy általában hogyan változik a spektrális sűrűségfüggvény lineáris szűrő hatására. Legyen

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j y_{t-j}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} h_j^2 < \infty, \quad (3.4)$$

és jelöljük a megfelelő autokovarianciákat a következőképpen:

$$c_y(k) = E(y_{t+k}y_t), \quad c_x(k) = E(x_{t+k}x_t).$$

Tegyük fel, hogy (y_t) folytonos spektrumú, spektrális sűrűségfüggvényét jelöljük $f_y(\lambda)$ -val. Ekkor

$$c_y(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f_y(\lambda) d\lambda. \quad (3.5)$$

A (3.4) egyenletet önmaga eltoltjával megszorozva, azt kapjuk, hogy

$$E(x_{t+k}x_t) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j y_{t+k-j}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} h_l y_{t-l}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h_j h_l c_y(k-j+l).$$

Helyettesítsük be a fenti egyenletbe a (3.5) előállítást. Összevonás után azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_x(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h_j h_l e^{i(l-j)\lambda}\right) f_y(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} \left|\sum_{j=0}^{\infty} h_j e^{-ij\lambda}\right|^2 f_y(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

A fenti egyenletben éppen (x_t) autokovarianciáinak spektrál-előállítását kaptuk meg, ezért spektrális sűrűségfüggvénye így írható:

$$f_x(\lambda) = |H(e^{-i\lambda})|^2 f_y(\lambda), \quad (3.6)$$

ahol

$$H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j.$$

A (3.6) általános összefüggés alapján meghatározhatjuk egy MA(q) folyamat spektrál sűrűségfüggvényét. Ekkor ugyanis

$$x_t = \beta_0 e_t + \dots + \beta_q e_{t-q} = B(z) e_t,$$

ahol $B(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_q z^q$, és (e_t) egységnyi szórású fehér zaj. Mivel (e_t) spektrál sűrűségfüggvénye konstans $1/2\pi$, ezért (x_t) -é így számolható:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |B(e^{-i\lambda})|^2.$$

Hasonlóan belátható, hogy ha (x_t) ARMA(p,q) folyamat, akkor spektrális sűrűségfüggvénye:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{B(e^{-i\lambda})}{A(e^{-i\lambda})} \right|^2,$$

ahol (x_t) általános alakját (2.9) adja meg. A fenti típusú függvényeket *racionális spektrális sűrűségfüggvények* nevezzük.

3.3 Diszkrét spektrum

Tegyük fel, hogy az (x_t) idősornak diszkrét spektruma van, tehát autokovarianciái így állíthatók elő:

$$c_k = \sigma_0^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \cos(k\lambda_j). \quad (3.7)$$

Az előző fejezetben láttuk, hogy azok a stacionárius idősorok, amikkel eddig foglalkoztunk (AR, MA, ARMA), mind folytonos spektrummal rendelkeznek. A következő állításban példát mutatunk olyan idősorra, aminek diszkrét spektruma van.

Állítás 3.1 *Tekintsünk egy (x_t) idősort, amely így áll elő:*

$$x_t = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(\lambda_j t) + B_j \sin(\lambda_j t)), \quad (3.8)$$

ahol (A_j, B_j) független, 0 várható értékű, $\sigma_j \sqrt{2}$ szórású valószínűségi változók. Ekkor (x_t) autokovariancia függvénye (3.7) alakban írható.

A fenti állítás szerint a diszkrét spektrum azt jelenti, hogy az idősor véletlen periodusok összegeként áll elő.

Bizonyítás. A (3.8) egyenlethez hasonlóan azt írhatjuk, hogy

$$x_{t+k} = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(\lambda_j(t+k)) + B_j \sin(\lambda_j(t+k))). \quad (3.9)$$

Szorozzuk össze a (3.8) és (3.9) egyenleteket, és vegyünk várható értéket. Mivel

$$E(A_j A_l) = \begin{cases} 0 & j \neq l \\ 2\sigma_j^2 & j = l \end{cases}, \quad E(A_j B_l) = 0,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c_k &= \sigma_0^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \{ \cos(\lambda_j(t+k)) \cos(\lambda_j t) + \sin(\lambda_j(t+k)) \sin(\lambda_j t) \} \\ &= \sigma_0^2 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 \cos(\lambda_j k). \end{aligned}$$

Közben a felhasználtuk a jól ismert trigonometrikus azonosságot $\cos\{\lambda_j(t+k) - \lambda_j t\}$ kiszámítására.

Tekintsük azt az esetet, amikor az idősor véges sok véletlen periodus összegeként áll elő. Tegyük fel, hogy az (3.8) előállításban $A_0 = 0$, és legyen a véges spektrum $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Megjegyezzük, hogy ekkor (x_t) az alábbi alakban is írható:

$$x_t = \sum_{j=1}^m a_j \cos(\lambda_j t + \varphi_j), \quad (3.10)$$

ahol (a_j, φ_j) függetlenek. a_j 0 várható értékű, normális eloszlású valószínűségi változó σ_j szórással, φ_j pedig egyenletes eloszlású a $[-\pi, \pi]$ intervallumban. A (3.8) és (3.10) felírások ekvivalenciája a következőképpen látható. Írjuk fel, hogy

$$a_j \cos(\lambda_j t + \varphi_j) = (a_j \cos(\varphi_j)) \cos(\lambda_j t) + (-a_j \sin(\varphi_j)) \sin(\lambda_j t).$$

Legyen $A_j = a_j \cos(\varphi_j)$ és $B_j = -a_j \sin(\varphi_j)$. Ekkor figyelembe véve, hogy

$$E(\cos^2 \varphi_j) = \frac{1}{2}, \quad E(\sin^2 \varphi_j) = \frac{1}{2}, \quad E(\cos \varphi_j \sin \varphi_j) = 0,$$

következik, hogy A_j és B_j a kívánt tulajdonságúak.

Tovább egyszerűsítjük a modellt, ami tekintünk. Tegyük fel, hogy (x_t) ilyen alakban áll elő:

$$x_t = a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cos(\lambda_j t) + b_j \sin(\lambda_j t)) + e_t, \quad (3.11)$$

ahol a_k, b_k, λ_k konstansok, (e_t) pedig fehér zaj. Az ilyen alakú folyamatokat *rejtett periodusú idősornak* nevezzük, a rejtett periodusok $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Legyen adott a fenti idősor egy véges megfigyelése: (x_1, x_2, \dots, x_N) . Tegyük fel, hogy m és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ismertek. Ekkor a megfigyelések alapján az (a_j, b_j) együtthatók legkisebb négyzetes becslése könnyen meghatározható, mint az alábbi minimumfeladat megoldása:

$$\min_{a_k, b_k} \left(\sum_{t=1}^N (x_t - a_k \cos(\lambda_k t) - b_k \sin(\lambda_k t))^2 \right).$$

Egyszerű számolással azt kapjuk, hogy ezek a becslések a következők:

$$\hat{a}_j = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^n x_t \cos(\lambda_j t) \quad (3.12)$$

$$\hat{b}_j = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^n x_t \sin(\lambda_j t). \quad (3.13)$$

Természetes kérdés, hogy hogyan lehet a rejtett periodusokat becsülni véges mintából. Ehhez bevezetjük a következő fogalmat:

Definíció 3.1 *Az empirikus idősor periodogramja egy $[-\pi, \pi]$ ben értelmezett függvény, melyet tetszőleges $\lambda \in [-\pi, \pi]$ esetén így definiálunk:*

$$I_N(\lambda) = A^2(\lambda) + B^2(\lambda) = \frac{2}{N} \left| \sum_{t=1}^N x_t e^{-i\lambda t} \right|^2,$$

ahol

$$A(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N x_t \cos(\lambda t), \quad B(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{t=1}^N x_t \sin(\lambda t).$$

Egyszerűen igazolható, hogy a periodogram közvetlenül számolható az autokovariancák becsléseiből. Erről szól a következő lemma:

Lemma 3.1 *Tetszőleges $\lambda \in [-\pi, \pi]$ esetén teljesül, hogy*

$$I_N(\lambda) = 2 \sum_{k=0}^{N-1} \hat{c}_k \cos(\lambda k),$$

ahol

$$\hat{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k}.$$

Fontos észrevétel, hogy ha a periodogramot éppen a rejtett periodusokhoz tartozó pontokban számoljuk ki, akkor

$$A(\lambda_k) = \sqrt{\frac{N}{2}} \hat{a}_k, \quad B(\lambda_k) = \sqrt{\frac{N}{2}} \hat{b}_k$$

adódik, ahol a \hat{a}_k ill. \hat{b}_k becsléseket (3.12) és (3.13) adta meg. Ezen a megfigyelésen alapul a következő állítás:

Állítás 3.2 *Tegyük fel, hogy a mintabeli megfigyelések száma végtelenbe tart. Ekkor a periodogram határértékére*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \neq \lambda_k \quad k = 1, \dots, m \\ +\infty & \lambda = \lambda_k \quad \text{valamilyen } k\text{-ra} \end{cases}$$

adódik. A fenti konvergencia sztochasztikus értelemben értendő.

Numerikus számításoknál a periodogramot a $\lambda = 0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots$ helyeken értékelik ki. Nagy mintaszám esetén a periodogram kiugró értékei nagy valószínűséggel rejtett frekvenziákat jelentenek. Ezek tesztelésére a *Fisher próbát* használják, ennek leírása megtalálható például az [?] könyvben.

Röviden összefoglaljuk ennek lényegét. R. Fisher dolgozott ki egy statisztikai próbát annak vizsgálatára, hogy egy (3.9) alakú idősor tartalmaz-e rejtett periódusokat. Ez a próba csak akkor végezhető el, ha a fehér zaj normalitása feltehető. A nullhipotézis ekkor a következőképpen fogalmazható meg:

$$H_0 : a_0 = a_1 = \dots = a_p = b_1 = \dots = b_p = 0.$$

Tegyük fel, hogy az idősor páratlan számú elemet tartalmaz (egyébként az elsőt vagy az utolsót elhagyjuk), azaz $N = 2m + 1$. Tekintsük az $I_N(\lambda)$ periodogram

$$\lambda_r = \frac{2\pi r}{2m + 1}$$

helyein felvett értékeit, legyen $u_r = I_N(\lambda_r)$. Definiáljuk a z valószínűségi változót a következőképpen:

$$z = \max_r \left(\frac{u_r}{\sum_{k=1}^m u_k} \right).$$

Bebizonyítható, hogy z eloszlása így számolható:

$$P(z > x) = m(1 - x)^{m-1} - \binom{m}{2}(1 - 2x)^{m-1} + \binom{m}{3}(1 - 3x)^{m-1} - \dots$$

ahol az összegzés csak addig megy, míg a jobboldalon levő zárójeles kifejezésekben (a hatványmennyiségek alapján) pozitív számokat kapunk. A fenti összeg tehát minden x mellett csak véges sok tagból áll. Így meghatározható az a z_α szám, amelyre

$$P(z > z_\alpha) = \alpha$$

teljesül, és ha konkrét x_1, \dots, x_N megfigyelés alapján számított z nagyobb z_α -nál, akkor elvetjük a nullhipotézist, míg $z \leq z_\alpha$ esetben nincs ellentmondás adataink és H_0 között.

4 Paraméterbecslés

4.1 AR paraméterek legkisebb négyzetes becslése

Tekintsünk egy

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + e_t \quad (4.1)$$

autoregresszív folyamatot, ahol (e_t) σ szórású normális eloszlású fehér zaj. A fenti egyenletben szereplő α_j együtthatók becslésére a *legkisebb négyzetek módszere (LKN)*, ill. annak rekurzív alakja alkalmazható, melyet az idősor $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ szelete alapján fogunk meghatározni. Vezessük be a

$$\begin{aligned} \theta^* &= (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^T \\ y(t) &= (x_{t-1}, \dots, x_{t-p})^T \end{aligned}$$

vektorokat. Ekkor a (4.1) egyenlet az

$$x_t = y(t)^T \theta^* + e_t$$

lineáris regressziós alakban írható. Képezzük az

$$X = \begin{pmatrix} x_p \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y(p)^T \\ \vdots \\ y(n)^T \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} e_p \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

vektorokat illetve mátrixot. Ezekkel a fenti modell

$$X = Y\theta^* + u \quad (4.2)$$

alakban írható. A legkisebb négyzetes módszer lényege, hogy azt a θ paramétert választjuk ki, amelyre az $X - Y\theta$ különbség bizonyos értelemben minimális. Ez azt jelenti, hogy a

$$V(\theta) = (X - Y\theta)^T (X - Y\theta)$$

véletlen költségfüggvény minimumát keressük. Jelölje a minimalizáló értéket $\hat{\theta}$. Ezt úgy tudjuk meghatározni, hogy kiszámoljuk $V(\theta)$ gradiensének nullhelyét. A deriválandó függvény tehát:

$$V(\theta) = X^T X - 2X^T Y \theta + \theta^T Y^T Y \theta.$$

Ennek θ szerinti deriváltja (a deriválást alsó indexben jelöljük):

$$V_{\theta}(\theta) = -2X^T Y + 2\theta^T Y^T Y.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása lesz $\hat{\theta}$. Ekkor igaz az alábbi tétel:

Tétel 4.1 *A valódi paraméter kielégíti az*

$$Y^T Y \theta - Y^T X = 0 \tag{4.3}$$

véletlen normálegyenlet várható értékét, azaz

$$E(Y^T Y \theta^* - Y^T X) = 0.$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be a (4.2) modellt a normálegyenlet baloldalába:

$$\begin{aligned} Y^T Y \theta - Y^T X &= Y^T Y \theta - Y^T (Y \theta^* + u) = \\ &= Y^T Y (\theta - \theta^*) - Y^T u. \end{aligned}$$

Így $\theta = \theta^*$ mellett az első tag 0 lesz. A második tag várható értékére

$$E(Y^T u) = E\left(\sum_{k=p}^n y(k) e_k\right) = 0$$

adódik $y(k)$ definíciója miatt.

Tehát n megfigyelés alapján a $\hat{\theta}_n$ LKN becslés a (4.3) normálegyenlet megoldásaként így számolható:

$$\hat{\theta}_n = (Y^T Y)^{-1} Y^T X, \tag{4.4}$$

feltéve, hogy a képletben szereplő inverz létezik. A fenti jelöléseket módosítsuk annyiban, hogy jelezzük $Y(n)$, $X(n)$ is n -től függ. Bizonyítás nélkül kimondjuk az alábbi lemmát:

Lemma 4.1 *Legyen $A(z)$ a (4.1) egyenlethez tartozó polinom, azaz*

$$A(z) = 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p.$$

Tegyük fel, hogy $A(z)$ stabil. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} Y^T(n) Y(n) \rightarrow \Phi$$

egy valószínűséggel valamilyen Φ $p \times p$ dimenziós mátrix-szal.

Mivel a (4.3) normálegyenlet így alakítható:

$$\begin{aligned} Y^T(n) Y(n) \theta - Y^T(n) X(n) &= Y^T(n) Y(n) \theta - Y^T(n) (Y(n) \theta^* + u(n)) = \\ &= Y^T(n) Y(n) (\theta - \theta^*) - Y^T(n) u(n), \end{aligned}$$

ezért a nagy számok törvénye miatt

$$\frac{1}{n} (Y^T(n) Y(n) \theta - Y^T(n) X(n)) \rightarrow \Phi (\theta - \theta^*),$$

és a konvergencia θ -ban egyenletes. Ezzel beláttuk az alábbi tétel első felét:

Tétel 4.2 *Tegyük fel, hogy Φ nemszinguláris. Ekkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n = \theta^*,$$

1 valószínűséggel, tehát a LKN becslés erősen konzisztens. Továbbá, a becslés aszimptotikus szórás mátrixa is meghatározható:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n E(\hat{\theta}_n - \theta^*)(\hat{\theta}_n - \theta^*)^T = \sigma^2 \Phi^{-1}.$$

A tétel második része az elsőhöz hasonlóan igazolható.

A fenti becslés könnyen rekurzívva tehető. Ez azt jelenti, hogy ha n megfigyelés alapján már kiszámoltuk a $\hat{\theta}_n$ becslést, akkor az $n + 1$ -dik megfigyelés után nem kezdjük újra a számolást, hanem $\hat{\theta}_n$ értékét felhasználva számoljuk ki a következő $\hat{\theta}_{n+1}$ becslést.

A rekurzió felírásához vezessük be az

$$U(n) = \frac{1}{n} Y^T(n) Y(n)$$

jelölést.

Tétel 4.3 *A rekurziós egyenletek így írhatók:*

$$U(n) = U(n-1) + \frac{1}{n} (y(n)y^T(n) - U(n-1)) \quad (4.5)$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \frac{1}{n} U^{-1}(n) y(n) (x_n - y^T(n) \hat{\theta}_{n-1}). \quad (4.6)$$

Bizonyítás. Az $U(n)$ -re vonatkozó rekurzió közvetlenül következik a definícióból, miszerint

$$U(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y(k)y^T(k).$$

A (4.6) egyenlet igazolásához írjuk fel a (4.4) becslést részletesen:

$$\hat{\theta}_n = \left(\sum_{k=1}^n y(k)y^T(k) \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n y(j)x_j \right),$$

amiből az következik, hogy

$$\left(\sum_{k=1}^n y(k)y^T(k) \right) \hat{\theta}_n = \sum_{j=1}^n y(j)x_j. \quad (4.7)$$

Ezek után szorozzuk meg a (4.6) egyenlet mindkét oldalát balról az

$$n U(n) = \sum_{k=1}^n y(k)y^T(k)$$

mátrix-szal. $\hat{\theta}_n$ (4.7) előállítását felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^n y(j)x_j = \sum_{j=1}^{n-1} y(j)x_j + y(n)y^T(n)\hat{\theta}_{n-1} + y(n)(x_n - y^T(n)\hat{\theta}_{n-1}),$$

ami láthatóan azonosság.

A fenti rekurzióban minden lépésben újra kell számolni az U mátrix inverzét. A rekurziót úgy tehetjük teljessé, hogy az inverz felújítási szabályát adjuk meg. Mivel minden lépésben egy diáddal változik a mátrix, felhasználjuk az alábbi igen hasznos lemmát:

Lemma 4.2 *Legyen A egy $n \times n$ dimenziós reguláris mátrix, u pedig egy n dimenziós vektor. Ekkor*

$$(A + uu^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uu^T A^{-1}}{1 + u^T A^{-1}u}.$$

Bizonyítás. Egyszerű beszorzással igazolható. Valóban,

$$\begin{aligned} & \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uu^T A^{-1}}{1 + u^T A^{-1}u} \right) (A + uu^T) = \\ & = I - \frac{A^{-1}uu^T}{1 + u^T A^{-1}u} + A^{-1}uu^T - \frac{A^{-1}u(u^T A^{-1}u)u^T}{1 + u^T A^{-1}u} = \\ & = I + A^{-1}uu^T \left(-\frac{1}{1 + u^T A^{-1}u} + 1 - \frac{(u^T A^{-1}u)}{1 + u^T A^{-1}u} \right) = I. \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$P(n) = \frac{1}{n} U^{-1}(n) = \left(\sum_{k=1}^n y(k)y^T(k) \right)^{-1}$$

jelölést. Ekkor a fenti lemma segítségével a $P(n)$ -re vonatkozó rekurzió így írható:

$$P(n) = P(n-1) - \frac{P(n-1)y(n)y^T(n)P(n-1)}{1 + y^T(n)P(n-1)y(n)}. \quad (4.8)$$

A legkisebb négyzetes becslés rekurzív változatát tehát a (4.6) és (4.8) egyenletek adják.

Megjegyzés A LKN módszert formálisan autoregresszív-mozgóátlag (ARMA) folyamatok identifikálására is alkalmazhatjuk úgy, hogy a mozgóátlag részt fehér zajként kezeljük. Ekkor azonban a becslés aszimptotikusan torzított lesz.

Megjegyzés A LKN módszernek van egy olyan változata is, amelyben a régi adatokból adódó négyzetes hibtagot exponenciálisan csökkenő súllyal vesszük figyelembe. Ez a módszer az alapja azoknak az eljárásoknak, amikkel időben változó paraméterű folyamatok paramétereit lehet követni.

4.2 ARMA folyamat maximum likelihood identifikációja

A LKN módszerhez hasonlóan a maximum likelihood (ML) becslés is szerepelt már érintőlegesen a II. éves statisztika tantágy anyagában. Ez az angol nyelvű elnevezés annyira elterjedt a szakirodalomban, hogy mi is ezt használjuk. Magyarra talán úgy fordíthatnánk, hogy 'paraméterbecslés a legnagyobb valószínűség elve alapján'. Ez alatt a következőt értjük: a megfigyelt idősor egy elméleti idősornak valamely realizációja.

Feltételezésünk szerint az elméleti idősor leírásában egy ismeretlen θ paraméter szerepel (ilyen paraméter lehet például a várható érték, a szórás, vagy az ARMA leírásban szereplő α_i, β_j paraméterek, esetleg ezek száma is). Tetszőleges paraméterválasztás mellett az (x_1, \dots, x_n) elméleti idősor egy olyan n dimenziós valószínűségi változóval írható le, aminek eloszlása a paraméterek függvényében megadható. Így kiszámolható, hogy egy rögzített θ mellett mi annak a valószínűsége, hogy épp a kezünkben levő empirikus idősort kapjuk. Pontosabban, ha (x_t) folytonos eloszlású valószínűségi változókból áll, akkor a sűrűségfüggvény megfigyelési pontokban felvett értékét tekintjük. Ha f_θ -val jelöljük azt a sűrűségfüggvényt, ami a θ paraméterű modellhez tartozik, az x_1, \dots, x_n megfigyelések alapján kiszámolható a következő függvény:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ezt a függvényt *likelihood függvénynek* hívjuk. A ML eljárás során ezt a függvényt maximalizáljuk θ -ban. Sok esetben a fenti függvény helyett numerikusan egyszerűbb kiszámolni a likelihood függvény logaritmusának a maximumhelyét. A minimalizálandó függvényt ekkor *log-likelihood függvénynek* hívjuk.

Speciális esetként tegyük fel, hogy (x_t) független, azonos eloszlású valószínűségi változókból áll, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, \theta)$, ahol θ egy ismeretlen paraméter. Ekkor a likelihood függvény:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

Ennek logaritmusa a log-likelihood függvény:

$$\log L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i, \theta),$$

és ezt kell maximalizálni θ -ban. Ha például (x_t) normális eloszlású egységnyi szórással és ismeretlen várható értékkel, akkor

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2},$$

ahol θ az ismeretlen várható értéket jelöli. A negatív log-likelihood függvény pedig, amit minimalizálni kell a következő:

$$-\log L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \frac{n}{2} \log(2\pi) + \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2$$

Könnyen látható, hogy a ML becslés ebben az esetben a számtani átlaggal esik egybe.

Mielőtt rátérnénk a ML becslés tárgyalására ARMA folyamatok esetén, röviden összefoglaljuk a többdimenziós normális eloszlással kapcsolatos ismereteinket.

Definíció 4.1 Egy $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ n -dimenziós valószínűségi változó standard normális eloszlású, ha koordinátái független standard normális eloszlású skalár valószínűségi változók. Ezt úgy jelöljük, hogy

$$\xi \sim \mathcal{N}_n(0, I).$$

Ennek a véletlen vektornak a sűrűségfüggvénye

$$\varphi_n(z) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\|z\|^2\right)$$

Definíció 4.2 Egy $\eta \in \mathbb{R}^p$ p -dimenziós valószínűségi változó normális eloszlású, ha létezik olyan A $p \times n$ dimenziós mátrix, μ p -dimenziós valós vektor és ξ n -dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó, melyekre

$$\eta = A\xi + \mu.$$

Tegyük fel, hogy a normális eloszlású η valószínűségi változó várható értéke μ , szórás mátrixa Σ invertálható. Ekkor sűrűségfüggvénye

$$f(z) = (2\pi)^{-n/2} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(z - \mu)^T \Sigma^{-1} (z - \mu)\right).$$

Ezt úgy jelöljük, hogy $\xi \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$.

Tekintsünk egy ARMA(p,q) folyamatot:

$$A^*(z)x_t = B^*(z)e_t$$

ahol

$$\begin{aligned} A^*(z) &= 1 + \alpha_1^* z + \dots + \alpha_p^* z^p \\ B^*(z) &= 1 + \beta_1^* z + \dots + \beta_q^* z^q \end{aligned}$$

és (e_t) standard normális eloszlású fehér zaj. Feltesszük, hogy az A^* és B^* polinomok stabilak (azaz gyökeik az egységkörön kívül vannak).

Az $A^*(z)$ és $B^*(z)$ polinomok együttthatóinak maximum likelihood becslését fogjuk megadni azon feltétel mellett, hogy $\{x_t, e_t, t \leq 0\}$ szükséges számú értéke adott, pl. $x_t = e_t = 0$ ha $t \leq 0$. Az ismeretlen paramétereket gyűjtsük össze egy θ^* vektorba, azaz legyen $\theta^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_p^*, \beta_1^*, \dots, \beta_q^*)^T$. Jelölje $D \subset \mathbb{R}^{p+q}$ azon paraméterek halmazát, melyekre a megfelelő polinomok stabilak.

Mivel feltettük a fehér zaj normalitását, ezért (x_1, \dots, x_n) is normális eloszlású lesz, 0 várható értékkel és valamilyen $\Sigma(\theta^*)$ szórással. Ennek sűrűségfüggvénye

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} (\det \Sigma(\theta^*))^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T \Sigma(\theta^*)^{-1} x\right),$$

ahol $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. A negatív log-likelihood függvény tehát

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \frac{n}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log \det \Sigma(\theta) + \frac{1}{2} x^T \Sigma(\theta)^{-1} x.$$

Bizonyítás nélkül elmondjuk, hogy ez a log-likelihood függvény hogyan határozható meg az idősorból. A ML eljárás során az ismert (x_t) folyamat segítségével egy tetszőleges $\theta \in D$ paraméterből kiindulva megpróbáljuk rekonsruálni az (e_t) zajfolyamatot. Nevezetesen, legyen $\theta = (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)^T$ egy megfelelő paraméter, a hozzá tartozó operátorok $A(z) = 1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_p z^p$, $B(z) = 1 + \beta_1 z + \dots + \beta_q z^q$. Definiáljuk a $(\theta$ -tól függő) $(\varepsilon_t(\theta))$ folyamatot a következőképpen:

$$\varepsilon_t(\theta) + \beta_1 \varepsilon_{t-1}(\theta) + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q}(\theta) = x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p}, \quad (4.9)$$

azaz legyen

$$B(z)\varepsilon_t(\theta) = A(z)x_t.$$

Ekkor igazolható, hogy a negatív log-likelihood függvényt konstanstól eltekintve a

$$V_n(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\theta)$$

kifejezés adja meg. Ennek a függvénynek a minimumhelyét kell megkeresni, amit gyakorlatilag úgy végzünk el, hogy a derivált nullhelyét Newton-módszerrel közelítjük. Ehhez szükségünk van a fenti költségfüggvény második deriváltjára is. Deriváljuk a (4.9) egyenletet az ismeretlen paraméterek szerint. Ami szerint deriválunk, alsó indexben fogjuk jelölni:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\beta_j, t}(\theta) + \beta_1 \varepsilon_{\beta_j, t-1}(\theta) + \dots + \beta_q \varepsilon_{\beta_j, t-q}(\theta) &= -\varepsilon_{t-j}(\theta) \\ \varepsilon_{\alpha_k, t}(\theta) + \beta_1 \varepsilon_{\alpha_k, t-1}(\theta) + \dots + \beta_q \varepsilon_{\alpha_k, t-q}(\theta) &= x_{t-k}. \end{aligned}$$

Jelöljük $\eta_t(\theta)$ -val a derivált (vektor) folyamatot. Ekkor az előző összefüggések tömören így írhatók:

$$\eta_t(\theta) + \beta_1 \eta_{t-1}(\theta) + \dots + \beta_q \eta_{t-q}(\theta) = \varphi(t) \quad (4.10)$$

ahol $\varphi(t) = (-\varepsilon_{t-1}(\theta), \dots, -\varepsilon_{t-q}(\theta), x_{t-1}, \dots, x_{t-p})^T$.

Az off-line ML becslést úgy értelmezzük tehát, mint a $V_n(\theta)$ függvényminimumhelyét, amit $V_{\theta,n}(\theta)$ gyökeként határozunk meg. Ez a függvény:

$$V_{\theta,n}(\theta) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t(\theta) \eta_t(\theta),$$

melynek gyökét $\hat{\theta}_n$ -nel jelöljük.

Megjegyzés. Mivel $V_n(\theta)$ véletlen függvény, ezért előfordulhat, hogy minimumhelye D -n kívül esik. Ezért kicsit módosítjuk $\hat{\theta}_n$ definícióját: Pontosabban, $\hat{\theta}_n$ legyen $V_n(\theta)$ minimumhelye, ha ez D belsejébe esik, egyébként legyen tetszőleges D belsejébe eső paraméter.

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt:

Tétel 4.4 *Legyen $\hat{\theta}_n$ θ^* maximum likelihood becslése n elemű minta alapján ekkor*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^*) \longrightarrow \mathcal{N}(0, R),$$

ahol R egy később megadandó mátrix. Tehát a maximum likelihood becslés erősen konzisztens.

A θ -ra tett feltevésünk miatt értelmezhető egy aszimptotikus költségfüggvény, mivel létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \mathbf{E} \varepsilon_t^2(\theta)$$

határérték. Legyen tehát

$$W(\theta) \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} V_n(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \mathbf{E} \varepsilon_t^2(\theta).$$

Ezt *aszimptotikus log-likelihood függvénynek* nevezzük. Könnyen igazolható a következő tétel:

Tétel 4.5 *Az igazi paraméter $W(\theta)$ -nak globális minimuma, továbbá*

$$\frac{d}{d\theta} W(\theta)|_{\theta=\theta^*} = 0, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} W(\theta)|_{\theta=\theta^*} \geq 0.$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy $\varepsilon_t(\theta)$ így állítható elő a fehér zaj folyamatból:

$$\varepsilon_t(\theta) = \frac{A(z)}{B(z)} \frac{B^*(z)}{A^*(z)} e_t,$$

ami a polinomokra tett stabilitási feltétel miatt végtelen MA alakban írható:

$$\varepsilon_t(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k e_{t-k}.$$

Mivel a polinomok főegyütthatói mind 1, ezért $\gamma_0 = 1$. Ebből azonnal következik, hogy stacionárius indítás esetén

$$E\varepsilon_t^2(\theta) \geq Ee_t^2.$$

Figyelembe véve, hogy $\varepsilon_t(\theta^*) = e_t$,

$$W(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} E \varepsilon_t^2(\theta) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} E \varepsilon_t^2(\theta^*) = W(\theta^*),$$

tehát θ^* valóban globális minimum lesz az aszimptotikus költségfüggvénynek.

A definíció szerint $W(\theta)$ deriváltja így írható:

$$W_\theta(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\varepsilon_t(\theta)\eta_t(\theta)).$$

A (4.10) képlet szerint $\eta_t(\theta)$ meghatározásához $\varepsilon_s(\theta)$, $s \leq t - 1$ -re van szükség. Mivel pedig $\varepsilon_t(\theta^*) \sim e_t$ (a különbség a nem stacionárius indításból adódhat, és exponenciálisan lecseng), ezért $\theta = \theta^*$ esetén ε_t és η_t aszimptotikusan függetlenek. Így

$$W_\theta(\theta^*) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(e_t \eta_t(\theta^*)) = 0.$$

A második deriváltra

$$W_{\theta\theta}(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{E(\eta_t(\theta)\eta_t^T(\theta)) + E(\varepsilon_t(\theta)\eta_{\theta,t}(\theta))\}$$

adódik. A határértékben szereplő második tag $\theta = \theta^*$ esetén most is aszimptotikusan független tényezőkből áll, így ez eltűnik. Azt kapjuk tehát, hogy

$$W_{\theta\theta}(\theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \{E(\eta_t(\theta^*)\eta_t^T(\theta^*))\} \geq 0.$$

A fenti tételnél még többet állít a következő tétel (Åström-Södertröm, 1974), ezt nem bizonyítjuk:

Tétel 4.6 *Tegyük fel, hogy a folyamat leírásában szereplő $A^*(z)$ és $B^*(z)$ polinomok relatív prímek. Ekkor θ^* -on kívül nincs más lokális minimumhelye $W(\theta)$ -nak D -ben.*

A fenti tételek alapján az aszimptotikus költségfüggvényről tudjuk, hogy globális minimuma egyértelmű, és a valódi paraméterértékkel egyező. Mi azonban ezt a függvényt nem ismertjük, helyette az n -dik időpontban ennek egy véletlen közelítése, $V_n(\theta)$ adott. A ML becslés erős konzisztenciáját állítja az alábbi tétel (Ljung, 1996):

Tétel 4.7 *Tegyük fel, hogy*

$$\frac{d^2}{d\theta^2}W(\theta)|_{\theta=\theta^*} = R > 0.$$

Ekkor létezik θ^ -nak olyan U környezete, és olyan n_1 küszöbérték, hogy $n > n_1$ esetén a*

$$\frac{d}{d\theta}V_n(\theta) = 0$$

egyenletnek U -ban egyetlen megoldása van, mondjuk $\hat{\theta}_n$. Ezenkívül

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n = \theta^*$$

teljesül 1 valószínűséggel.

A ML becslés hibájának aszimptotikus szórása is meghatározható:

Tétel 4.8 *A fenti feltételek teljesülése esetén*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta^*) \longrightarrow \mathcal{N}(0, R).$$

Látható, hogy a ML becslési feladat egy nemlineáris függvény minimalizálásához vezet. Ilyen feladatok megoldását iterációval tudjuk elvégezni.

A gyakorlatban sokszor célszerűbb a ML becslést rekurzívá tenni, azaz $\hat{\theta}_n$ -et közvetlenül $\hat{\theta}_{n-1}$ alapján számolni. Ez a módszer azon alapul, hogy a

$$\frac{d}{d\theta}V_n(\hat{\theta}_n) \equiv 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

egyenletet felhasználva a $\frac{\partial}{\partial \theta}V_n(\theta)$ függvény θ^* körüli Taylor közelítését használjuk. Így felírhatjuk, hogy

$$\hat{\theta}_n \sim \hat{\theta}_{n-1} - V_{\theta\theta,n}(\hat{\theta}_{n-1})\varepsilon_n(\hat{\theta}_{n-1})\eta_n(\hat{\theta}_{n-1}).$$

Ezek után a rekurzív ML eljárásához tartozó rekurziós képletek könnyen felírhatók. Megjegyezzük, hogy az így kapott becslési folyamat nem lesz azonos a ML becslésekkel. Igazolható azonban, hogy nagyon közel lesz hozzá. Magukra a képletekre nem lesz szükségünk, a programcsomagok készítői ezeket már lekódolták. A fent elmondottak alapján ki tudjuk választani azt a paraméterbecslési módszert, ami egy konkrét esetben célravezető, és a kapott eredményeket értelmezni tudjuk.

4.3 ARMA folyamatok előrejelzése

Legyen adott egy idősor x_1, \dots, x_t szelete, és szeretnénk meghatározni k lépésre előre az x_{t+k} legjobb becslését. Feltesszük, hogy az elméleti idősor ARMA(p,q) modellel írható le, azaz

$$A(z)x_t = B(z)e_t$$

ahol $A(z)$ és $B(z)$ a z időeltolás-operátor polinomjai, melyről feltesszük, hogy stabilak. Részletesen kiírva a fenti egyenlet ilyen alakú:

$$x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} = e_t + \beta_1 e_{t-1} + \dots + \beta_q e_{t-q}. \quad (4.11)$$

Legjobb becslés alatt azt értjük, hogy ki szeretnénk számolni x_{t+k} feltételes várható értékét az x_1, \dots, x_t változókra. Vezessük be a következő jelölést:

$$\hat{x}_{t+k} = E(x_{t+k} \mid x_t, x_{t-1}, \dots).$$

Felhasználjuk, hogy a (4.11) egyenlet végtelen MA modelleként felírható:

$$x_t = \frac{B(z)}{A(z)} e_t.$$

A legjobb előrejelzés kiszámításához végezzük el B/A felbontását:

$$\frac{B(z)}{A(z)} = F(z) + z^k \frac{G(z)}{A(z)}, \quad (4.12)$$

ahol $F(z)$ legfeljebb $k - 1$ -ed fokú polinom. Ekkor

$$x_{t+k} = F(z)e_{t+k} + \frac{G(z)}{A(z)}e_t.$$

Így ha mindkét oldal feltételes várható értékét vesszük $\{x_t, x_{t-1}, \dots\}$ -re vonatkozóan, a jobboldal első tagja eltűnik, a második tag feltételes várható értéke önmaga. Azt kapjuk, hogy

$$\hat{x}_{t+k} = \frac{G(z)}{A(z)} e_t.$$

Mivel az előrejelzést x függvényében szeretnénk kifejezni, behelyettesítjük, hogy $e_t = (A/B)x_t$. Így azt kapjuk, hogy

$$\hat{x}_{t+k} = \frac{G(z)}{B(z)} x_t,$$

tehát az \hat{x} -re vonatkozó rekurzió így írható:

$$B(z)\hat{x}_{t+k} = G(z)x_t. \quad (4.13)$$

Határozzuk meg az előrejelzési hibát. Ezt úgy definiáljuk, mint

$$\varepsilon_{t+k} = x_{t+k} - \hat{x}_{t+k}.$$

A (4.13) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$B(z)\hat{x}_{t+k} = G(z)(\hat{x}_t + \varepsilon_t) = G(z)z^k\hat{x}_{t+k} + G(z)\varepsilon_t.$$

Rendezzük át ezt az egyenletet:

$$(B(z) - z^k G(z))\hat{x}_{t+k} = G(z)\varepsilon_t.$$

A (4.12) felírásból következik, hogy $B(z) - z^k G(z) = A(z)F(z)$. Tehát végeredményként azt kapjuk, hogy a k lépéses legkisebb négyzetes előrejelzés így számolható:

$$\hat{x}_{t+k} = \frac{G(z)}{A(z)F(z)} \varepsilon_t.$$

5 Többdimenziós idősorok

Ez a fejezet már kicsit túlmutat a tervezett kurzus anyagán. Fő célja, hogy kitekintést mutasson olyan feladatok megoldása felé, ahol a feldolgozandó adatsor minden időpillanatban több, egymással összefüggő adatot tartalmaz. Ezeknek a feladatoknak a megoldását egy következő kurzus során részletesen megismerhetik az érdeklődő hallgatók. A témakörhöz kapcsolódóan ajánlhatjuk a Móri Tamás és Székely Gábor szerkesztette könyvet[?], amely többváltozós statisztikai analízissel foglalkozik, és messze túlmutat ennek a jegyzetnek az anyagán.

5.1 Állapottér reprezentáció

A többdimenziós idősorok leggyakrabban használt modelljei az egydimenziós folyamatok általánosításaként jöttek létre. Az előző fejezetben láttuk, hogy egydimenzióban az autoregresszív (AR) és mozgó átlag (MA) alakok együttes alkalmazása minden stacionárius folyamat jó közelítéséhez vezet. Ezeknek a folyamatoknak ugyan könnyen megadhatók a többdimenziós változataik, a kapott modellek paraméterezése azonban nem egyértelmű. A többértelműség legtermészetesebben a Kálmán által bevezetett ún. állapotterres leírással szüntethető meg.

Az 1.1 fejezetben bevezettük a Gauss-Markov folyamatok fogalmát. Ez igen természetes módon kiterjeszthető a többdimenziós esetre. Az (X_t) , $t = 1, \dots, N$ p -dimenziós vektorfolyamat Gauss-Markov folyamat, ha

- stacionárius folyamat,
- együttes eloszlásuk normális,
- tetszőleges $0 < k < s$ mellett $\{X_t, \dots, X_{t+k-1}\}$ és $\{X_{t+k+1}, \dots, X_{t+s}\}$ X_{t+k} -ra nézve feltételesen függetlenek, azaz (X_t) Markov folyamat.

Tétel 5.1 *Az (X_t) p -dimenziós, 0 várható értékű, stacionárius Gauss-folyamat pontosan akkor Markov-folyamat, ha van valamilyen r -dimenziós (e_t) 0 várható értékű normális eloszlású fehér zaj és vannak olyan $p \times p$ illetve $p \times r$ méretű A és B mátrixok, hogy*

$$X_t = AX_{t-1} + Be_t, \quad (5.1)$$

és az A mátrix minden sajátértéke a komplex egységkör belsejébe esik.

Tegyük fel, hogy a fenti felírásban szereplő A mátrixra teljesül, hogy $\rho(A) < 1$. (Ez azt jelenti, hogy a mátrix minden λ sajátértékére teljesül, hogy $|\lambda| < 1$. Az ilyen mátrixot *stabilisnak* hívunk.) Ekkor bebizonyítható, hogy a (5.1)-ben szereplő folyamat felírható

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B e_{t-k}$$

alakban, ahol a végtelen összeg 1 valószínűséggel konvergens.

Tegyük fel, hogy (X_t) stacionárius. Jelöljük X_t kovariancia mátrixát R -rel. Ekkor a (5.1) felírásból könnyen belátható, hogy a kovarianciamátrix kielégíti az

$$R = ARA^T + BB^T$$

ún. *Ljapunov egyenletet*. Továbbá, ha A stabilis, akkor R előállítható

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} A^k BB^T (A^T)^k$$

alakban. Ezenkívül az autokovarianciafüggvény így áll elő:

$$E(X_{t+k}X_t^T) = A^k R.$$

A jegyzet korábbi részében talákoztunk már többdimenziós Gauss-Markov folyamatokkal, csak nem így neveztük ezeket. Legyen (x_t) egy AR(p) folyamat, amit az

$$x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} = \sigma e_t \quad (5.2)$$

modell ír le, ahol e_t 0 várható értékű, egységnyi szórású normális fehér zaj. Nyilván ez a folyamat nem lesz Markov, hiszen a $t+1$ -dik pontbeli értékét csak a t -dik értéke alapján nem tudjuk meghatározni. Ha viszont összegyűjtjük az előző p adatot, akkor a következő már 'majdnem' megmondható. Legyen tehát

$$y_t = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-p+1})^T.$$

Ekkor könnyen látható, hogy y_t eleget tesz az alábbi rekurzióknak:

$$y_t = \tilde{A}y_{t-1} + \tilde{B}e_t$$

ahol

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{p-1} & -\alpha_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

és $\tilde{B} = (\sigma, 0, \dots, 0)^T$. (A \tilde{A} mátrixot szokás a már ismert $A(z) = 1 + \alpha_1 z + \alpha_p z^p$ polinom *kísérő mátrixának* nevezni.) Tehát egy AR(p) folyamat reprezentálható úgy is,

mint egy p -dimenziós Gauss-Markov folyamat egyik koordinátája. Vegyük észre, hogy y_t kovariancia mátrixa az eredeti AR folyamat autokovarianciáit tartalmazza, azaz

$$E(y_t y_t^T) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{p-1} \\ c_1 & c_0 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ c_{p-1} & c_{p-2} & \dots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Erre a mátrixra a Ljapunov egyenletet kiírva éppen a Yule-Walker egyenleteket kapjuk.

A (5.2) modell tehát a következőképpen is megadható:

$$y_t = \tilde{A}y_{t-1} + \tilde{B}e_t \quad (5.3)$$

$$x_t = \tilde{C}y_t \quad (5.4)$$

ahol $\tilde{C} = (1, 0, \dots, 0)$. Ezt a felírást az (x_t) folyamat *állapottér reprezentációjának* hívjuk, az y_t vektor az *állapotvektor*.

Hasonló módon megadható egy ARMA(p,q) folyamat állapotér reprezentációja. Nevezetesen, legyen

$$x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \dots + \alpha_p x_{t-p} = \beta_0 e_t + \beta_1 e_{t-1} + \dots + \beta_q e_{t-q}.$$

Ekkor x_t is előáll a (5.3), (5.4) alakban annyi változással, hogy most $\tilde{C} = (\beta_1, \dots, \beta_q)$. (Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük itt, hogy $p = q$, hiszen bármelyik oldalhoz hozzáírhatunk komponenseket 0 együtthatóval.

Egy általános állapotér felírás a következő:

$$y_t = Ay_{t-1} + Be_t$$

$$x_t = Cy_t$$

ahol y_t a rendszer állapotváltozója, x_t a rendszer kimenőjele (outputja), e_t pedig a bemenőjele (inputja). A z eltolásoperátor segítségével a fenti két egyenlet így írható:

$$x_t = C(I - zA)^{-1}Be_t = H(z)e_t.$$

Tehát ez a felírás is egy lineáris szűrőnek felel meg. Az itt szereplő $H(z)$ függvényt *átmeneti függvénynek* hívjuk. Azokat az (A, B, C) hármasokat, amikre a fenti összefüggés teljesül, a $H(z)$ *realizációinak* hívjuk.

Idősorok állapot reprezentációján keresztül a többdimenziós folyamatok is könnyen kezelhetővé válnak. Egy adott $H(z)$ átmeneti függvényhez igen sokféle realizáció adható meg. Ez azonban egy olyan megközelítést adja a sztochasztikus idősorok vizsgálatának, aminek részleteibe nem tudunk belemenni.

5.2 Többdimenziós ARMA folyamatok

Definíció 5.1 *Legyenek adottak A_1, \dots, A_p $n \times n$ dimenziós és B_0, B_1, \dots, B_q $n \times m$ dimenziós mátrixok, továbbá (e_t) m -dimenziós egységnyi szórású fehér zaj. Ha X_t -re teljesül, hogy*

$$X_t + \sum_{k=1}^p A_k X_{t-k} = \sum_{j=0}^q B_j e_{t-j}, \quad (5.5)$$

akkor X_t -t ARMA(p, q) folyamatnak hívjuk.

Az

1-dimenziós esethez hasonlóan itt is bevezethetjük a megfelelő generátorfüggvényeket, legyenek

$$\begin{aligned} A(z) &= I + \sum_{k=1}^p A_k z^k \\ B(z) &= \sum_{j=0}^q B_j z^j. \end{aligned}$$

Most $A(z)$ és $B(z)$ polinommátrixok lesznek, azaz olyan mátrixok, melynek elemei legfeljebb p ill. q -ad fokú polinomok. Egy $A(z)$ négyzetes polinommátrixot *stabilis*nek mondunk, ha $\det(A(z)) \neq 0$, $|z| \leq 1$ esetén.

Tétel 5.2 *A (5.5) képlettel definiált n -dimenziós folyamat pontosan akkor stacionárius, ha a megfelelő $A(z)$ polinom stabilis. Ekkor $A(z)$ az egységkörben invertálható, és*

$$H(z) := A^{-1}(z)B(z) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j z^j$$

az egységkörben konvergens. Ezért létezik (X_t) -nek végtelen rendű MA előállítása:

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} h_j e_{t-j}.$$

Speciális esetként vegyünk egy AR(1) folyamatot:

$$X_t = AX_{t-1} + Be_t.$$

Ekkor

$$A(z) = I - Az,$$

és így

$$\det(A(z)) = \det(I - Az).$$

Ez azt jelenti, hogy $\det(A(z))$ zérushelyei épp $A(z)$ sajátértékeinek reciprokai lesznek.

Tekinthetjük a fordított feladatot is. Legyen adott egy $H(z)$ racionális törtetkből álló mátrix, és keresünk olyan $A(z)$ $B(z)$ polinommatrixokat, melyekre

$$H(z) = A^{-1}(z)B(z).$$

Ennek a feladatnak a megoldása persze messze nem egyértelmű. Még akkor sem, ha azt szertenénk elérni például, hogy $\det A(z)$ foka legyen minimális. Ha ugyanis van egy tetszőleges $A(z)$, $B(z)$ megoldásunk, akkor

$$\tilde{A}(z) = M(z)A(z), \quad \tilde{B}(z) = M(z)B(z)$$

is jó felbontást ad, ha $\det M(z) \equiv 1$. Ez utóbbi feltétel pedig semmi megkötést nem ad a polinommatrixban szereplő polinomok fokszámára. Például a következő 2×2 mátrix determinánsa 1:

$$M(z) = \begin{pmatrix} z^4 + 1 & z \\ z^3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ezért hasznos az előző fejezetben bevezetett állapotterezes realizáció.

6 Nem-stacionárius modellek

Gazdasági idősorok gyakran szemmel látható nem-stacionaritásokat mutatnak. Ilyen például a trend vagy szezonális. A klasszikus megközelítés azt jelenti, hogy a további vizsgálatok előtt az idősorból 'eltüntetjük' a nemstacionaritásokat például többszöri differenciálással. Ennek a megközelítésnek a hátránya, hogy az eredeti idősor helyett egy bonyolultabb struktúrájú kapunk. Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk, milyen modelleket használnak nem stacionárius idősorok esetén, mellyel közvetlenül vizsgálhatjuk azokat.

6.1 Integrált és kointegrált idősorok

Az integrált folyamat fogalmát már bevezettük a 2.6. fejezetben. Emlékeztetünk rá, hogy egy (x_t) nem stacionárius folyamat d rendben integrált, ha a d -dik differencia sorozat stacionárius.

Definíció 6.1 Legyen (x_t) egy n dimenziós folyamat, első rendben integrált. Azt mondjuk, hogy (x_t) kointegrált, ha létezik olyan $\alpha \neq 0$ n dimenziós vektor, melyre az $(\alpha^T x_t)$ 1-dimenziós folyamat stacionárius. Ezt az α vektort kointegráló vektornak hívjuk. A maximális független kointegráló vektorok számát kointegrációs rangnak hívjuk.

Ezeknek a folyamatoknak kétfajta reprezentációját fogjuk megadni. Legyen (x_t) integrált folyamat, azaz

$$(1 - z)x_t = u_t = k(z)\varepsilon_t \quad (6.1)$$

ahol (ε_t) fehér zaj, (u_t) stacionárius, és a $k(z) = \sum_0^\infty k_j z^j$ sor $|z| \leq 1$ esetén konvergens. Írjuk fel $k(z)$ -t

$$k(z) = k(1) + \tilde{k}(z),$$

alakban, ahol $\tilde{k}(1) = 0$. Ekkor $\tilde{k}(z)$ osztható $(1 - z)$ -vel, tehát a (6.1) egyenlet így írható:

$$(1 - z)x_t = k(1)\varepsilon_t + (1 - z)\tilde{k}(z)\varepsilon_t.$$

Ekkor $(1 - z)$ inverzével beszorozva azt kapjuk, hogy

$$x_t = (1 - z)^{-1}k(1)\varepsilon_t + (1 - z)^{-1}\tilde{k}(z)\varepsilon_t. \quad (6.2)$$

A fenti egyenlet jobboldalának második tagja stacionárius. Látható, hogy ha $k(1)$ szinguláris de nem nulla, akkor (x_t) kointegrált. Így a fenti $(1 - z)^{-1}k(1)\varepsilon_t$ tag egy alacsonyabb dimenziós integrált faktor-folyamatnak felel meg. Ezért a (6.2) egyenlet a kointegrációs folyamat egy dinamikus faktor-modelljét adja meg. Általában azonban a (6.2) felírásban szereplő két tag nem lesz független.

Kointegrált folyamatok egy másfajta interpretációja AR megközelítésben adható meg. Tekintsünk egy n -dimenziós AR(p) folyamatot, amelyet az alábbi egyenlet ír le:

$$x_t + A_1 x_{t-1} + \dots + A_p x_{t-p} = \varepsilon_t, \quad (6.3)$$

ahol (ε_t) fehér zaj folyamat Λ szórásmatrix-szal. Vezessük be az $a(z) = I + A_1z + \dots + A_pz^p$ polinomot. Feltesszük, hogy $\det a(z) \neq 0$ for $|z| \leq 1$ kivéve esetleg a $z = 1$ pontot. Írjuk át a (6.3) egyenletet a következőképpen:

$$x_t - x_{t-1} = (-I - A_1)(x_{t-1} - x_{t-2}) + \dots + (-I - A_1 - \dots - A_p)x_{t-p} + \varepsilon_t.$$

Kicsit tovább alakítva azt kapjuk, hogy

$$(1 - z)x_t = \Gamma_1(1 - z)x_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1}(1 - z)x_{t-p+1} - \pi x_{t-p} + \varepsilon_t,$$

ahol $\Gamma_i = -(I + A_1 + \dots + A_i)$ és $\pi = a(1)$. Ebből a reprezentációból látható, hogy ha π teljes rangú, akkor (x_t) stacionárius, hiszen $\det \pi = \det a(1) \neq 0$. Ha $\pi = 0$, akkor (x_t) integrált, de nem kointegrált. Végül, ha az $r = \text{rank}(\pi)$ rangra az teljesül, hogy $0 < r < n$, akkor (x_t) kointegrált. Ebben az esetben írjuk fel π -t a következőképpen:

$$\pi = \alpha\beta^T, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n \times r}.$$

Ekkor β sorai lesznek a kointegráló vektorok. Johansen(1988) adta meg a kointegráló vektorok ML becslését ebben a megközelítésben. Ez egy igen jól használható becslés, amely (e_t) normalitása esetén alkalmazható.

6.2 A kointegrációs tér ML becslése

6.3 Hosszú távú modellek

Ha egy idősről el akarjuk dönteni, vajon stacionárius ARMA folyamat vagy integrált folyamat, sokszor nem egyértelmű a választóvonal. Tekintsük például a folyamat (ρ_k) autokovarianciafüggvényét. Stacionárius ARMA esetben erre a sorozatra az teljesül, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k < \infty,$$

míg integrált folyamatok esetén az igaz, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 1.$$

Nyilván könnyen előfordulhat, hogy egy idősor a fenti relációk egyikét sem teljesíti. Ezért vezették be a *hosszú emlékezetű* (*long memory*) modelleket. Ezek közül ismertetünk néhányat.

Definíció 6.2 Az (x_t) folyamatot d -ed rendű frakcionálisan integrált folyamatnak nevezzük, ha

$$(1 - z)^d x_t = u_t, \quad (6.4)$$

ahol $0 < d < 1$ és u_t stacionárius ARMA folyamat. Azt mondjuk, hogy (x_t) ARFIMA folyamat.

A fenti folyamatot $(1 - z)^d$ Taylor sorának segítségével tudjuk értelmezni. Nevezetesen, megszorozzuk a (6.4) egyenletet a

$$(1 - z)^d = 1 - dz + d(d - 1) \frac{z^2}{2!} - \dots$$

sor inverzével. Így a folyamat egy végtelen dimenziós (végtelen rendű) reprezentációját kapjuk. Megmutatható, hogy $0 < d < 0.5$ esetén a folyamat stacionárius, egyébként pedig nem stacionárius. Ennek egy részleges magyarázata adható a spektrál-reprezentáció alapján. Tekintsük most a skalár esetet. A (6.4) felírásban (u_t) spektrál sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$f_u(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{b(e^{-i\lambda})}{a(e^{-i\lambda})} \right|^2$$

ahol σ^2 a fehér zaj szórása, $a(z)$, $b(z)$ pedig u_t ARMA reprezentációjában szereplő polinomok. Ekkor (a stacionárius esetben) (x_t) spektrál sűrűségfüggvénye így írható:

$$f_x(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{b(e^{-i\lambda})}{a(e^{-i\lambda})} \right|^2 |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d}.$$

Azonnal látható, hogy

$$f_y(0) = 0,$$

ami a hosszú memóriának szemléletes interpretációja. Vegyük $f_x(\lambda)$ logaritmusát, és használjuk fel azt az azonosságot, hogy

$$|1 - e^{-i\lambda}|^2 = |1 - \cos \lambda + i \sin \lambda|^2 = 4 \sin^2 \frac{\lambda}{2}.$$

Ekkor

$$\log f_x(\lambda) = \log \frac{f_u(\lambda)}{f_u(0)} + \log f_u(0) - d(\log 4 \sin^2 \frac{\lambda}{2}).$$

Ennek a képletnek az alapján lehet a d paraméter becslését megadni, lineáris regressziót számolva.

Hosszú emlékezetű folyamatok egy másik osztálya az ún. ARCH modellek. Ez annak rövidítése, hogy 'Autoregressive Conditional Heteroskedasticity', és ezt a fogalmat 1982-ben vezették be. A fogalom megértéséhez tekintsünk egy AR(1) folyamatot, legyen ez (x_t) . Ekkor a várható értéke konstans, általában feltesszük, hogy $E x_t = 0$. Másrészt, ha a feltételes várható értéket tekintjük, akkor ez $E(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) = \alpha x_{t-1}$, ami már időtől függő. Hasonló tulajdonság teljesül egy ARCH modellben a második momentumra.

Definíció 6.3 Az x_t folyamatot ARCH-típusúnak nevezünk, ha

$$x_t = \sigma_t z_t \quad (6.5)$$

$$\sigma_t^2 = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2, \quad (6.6)$$

ahol (z_t) független azonos eloszlású valószínűségi változósorozat, melyre $E z_t = 0$, $E z_t^2 = 1$ és $c > 0$, $\alpha_i \geq 0$ valós számok.

Könnyen látható, hogy a stacionaritás biztosításához fel kell tennünk, hogy $\sum_1^p \alpha_i < 1$. Valóban, tegyük fel, hogy (x_t) stacionárius, ekkor (6.5)-ből azt kapjuk, hogy

$$E x_t^2 = E(\sigma_t^2) E(z_t^2),$$

felhasználva (z_t) függetlenségét. A $\sigma^2 = E(x_t^2)$ jelölést használva (6.6)-ból azt kapjuk, hogy

$$\sigma^2 = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i \sigma^2.$$

Tehát valóban szükséges a $\sum_1^p \alpha_i < 1$ feltétel. Ebben az esetben (x_t) korrelálatlan folyamat lesz. A feltételes második momentumokra azonban az teljesül, hogy

$$E(x_t^2 | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots) = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2.$$

Vegyük észre, hogy ez a képlet a feltételes szórásnégyzet nem-triviális előrejelzését adja.

Az ARCH modelleknek többféle lineáris és nemlineáris általánosítása ismeretes, ezeket GARCH (Generalized ARCH) modelleknek hívják. Egyik lehetőség, hogy a (6.6) egyenletet helyettesítik az alábbival:

$$\sigma_t^2 = c + \sum_{i=1}^p \alpha_i x_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad (6.7)$$

Ez a folyamat abban az esetben jól értelmezett, ha a $\beta(z) = 1 - \sum \beta_i z^i$ polinom stabil, és a $c > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ feltételek teljesülnek. Továbbá, ha (x_t) a (6.5) és 6.7) egyenletekkel van definiálva, akkor ennek stacionaritásához szükséges és elegendő, hogy

$$\sum_{i=1}^p (\alpha_i + \beta_i) < 1$$

teljesüljön.