

Matematikai Analízis II.

Extra szorgalmi HF-k

2019. március 11.

A megoldás beadásának határideje mindig 1 hét.

1. *Február 11.* Írjuk fel az alábbi hatványsor összegfüggvényének zárt alakját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

2. *Február 14.* Írjuk fel a binomiális sort $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$ esetére:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

ahol

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

3. *Február 18.* Igazoljuk közvetlenül, hogy az alábbi függénysor nem egyenletesen konvergens bármilyen $(-r, r)$ intervallumban, ahol $r > 0$:

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \dots$$

4. *Február 21.* 1. RÉSZ. A Fourier sorfejtés kiterjeszthető $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvényekre, ahol az ÉT $[-1, 1]$:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(k\pi x) + \beta_k \sin(k\pi x)).$$

Vajon hogyan számolhatók az együtthatók? $\alpha_k = ?$ $\beta_k = ?$

2. RÉSZ. Adott $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, $f(0) = 0$. Igazoljuk, hogy akkor előállítható csak *sinus* ill. csak *cosinus* függvények segítségével:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx). \quad A_k = ?, \quad B_k = ? \end{aligned}$$

5. *Február 25.* Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ halmaz torlódási pontjai mik lehetnek: belső pont, külső pont, határ pont?
6. *Február 28.* A Bolzano tételben kétváltozós függvényekre vajon miért kell az ÉT Összefüggősége? Ellenpéldát mutassanak.
7. *Március 4.* A kétváltozós függvények határértékét megpróbálhatjuk két egyszeres határértékkel kiszámolni. Ami könnyen igazolható:

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \right)$$

Mutassanak ellenpéldát arra, hogy másik irányú következés nem igaz: az egyszeres határértékek léteznek és egyenlőek, mégis, a kettős határérték nem létezik.

8. *Március 7.* 1. RÉSZ. Az alábbi függvény parciális deriváltjai léteznek mindenütt, az origóban is, mégsem folytonos az origóban. Miért?

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. RÉSZ. Egy kétváltozós függvénynek hány n -edrenű parciális deriváltja van? Ha ezek folytonosak, hány különböző van köztük? (Indoklást is kérek.)

9. *Március 11.* Mit mondhatunk az $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvény origóbeli teljes differenciálhatóságáról?