

Klasszikus fizika konzultáció

Farkas Domonkos László, Németh Sebestyén

2018. április 17.

Kedves Olvasó! Az alábbi jegyzet a PPKE ITK 2017/18/2 félév során indított *Klasszikus Fizika* tárgyat segítő konzultációhoz készült, és az Oktató által kiadott feladatsorok megoldását veszi végig. A jegyzet szerzői a hibákért, elvi tévedésekért felelősséget nem vállalnak, és kérik az Olvasót, hogy ha ilyenbe ütközik, feltétlenül jelezze. Köszönettel, és jó munkát kívánva:

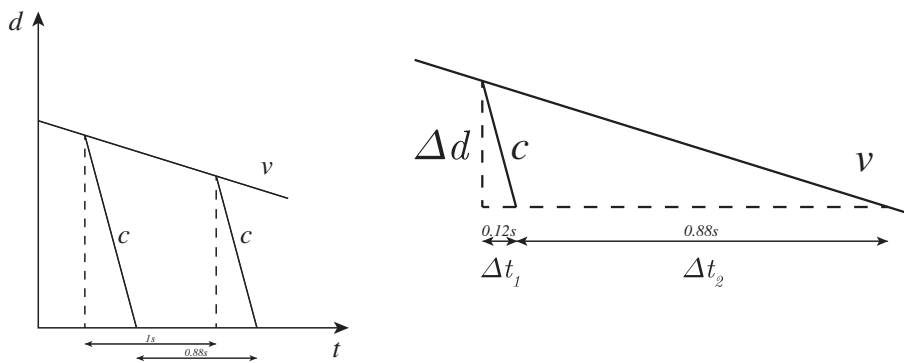
a szerzők

1. Feladatsor

1.1. Feladat

Egyenes pályán haladó autó a pálya mellett álló megfigyelő felé közeledve 1 másodpercen keresztül hangjelzést ad. A megfigyelő 0.88s hosszúságú hangjelzést észlel. Mekkora az autó sebessége? (A hang terjedési sebessége $330 \frac{m}{s}$.)

Megoldás Készítsünk egy távolság-idő grafikont. Jelezze egy egyenes a megfigyelő és az autó távolságát az idő függvényében (meredeksége, azaz a jármű sebessége v), két egyenes pedig a kibocsátott hanghullám eleje és vége távolságát a megfigyelőtől (meredeksége c). A t tengely azon szakaszát, amelyen a megfigyelő hangot észlel felvetítjük, így kapjuk a következő ábrát.



A Δd távolságot a hang Δt_1 , a jármű pedig $\Delta t_1 + \Delta t_2$ idő alatt teszi meg, ebből következik (1).

$$\Delta d = c \cdot \Delta t_1 = v \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) \quad (1)$$

$$v = c \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = 330 \frac{m}{s} \cdot \frac{0.12s}{1s} = 39.6 \frac{m}{s} \quad (2)$$

1.2. Feladat

Egyenes pályán haladó vonat a pálya mellett álló autó felé közeledik. Az autó 1 másodpercen keresztül kürtjelzést ad. A vonaton utazó megfigyelő 0.88s hosszúságú hangjelzést észlel. Mekkora a vonat sebessége? (A hang terjedési sebessége $330 \frac{m}{s}$.)

Megoldás Látszólag ugyanaz a feladat, mint az (1.1), de valójában van különbség. Ott ugyanis a hang hangsebességgel közeledik a megfigyelőhöz (hiszen a hang közeghez viszonyított sebessége nem függ attól, hogy az őt kibocsátó objektum milyen sebességgel halad), míg ez esetben a hangsebességhez hozzáadódik a mozgó megfigyelő sebessége is. Tehát az (1)-es egyenlet itt:

$$\Delta d = (c + v) \cdot \Delta t_1 = v \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2)$$

amiből:

$$v = c \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 45 \frac{m}{s}$$

1.3. Feladat

A normál CD-k általában 650 Mbyte kapacitásúak. A 20kHz-es (emberi fül számára még hallható) zenei hangok sztereóban, 16 bites felbontásban történő átviteléhez legalább $150 \frac{kbyte}{s}$ ("egyszeres") adatátviteli sebesség (DTR) szükséges. Becsüljük meg, hogy hány percnyi zenei anyag rögzíthető egyetlen CD-n!

Megoldás A megoldásnál figyelembe kell vennünk a számítógépes adat mértékegységénél felépő elnevezésbeli következtetlenségeket, ami a Mega (M) és Mebi (Mi), kilo (k) és kibi (ki), stb. közötti különbséget. Ebben a megoldásban mindenhol az eredeti jelentésükben használjuk a prefixumokat, azaz a 10 hatványaiként.

adat: $650 Mbyte = 6.5 \cdot 10^5 kbyte$

átviteli sebesség: $150 \frac{kbyte}{s}$

$$t = \frac{adat}{átviteli\ sebesség} = 4.33 \cdot 10^3 s = 72.7 min$$

1.4. Feladat

Becsülje, meg, hogy milyen hosszú vonalon helyezkedik el az információ egy CD-lemeznél, ha az egymás mellett futó "vonalak" közti távolság $1.6\mu m$. Mekkora egy vonal mentén a "pit"-ek (ez feleltethető meg 1 bit-nek) közti átlagos távolság? (A CD lemeznél $R_k = 58mm$, $R_b = 25mm$)

Megoldás Az adatspirált jó közelítéssel tekinthetjük koncentrikus köröknek. Az adatot tartalmazó *hasznos* körgyűrű sugara:

$$R_h = R_k - R_b = 33mm$$

A koncentrikus körök száma:

$$n = \frac{R_h}{\delta d} \approx 20625, \quad ahol \quad \delta d = 1.6\mu m$$

Feltevésünkkel élve a spirál hossza a körök kerületeinek összege:

$$\begin{aligned} l &= \sum_{i=1}^n 2(R_b + i\delta d)\pi = 2\pi \cdot (nR_b + \sum_{i=1}^n i\delta d) = \\ &= 2\pi \cdot \left(nR_b + \delta d \frac{n(n+1)}{2} \right) = 5.375 \cdot 10^6 mm \quad (= 5.375 km!) \end{aligned}$$

Legyen n_{pit} a pitek száma, l_{pit} pedig egy pit hossza. Egy CD lemez mérete $650Mbyte$ (1.3). Ekkor:

$$n_{pit} = 650 \cdot 10^6 \cdot 8 = 5.2 \cdot 10^9$$

$$l_{pit} = \frac{l}{n_{pit}} = 1.033\mu m$$

1.5. Feladat

Függőlegesen fölfelé, $v = 20\frac{m}{s}$ sebességgel elindított kő $t = 3s$ múlva mekkora sebességgel rendelkezik ($g = 10\frac{m}{s^2}$)? Rajzolja föl a sebességet az idő függvényében és ennek alapján határozza meg, hogy mekkora volt a kő átlagsebessége a $[0s, 3s]$ időintervallumon!

Megoldás Tudjuk, hogy a gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja: $a(t) = \dot{v}(t)$, ebből:

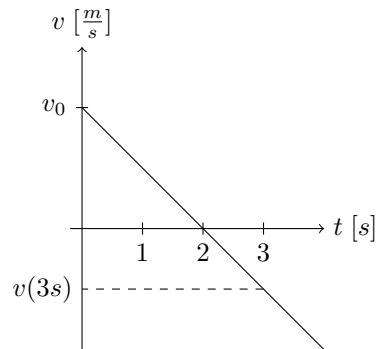
$$v(t) = \int a(t) dt + v_0$$

Esetünkben $a(t) = -g$ időfüggetlen konstansnak tekinthető, tehát:

$$v(t) = \int a(t) dt + v_0 = v_0 - gt$$

$t = 0s$ időpillanatban $v_0 = 20\frac{m}{s}$, valamint $g = 10\frac{m}{s^2}$, vagyis:

$$v(3s) = v_0 - gt \Big|_{t=3s} = 20\frac{m}{s} - 10\frac{m}{s^2} \cdot 3s = -10\frac{m}{s}$$



A mozgás sebesség-idő grafikonja alább.

Az átlagsebességet a következő módokon számolhatjuk:

1. v_0 és v_{3s} között $v(t)$ lineáris egyenes:

$$v_{avg} = \frac{v_0 + v_{3s}}{2} = 5 \frac{m}{s}$$

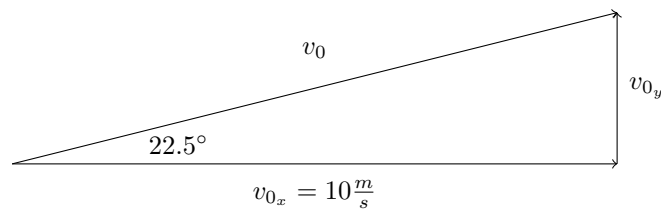
2. Az átlagsebesség a megtett út (grafikon alatti terület) és az eltelt idő hányadosa:

$$v_{avg} = \frac{s}{t} = \frac{\frac{v_0 \cdot 2s}{2} + \frac{v_{3s} \cdot 1s}{2}}{3s} = 5 \frac{m}{s}$$

1.6. Feladat

Távolugró vízszintes(!) irányú sebessége az ugrás pillanatában $10 \frac{m}{s}$. Az elugrás szöge 22.5° ($\sin(22.5^\circ) = 0.3827$, $\cos(22.5^\circ) = 0.9239$, $\tan(22.5^\circ) = 0.4142$). Milyen messzire repül az ugró, és mennyi ideig tartózkodik a levegőben? (Az ugrást úgy modellezzük, mint egy tömegpont hajítását. (A nehézségi gyorsulás: $g = 10 \frac{m}{s^2}$)

Megoldás A merőleges komponensekre bontás alapján:



$$v_{0y} = v_{0x} \cdot \tan(\alpha) = 4.142 \frac{m}{s}$$

A hajítás y irányú komponense tekinthető felfele hajításnak, melynek sebességegyenlete az (1.5) feladatban levezetettek szerint:

$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

$$v_{becsap_y} = -v_{0_y} = v_{0_y} - gt_{becsap}$$

$$t_{becsap} = \frac{2 \cdot v_{0_y}}{g} = 0.828s$$

Az x irányú komponens egyens vonalú egyenletes mozgás, ezért:

$$d = v_{0_x} \cdot t_{becsap} = 8.28m$$

1.7. Feladat

Harmonikus rezgést végző test maximális sebessége $1 \frac{m}{s}$, maximális gyorsulása $1 \frac{m}{s^2}$. A rezgőmozgás fázisszöge 270° . Hol van a test a $t = 0s$ időpillanatban? Mekkora a sebessége és a gyorsulása?

Megoldás Tudjuk, hogy $\varphi_0 = 270^\circ = \frac{2}{3}\pi$, valamint:

$$v_{max} = 1 \frac{m}{s} \quad (3)$$

$$a_{max} = 1 \frac{m}{s^2} \quad (4)$$

A harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvénye $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$, ebből

$$v(t) = \dot{x}(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5)$$

és

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (6)$$

Látható, hogy a $v(t)$ függvény $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$ esetén, $a(t)$ pedig $\sin(\omega t + \varphi_0) = -1$ esetén éri el maximumát. Tehát:

$$\left. \begin{array}{l} (3), (4) \implies v_{max} = A\omega \\ (5), (6) \implies a_{max} = A\omega^2 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} A = 1m \\ \omega = 1 \frac{1}{s} \end{array}$$

A $t = 0s$ pillanatban felvett értékek meghatározásához elég behelyettesítenünk az egyenletekbe:

$$x(0) = 1m \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -1m$$

$$v(0) = 1m \cdot 1 \frac{1}{s} \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0 \frac{m}{s}$$

$$a(0) = -1m \cdot 1^2 \frac{1}{s} \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1 \frac{m}{s^2}$$

1.8. Feladat

Egy egyenletesen mozgó autó sebessége $72 \frac{km}{h}$, a kerekének sugara $25cm$. Mekkora a kerületen levő, gumiba szorult kavicsnak a sebessége? Írja fel a kavicsnak a pályaequationét külső, illetve a kocsival együtt utazó megfigyelő koordináta-rendszerében!

Megoldás A kerekek tisztán gördülnek, tehát a kerék aktuálisan földdel érintkező pontja állónak tekinthető.

$$v - v_k = 0 \quad \longrightarrow \quad v_k = v$$

$$v_k = R \cdot \omega \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{v}{R} = 80 \frac{1}{s}$$

Ahol v az autó sebességének, v_k a kerék kerületi sebességének nagysága. A kerék forgási iránya miatt $\varphi = -\omega t + \varphi_0$.

$$\underline{v}_{kavics}(t) = \underline{v}_k(t) + \underline{v}(t) = v_k \cdot \begin{bmatrix} \sin(-\omega t + \varphi_0) \\ -\cos(-\omega t + \varphi_0) \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = v \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sin(-\omega t + \varphi_0) \\ -\cos(-\omega t + \varphi_0) \end{bmatrix}$$

A kavics sebességének nagysága pedig:

$$|\underline{v}_{kavics}(t)| = v \cdot \sqrt{[1 + \sin(-\omega t + \varphi_0)]^2 + [-\cos(-\omega t + \varphi_0)]^2}$$

Pályaegyenletek:

1. Külső megfigyelő esetén a pályaegyenlet egy x irányú egyenes vonalú egyenletes mozgás és a körmozgás szuperpozíciója (másképpen $\underline{r}(t) = \int \underline{v}_{kavics} dt$):

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} v \cdot t + R \cdot \cos(-\omega t + \varphi_0) \\ R \cdot \sin(-\omega t + \varphi_0) \end{bmatrix}$$

2. Együtt utazó megfigyelő esetén egyszerű körmozgást végez ($\underline{r}(t) = \int \underline{v}_k dt$):

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos(-\omega t + \varphi_0) \\ R \cdot \sin(-\omega t + \varphi_0) \end{bmatrix}$$

1.9. Feladat

A kereskedelemben ma kapható merevlemezes tárolókban (winchester) gyakran több lemez található, amelyek közös tengelyre vannak rögzítve.

A lemezek $2R$ átmérője $3.5''$ körüli ($1'' = 2.54cm$). A tipikus, alkalmazott fordulatszámok: $n = 5400rpm$, $n = 7200rpm$ ($1rpm = 1 \frac{fordulat}{perc}$). Az adattárolásra használt mágnesezhető korong belső sugara $r \approx 2.2cm$.

Számítsuk ki, hogy egy $250Gb$ -os, $7200rpm$ -es merevlemeznél mekkora a forgó lemez széleének maximális sebessége és centripetális gyorsulása? Becsüljük meg, hogy a lemez egy $1mm \times 1mm$ -es felületére legkevesebb hány A4-es gépelt oldal tartalma fér rá?

1.10. Feladat

Becsüljük meg, hogy egy 24-szeres (CAV) olvasónál, ahol a lemez fordulatszáma $5000rpm$, mekkora a CD-lemez kerületén egy pontnak a sebessége és centripetális gyorsulása! (A CD lemeznél $R_k = 58mm$, $R_b = 25mm$)

Megoldás Adatok: $f = 5000 \frac{1}{\text{min}}$, $R = 58 \text{ mm}$, $v = ?$, $a_n = ?$.

$$\omega = 2\pi f = 31415.92 \frac{1}{\text{min}} = 523.599 \frac{1}{s}$$

$$v = \omega \cdot R = 30.369 \frac{m}{s}$$

$$a_c = a_n = \omega^2 R = \left(\frac{v^2}{R}\right) = 15\,901.042 \frac{m}{s^2}$$

1.11. Feladat

Egyenes mentén mozgó tömegpont kitérés-idő függvénye:

$$x(t) = t^5 + \sin\left(2t + 3\frac{\pi}{2}\right) + t \cdot e^{-t} \quad [m]$$

A $t = 0$ másodpercben hol tartózkodik a test, és mennyi a sebessége?

Megoldás

$$x(0) = 0^5 + \sin\left(2 \cdot 0 + 3\frac{\pi}{2}\right) + 0 \cdot e^0 = -1 \quad [m]$$

$$v(0) = \dot{x}(0) = 5t^4 + 2 \cdot \cos\left(2t + 3\frac{\pi}{2}\right) + e^{-t} + t(-e^{-t}) \Big|_{t=0} = 1 \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

1.12. Feladat

Egyenes mentén mozgó test a $t = 0s$ időpillanatban az origóban található. Kitérését az idő függvényében az alábbi összefüggés adja meg (kitérés méterben, idő másodpercben mérve):

$$x(t) = C + t^3 + t \cdot e^{-t} + \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \quad [m]$$

Mekkora a C értéke, valamint a test sebessége a $t = 0s$ időpillanatban?

Megoldás A mozgás kezdetén nincs kitérése a testnek, tehát $x(0) = 0$.

$$x(0) = C + 0^3 + 0 \cdot e^{-0} + \sin\left(2 \cdot 0 + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \implies C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v(0) = \dot{x}(0) = 3t^2 + e^{-t} + t(-e^{-t}) + 2 \cdot \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) \Big|_{t=0} = 2 \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

1.13. Feladat

Körpályán mozgó test helyzetét az

$$\underline{r}(t) = \underline{i} \cdot \cos(2t + t^2) + \underline{j} \cdot \sin(2t + t^2) \quad [m]$$

függvény írja le, ahol t a másodpercben mért idő értéke. Mekkora a test sebessége, a centripetális és tangenciális gyorsulása a $t = 1$ másodpercben?

$$\text{Mivel } \underline{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{valamint } \underline{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{ezért } \underline{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t + t^2) \\ \sin(2t + t^2) \end{bmatrix} \quad [m]$$

Megoldás (Mivel 2 dimenziós a mozgás, és egyik koordinátában sinusos, másikban cosinusos, valamint az argumentumok $(2t + t^2)$ és az amplitúdók (1) egyeznek, ez valóban egy körmozgás.) A sugár (R) nyilván $1m$. Az elfordulás szögére egyenletesen gyorsuló mozgás esetén a következőt írhatjuk:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\beta}{2} \cdot t^2$$

Ez megfeleltethető a mi esetünknek, $\varphi_0 = 0$, $\omega_0 = 2\frac{1}{s}$ és $\beta = 2\frac{1}{s^2}$ helyettesítéssel. Így már könnyen megadhatjuk a kérdéses mennyiségeket:

$$v(1) = \omega_0 + \beta \cdot t \Big|_{t=1s} = 2 + 2 = 4\frac{m}{s}$$

$$a_{cp}(1) = \frac{v(1)^2}{R} = 16\frac{m}{s^2}$$

$$a_t(1) = \beta \cdot t = 2\frac{m}{s^2}$$

1.14. Feladat

Elhajítunk egy testet a tér $\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{bmatrix} m$ koordinátájú pontjából $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$ sebességgel.

Írjuk fel a pályagörbe egyenletét, az idő függvényében! Adjuk meg a sebességet és a gyorsulást az idő függvényében!

Hol lesz a test $2s$ elteltével, és mekkora lesz a sebességének a nagysága?

A nehézségi gyorsulás értéke $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$.

Megoldás A gyorsulás értéke a nehézségi gyorsulás értéke, azaz: $\underline{a}(t) = \underline{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$ konstans.

$$\underline{v}(t) = \int \underline{a}(t) dt = \underline{v}_0 + \underline{g} \cdot t = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 - 10t \end{bmatrix} \implies v(2s) = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-15)^2} = 15.811 \frac{m}{s}$$

Az elmozdulást a sebesség határozott integrálja adja:

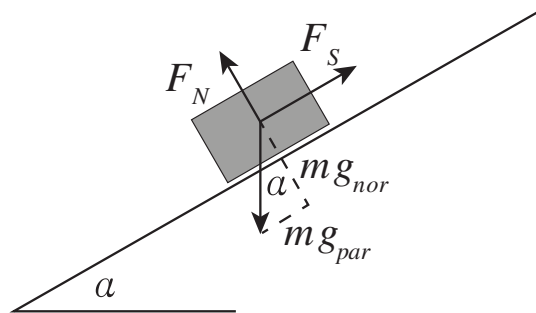
$$\Delta \underline{r}(2s) = \int_0^2 \underline{v}(t) dt = \int_0^2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 - 10t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 3t \\ 4t \\ 5t - 5t^2 \end{bmatrix} \Big|_0^2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -10 \end{bmatrix} [m]$$

Végül pedig a test pozíciója:

$$\underline{r}(2s) = \underline{r}_0 + \Delta \underline{r}(2s) = \begin{bmatrix} 16 \\ 23 \\ 10 \end{bmatrix} m$$

1.15. Feladat

30°-os lejtőre helyezett test a lejtőn lecsúszik ($g = 10 \frac{m}{s^2}$). Az indulástól számítva 1s múlva a sebessége $2.5 \frac{m}{s}$. Mekkora a csúszási súrlódási együttható értéke?



Megoldás

$$v(1s) = a \cdot t \Big|_{t=1s} \implies a = 2.5 \frac{m}{s^2}$$

A lejtőre merőleges (*normal*) erők eredője 0:

$$m \cdot g_{nor} - F_N = 0 \implies F_N = mg \cos \alpha$$

A lejtővel párhuzamos (*parallel*) irányban pedig:

$$m \cdot a = m \cdot g_{par} - F_S = mg \sin \alpha - mg \cos \alpha \cdot \mu$$

Ebből a súrlódási együttható értéke:

$$\mu = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} = \frac{5 - 2.5}{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

1.16. Feladat

Adja meg az $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \frac{m}{s^2}$ mozgásegyenlet megoldását a $\underline{v}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{m}{s}$ és $\underline{r}(0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} m$ kezdeti feltételek mellett!

1.17. Feladat

Adja meg a P pont (r, φ) polár-koordinátáit, ha Descartes-koordinátái: $(x, y) = (3, 4)$.
Adja meg a P pont (x, y) Descartes-koordinátáit, ha polár-koordinátái $(r, \varphi) = (2, \frac{\pi}{6})$.
(Megjegyzés: A zsebszámológépek egy részében talál "közvetlen billentyűt" a különböző koordináták közötti átváltásra. Próbálja meg használni!)

1.18. Feladat

Adja meg a P pont $\begin{bmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{bmatrix}$ henger-koordinátáit, ha Descartes-koordinátái: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$!

Adja meg a P pont $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ Descartes-koordinátáit, ha gömbi koordinátái $\begin{bmatrix} r \\ \nu \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$!

1.19. Feladat

CD lemeznél az információt hordozó spirális vonal egy körbefordulás során $d = 1.6 \mu m$ távolságra távolodik el az origótól. Írja fel a spirálvonal egyenletét polárkoordinátás alakban (Arkhimédészi spirál)!

1.20. Feladat

α szögű derékszögű háromszöget R sugarú hengerre felcsavarjuk (alapja egy síkba kerül). Adja meg az átfogónak, mint térgörbének az egyenletét!