A FÁZIS PORTÉ ÁBRÁZOLÁSA

példák és sok geometria, kevesebb algebra

ALAPVETŐ A nyom-determináns diagramm

ÉS A LINEARIZÁLÁS MÓDSZERE

külön ábrákon

1 $$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

mivel $\lambda_{1,2} = -1 \pm i \notin \mathbb{R}$

áttérünk másodrendű egyenletre

$$y = x + \dot{x}$$

$$\ddot{x} = -\dot{x} + \dot{y} = -\dot{x} - x - y = -\dot{x} - x - x - \dot{x}$$

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

$$x(t) = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t$$

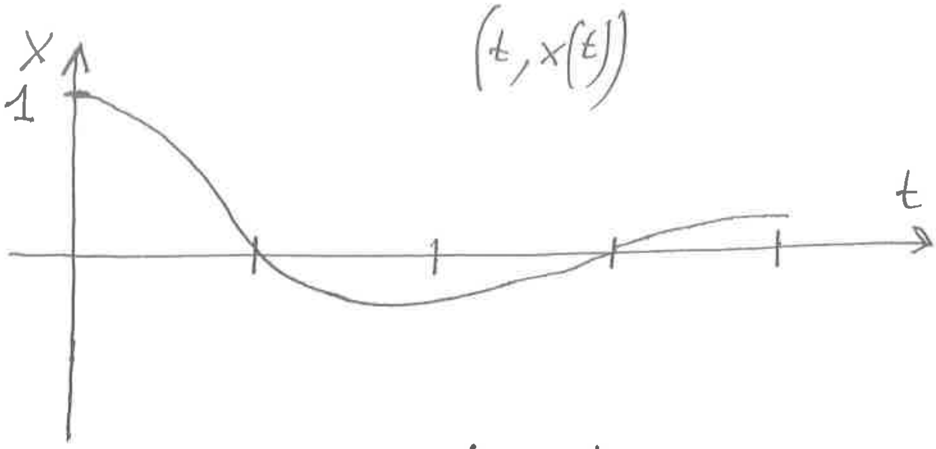
$$y(t) = -c_1 e^{-t} \sin t + c_2 e^{-t} \cos t$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

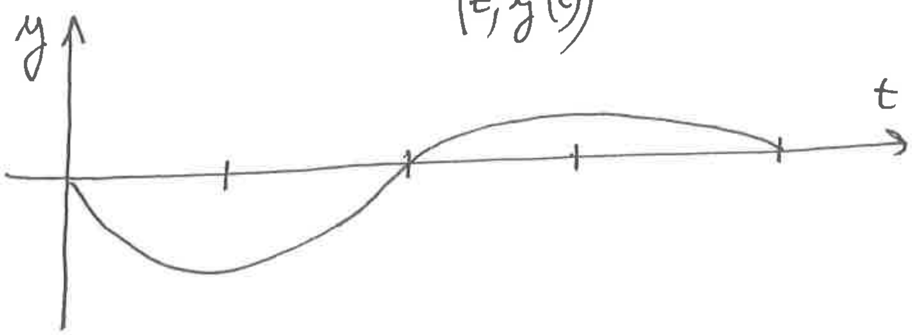
ha $\left.\begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{matrix}\right\}$, akkor $c_1 = 1$, $c_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

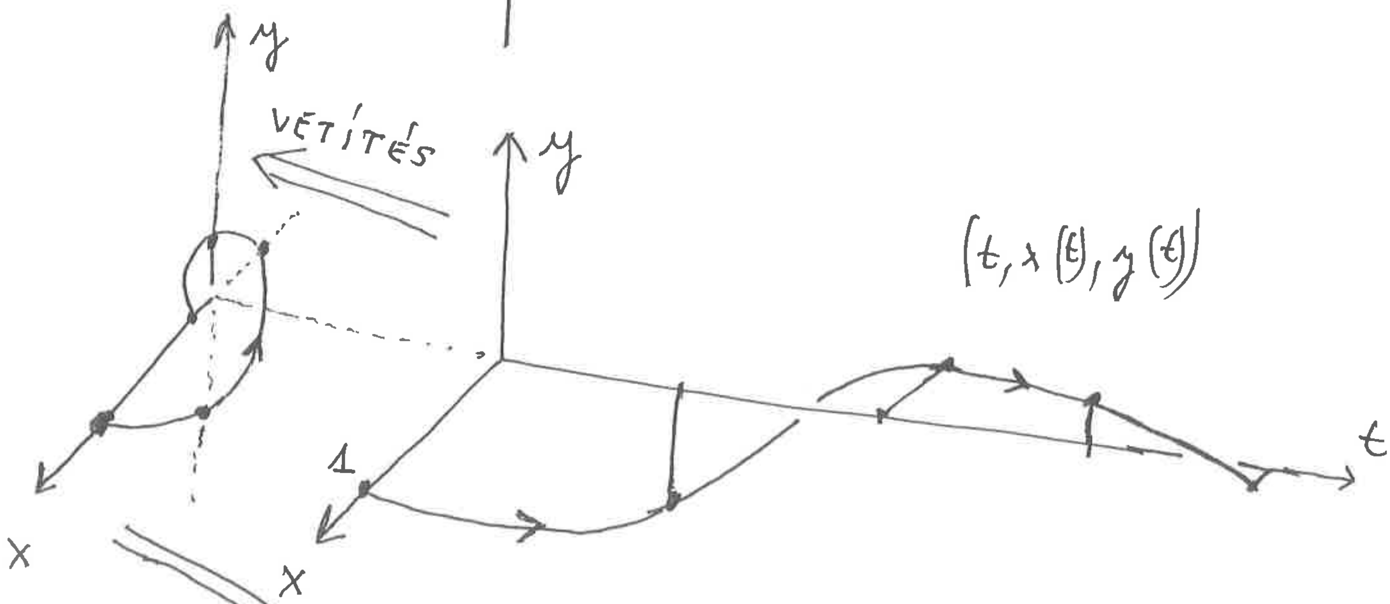
$0 \leq t \leq 2\pi$



$(t, x(t))$



$(t, y(t))$

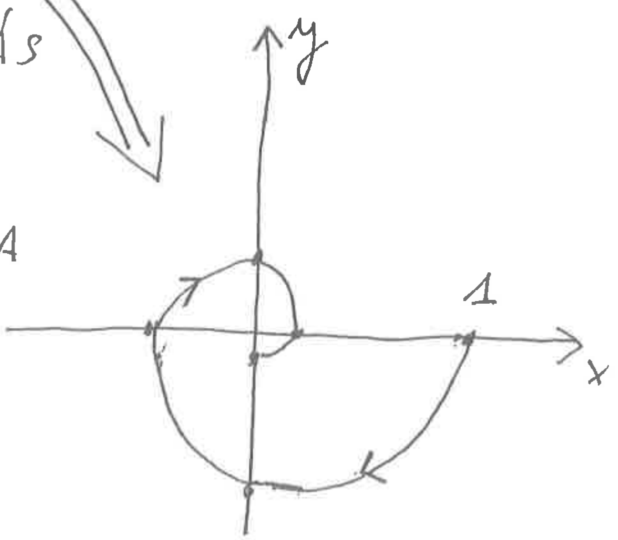


$(t, x(t), y(t))$

KIFORGATÁS

AZ $x-y$

ALAPSÍKBA



$(x(t), y(t))$

$\boxed{\text{EZ A FÁZISPORTRÉ}}$

hasonlóan

$$\dot{x} = f(x,y)$$

$$\dot{y} = g(x,y)$$

rövid módon

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$\alpha < 0$

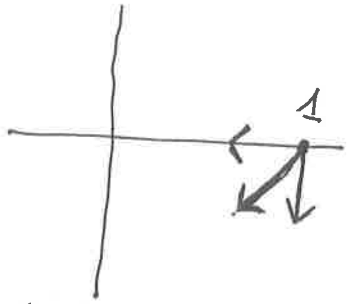
befelé spirális

az előző volt

merre forog?

elég egy pontban ábrázolni

$$\dot{x} = -x + y$$
$$\dot{y} = -x - y$$



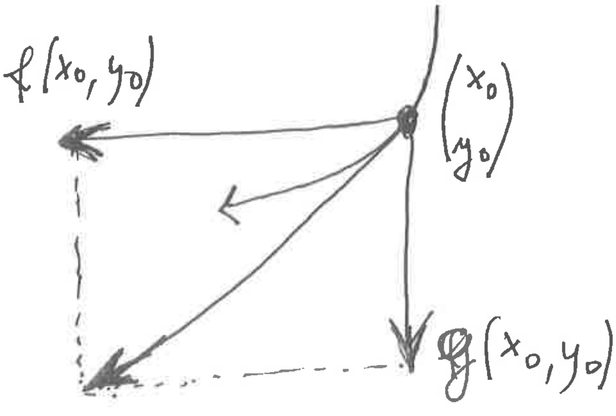
balra forog

$$\dot{x}(0) = f(x(0), y(0))$$
$$\dot{y}(0) = g(x(0), y(0))$$

$\left.\begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{array}\right\}$ adott

a fázisportré bármely pontjában ismerjük

az ottani megoldásgörbe érintővektorát



így kapjuk a nyom-determináns

diagram nem elfajult eseteit is,

ha $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\qquad c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{s}_2$

(2) elfajult esetek: $\exists k$, hogy $\mathrm{Re}\,\lambda_k = 0$ (IV)

(α) a linearizálás módszere nem működik,

a magasabbrendű tagok is számítanak

(β) a nem-elég-ügyesen alkalmazott

numerikus módszerek is bajt okoznak

(α)

$m\ddot{x} = -kx$ Newton rugó-egyenlete

(L) az $m=1$, $k=1$ esetben

$$\ddot{x} + x = 0 \iff \left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned}\right\} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$E(t) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Rightarrow \dot{E}(t) = x\dot{x} + y\dot{y}\Big|_{\substack{\dot{x}=y \\ \dot{y}=-x}} = 0$$

rugóban tárolt + mozgási energia = állandó

$$\text{de: } \left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 \\ \dot{y} &= -x - y^5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dot{E}(t) = x\dot{x} + y\dot{y}\Big|_{\substack{\dot{x}=y-x^3 \\ \dot{y}=-x-y^5}} = -x^4 - y^6 < 0$$

(N)

$$E(t) \longrightarrow 0 \;\&\; \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ha } t \to \infty$$

$$\text{de: } \left.\begin{aligned} \dot{x} &= y + x^3 \\ \dot{y} &= -x + y^5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \dot{E}(t) = x\dot{x} + y\dot{y}\Big|_{\substack{\dot{x}=y+x^3 \\ \dot{y}=-x+y^5}} = x^4 + y^6 > 0$$

(M)

$$E(t) \longrightarrow \infty \text{ ha } t \to \infty$$

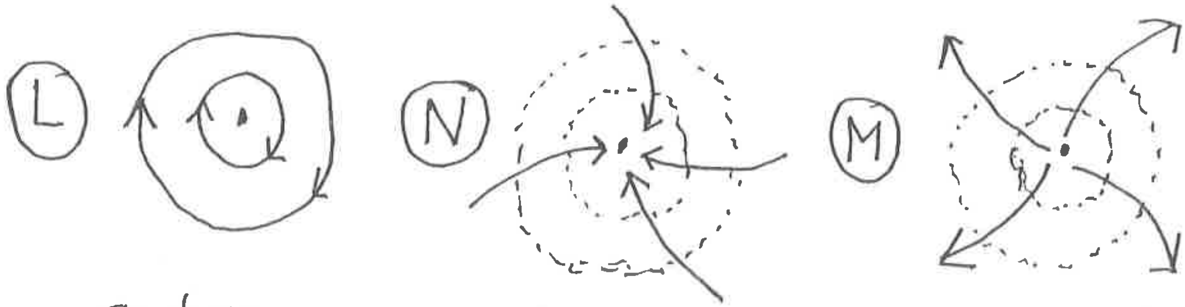
V

Az $x\dot{x} + y\dot{y}\Big|_{\substack{\dot{x} = f(x,y)\\ \dot{y} = g(x,y)}} = (x \quad y)\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$

skaláris szorzat, melynek geometriai jelentése

$\Big\langle$ az energia-szintfelület normálvektora / az $\left.\begin{matrix}\dot{x} = f(x,y)\\ \dot{y} = g(x,y)\end{matrix}\right\}$ diffegyenlet trajektóriájának érintővektora $\Big\rangle$

a tetszőlegesen adott $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ pontban $\Longrightarrow$

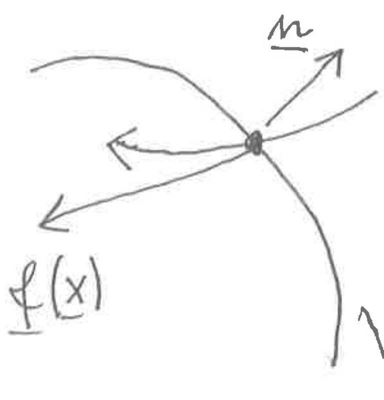


centrum globális vonzás globális taszítás

ÁLTALÁBAN: (E) $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ & $V: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\dot{V}_{(E)} \overset{def}{=} \frac{d}{dt} V(x(t))\Big|_{t=0} = \langle \underline{grad}\, V(\underline{x}(t)), \dot{\underline{x}}(t) \rangle\Big|_{t=0}$$

$$= \langle \underline{grad}\, V(\underline{x}), \underline{f}(\underline{x}) \rangle$$



$\underline{grad}\, V(\underline{x}) = \underline{n}$

$\dot{V}_E < 0$

tompaszög: „befelé" metsz

LJAPUNOV

FÜGGVÉNY

FELÜLET

(B)

VI

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}) \qquad \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + h\,\underline{f}(\underline{x}_k), \quad k = 0,1,2,\ldots$$
$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

explicit Euler-módszer, $h > 0$ lépésközzel

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_k \\ -x_k \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$\boxed{t = kh:\ \text{a numerikus energia}}$ $\Updownarrow$

$$\Longrightarrow \frac{x_{k+1}^2 + y_{k+1}^2}{2} = (1+h^2)\,\frac{x_k^2 + y_k^2}{2} \iff E_{k+1} = (1+h^2)\,E_k$$

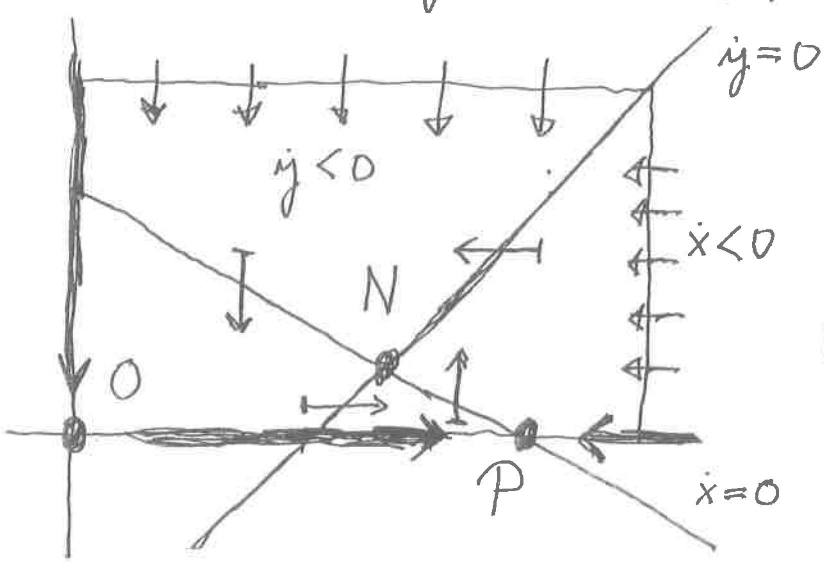
$t \in [0, \infty)$, h fix $\Longrightarrow$ $E_N \longrightarrow \infty$ ha $N \longrightarrow \infty$

$t \in [0, T]$, $h = \dfrac{T}{N}$, T fix $\Longrightarrow$ $E_N \longrightarrow E_0$ ha $N \longrightarrow \infty$

megőrzi az energiát az explicit Euler-módszer (?!)

nem, legalábbis nem "elég jól".

(3) nemcsak az energia lehet Ljapunov-fgv



$$(E)\begin{cases} \dot{x} = x\left(1 - \dfrac{x}{2} - y\right) \\ \dot{y} = y(-1 - y + x) \end{cases}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

VII

$$\text{Jacobi} = J = \begin{pmatrix} 1-x-y & -x \\ y & -1-2y+x \end{pmatrix}$$

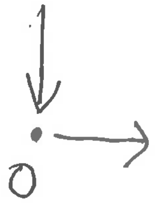
$$J(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad J(P) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J(N) = \begin{pmatrix} -2/3 & -4/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 1 \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda_1 = 1 \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda_2 = -1 \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-\frac{8}{3}}}{2}$$

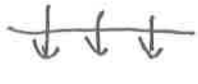
nyeregpont $\qquad$ nyeregpont $\qquad$ vonzó fókusz



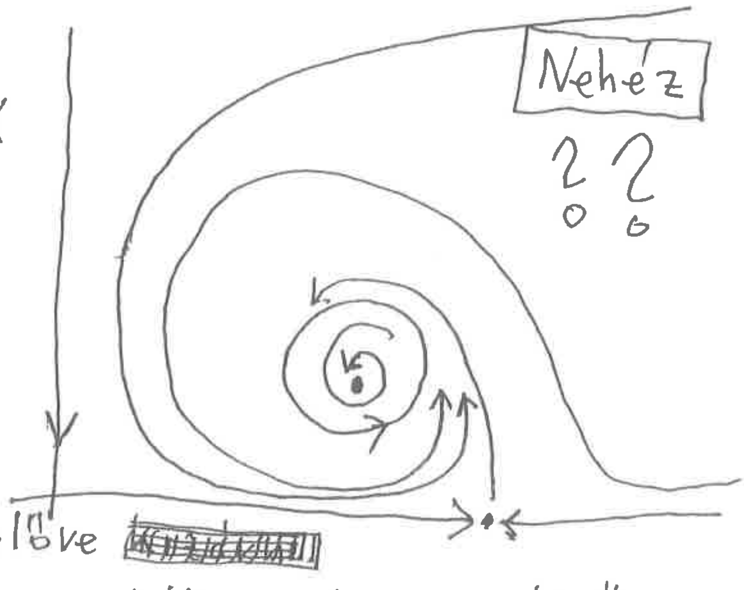
+ forgásirány

nyilak alapján

a nagy téglalap mindent bevonz



Ljapunov-felület-darabok



Az „N" ~~körül~~ ~~esetleges~~ periodikus pályát nem tudjuk egyelőre ~~[crossed out]~~ kizárni. Ehhez nem-lokális módszer kell.

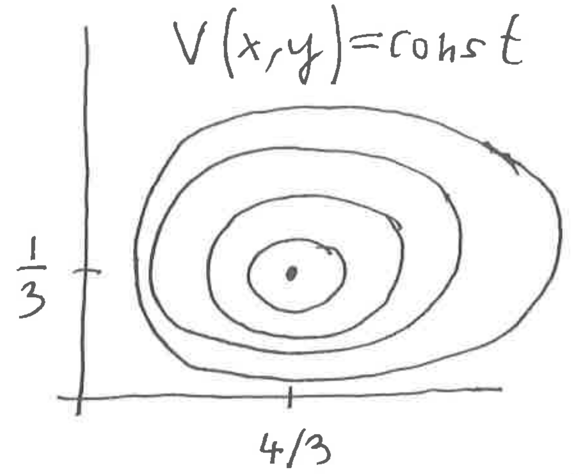
$$V(x,y) = x - \frac{4}{3}\ln x + y - \frac{1}{3} y \qquad x>0,\ y>0$$

VIII

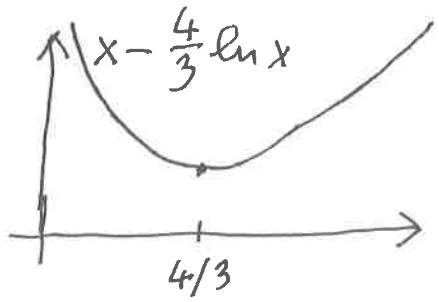
V a teljes int $\mathbb{R}^2_+$-en erős Ljapunov függvénynek bizonyul $\Longrightarrow$ N globálisan vonzó, $\nexists$ periodikus pálya

Valóban:

V minimumhelye $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, többi szintvonala zárt görbe, melyeket a trajektóriák mind befelé metszenek:



$$\dot{V}_{(E)}(x,y) = \ldots\ldots = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 < 0 \quad \text{ha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$



De miért ezzel a V függvénnyel próbálkoztunk?

Ezért:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x\left(\frac{1}{3} - y\right) \\ \dot{y} &= y\left(-\frac{4}{3} + x\right) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y\left(-\frac{4}{3}+x\right)}{x\left(\frac{1}{3}-y\right)}$$

$$\int \frac{\frac{1}{3} - y}{y}\, dy = \int \frac{-\frac{4}{3} + x}{x}\, dx \qquad \text{szétválasztható d.e.}$$

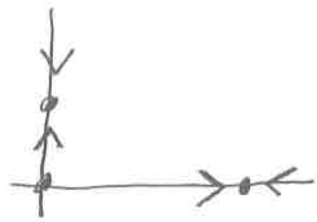
$$\Longrightarrow \frac{1}{3}\ln y - y = -\frac{4}{3}\ln x + x + \text{const}$$

N körül csupa periodikus pálya

4 Néha az elemi érvelés is elég

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= x(4-x-y) \\ \dot{y} &= y\left(1-y+\frac{x}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

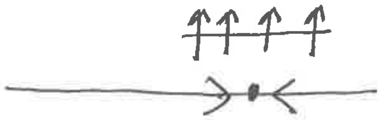
$\partial \mathbb{R}^2_+$-n



$$O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \qquad Q=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad N=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

P felett kicsivel:

$x \approx 4,\ y = \varepsilon$



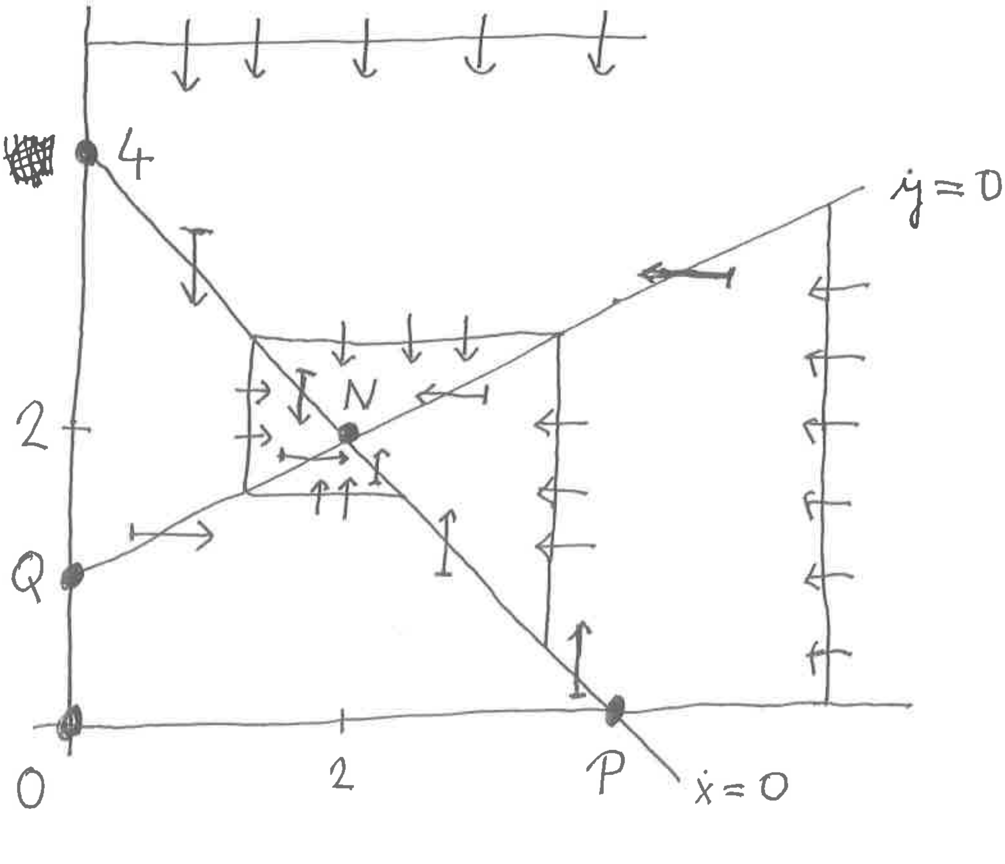
$$\dot{y} \approx \varepsilon(1-\varepsilon+2) > 0$$

Q-tól jobbra kicsivel:

$x = \varepsilon,\ y \approx 1$

$$\dot{x} \approx \varepsilon(4-\varepsilon-1) > 0$$

N körül és a teljes int $\mathbb{R}^2_+$-en:



N globálisan vonzó fókusz

O, P, Q nyereg

5

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x\left(1-\frac{x}{2}-y\right)\\ \dot{y} &= y\left(\frac{3}{2}-x-y\right)\end{aligned}\right\}\qquad J=\begin{pmatrix}1-x-y & -x\\ -y & \frac{3}{2}-2y-x\end{pmatrix}$$

X

$$O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}0\\3/2\end{pmatrix}\qquad N=\begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}$$

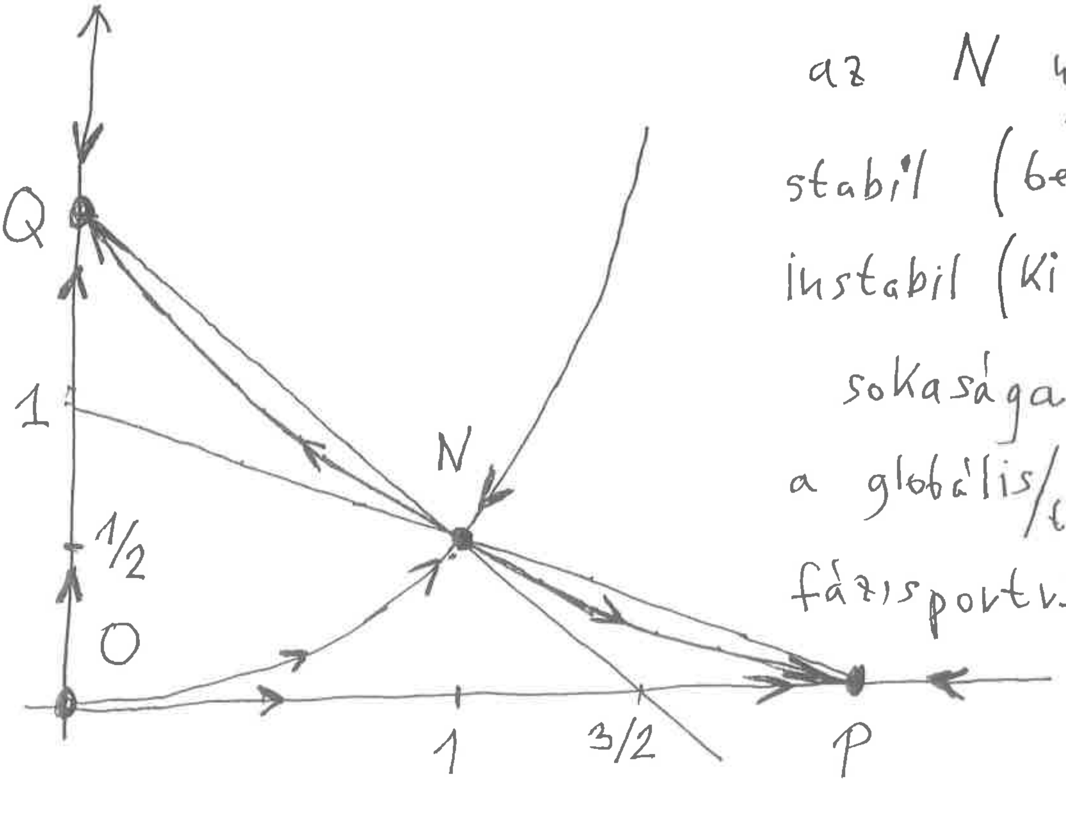
$$J(O)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3/2\end{pmatrix}\qquad J(P)=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1/2\end{pmatrix}\qquad J(Q)=\begin{pmatrix}-1/2 & 0\\ -3/2 & -3/2\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=\frac{3}{2}$ $\underline{s}_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\lambda_1=-1/2$ $\underline{s}_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ $\underline{s}_1=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

$\lambda_2=1$ $\underline{s}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\lambda_2=-1$ $\underline{s}_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\lambda_2=-\frac{3}{2}$ $\underline{s}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

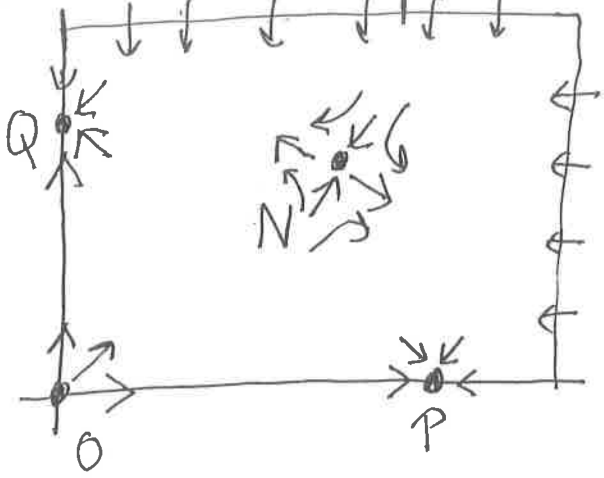
taszító csomó vonzó csomó vonzó csomó

$$J(N)=\begin{pmatrix}-1/2 & -1\\ -1/2 & -1/2\end{pmatrix}\qquad \lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \begin{aligned}\lambda_1&>0\\ \lambda_2&<0\end{aligned}\quad \text{nyeregpont}$$



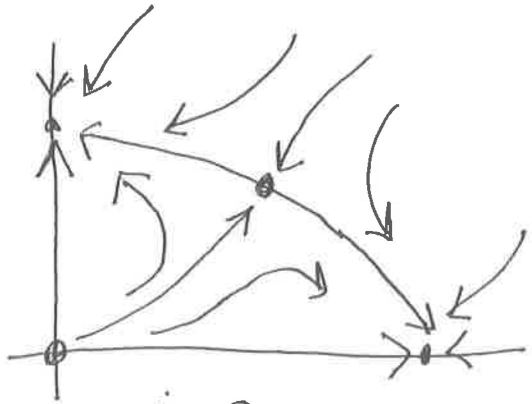
az N nyeregpont stabil (bemenő) és instabil (kimenő) sokasága mint a globális/teljes fázisportré lényege

Ez az érdemi végeredmény fokozatosan alakult ki az egyensúlyi helyzetek körüli lokális fázisportrék "összekapcsolásával", a ∞ távoli pont taszító jellegére is figyelve.



Érezhető, hogy
N-ből P-be és Q-ba
N-be O-ból és a ∞-ből
megy egy-egy trajektória

Ez már szinte elegendő is.

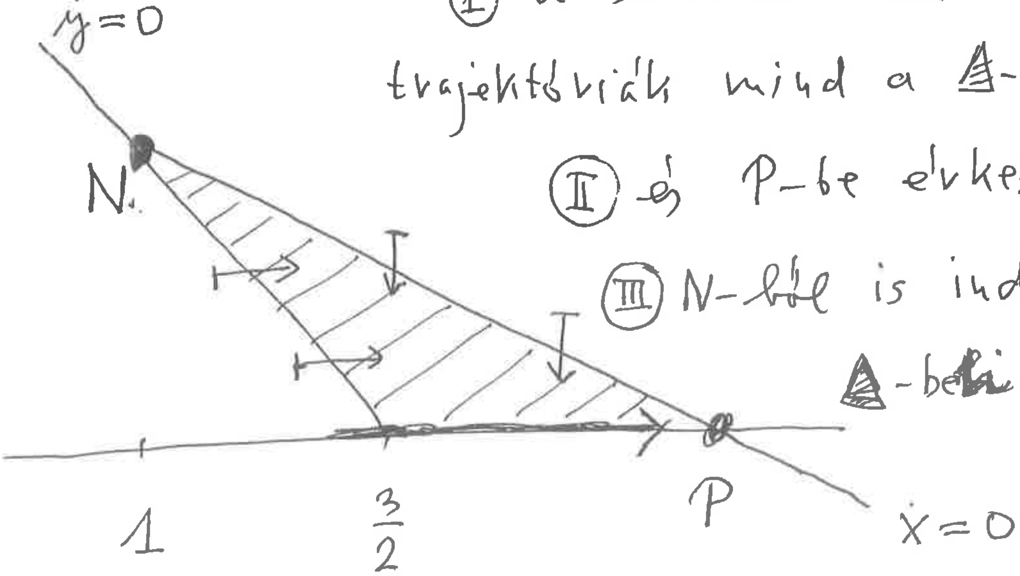


Aki a részletes indoklást is szeretné látni:

(I) a satírozott △-be bejutó trajektóriák mind a △-ben maradnak

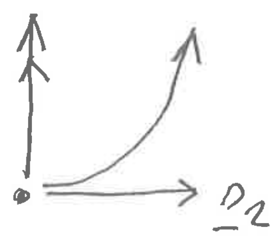
(II) és P-be érkeznek

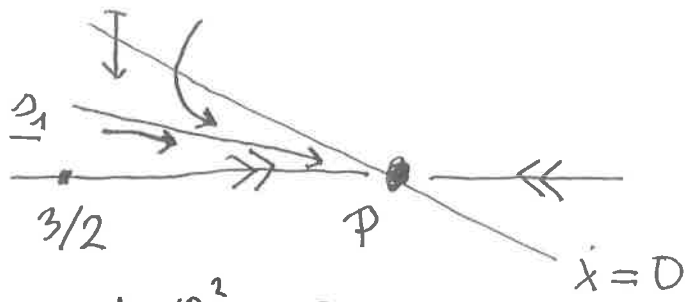
(III) N-ből is indul ki a △-be futó trajektória



(IV) ha volna periodikus pálya, azon belül volna egyensúlyi helyzet, de ez [már tudjuk] nem lehet

Ha „cifrázni" szeretné valaki az ábrát: XII

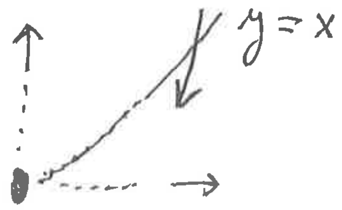




int $\mathbb{R}^2_+$-beli trajektóriák 0 körül s_2-höz simulnak

int $\mathbb{R}^2_+$-beli trajektóriák P körül s_1-hez simulnak

megj.: $y = x \gg 1 \Rightarrow \dot y \approx -2x^2 \ll -\frac{3}{2}x^2 \approx \dot x \ll 0$

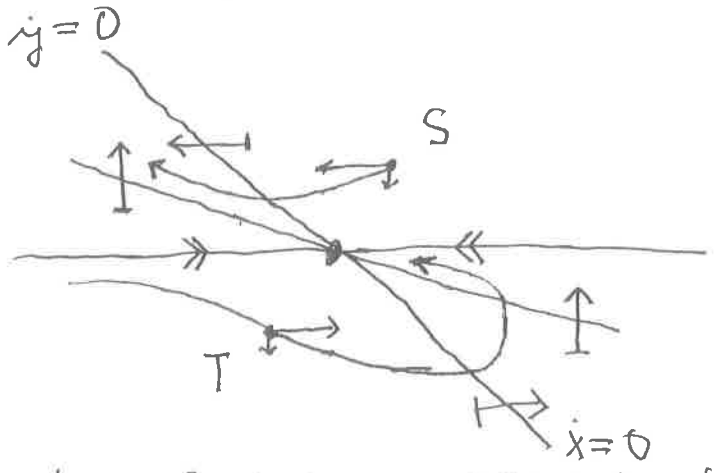


S MOST A $\mu = 2$ BIFURKÁCIÓS PONTHOZ TARTOZÓ KRITIKUS ÁBRA:

6 $\left.\begin{aligned} \dot x &= x\left(1 - \frac{x}{2} - y\right) \\ \dot y &= y(2 - x - y) \end{aligned}\right\}$ $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $J(P) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$S = \begin{pmatrix} 2+\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ $\dot x = -\frac{3}{2}\varepsilon(2+\varepsilon)$ $\Longrightarrow$ $\dot y = -2\varepsilon^2$

$T = \begin{pmatrix} 2-\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$ $\dot x = \frac{3}{2}\varepsilon(2-\varepsilon)$ $\dot y = -2\varepsilon^2$



felül félnyereg

alul félcsomó

[a transzkritikus bifurkáción belül is elfajult eset]

7) $$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= x\left(1-\frac{x}{2}-y\right)\\ \dot{y} &= y(\mu - x - y)\end{aligned}\right\}$$ ahol $\mu > 0$ paraméter

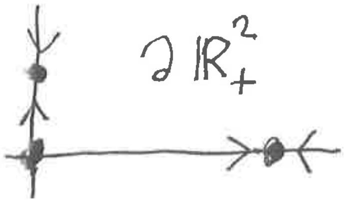
XIII

$$J = \begin{pmatrix} 1-x-y & -x \\ -y & \mu-2y-x \end{pmatrix}$$

egyensúlyi helyzetek

$$O=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \quad Q=\begin{pmatrix}0\\\mu\end{pmatrix} \quad N=\begin{pmatrix}2\mu-2\\2-\mu\end{pmatrix}$$

$$J(O)=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \mu\end{pmatrix} \quad J(P)=\begin{pmatrix}-1 & -2\\0 & \mu-2\end{pmatrix} \quad J(Q)=\begin{pmatrix}1-\mu & 0\\-\mu & -\mu\end{pmatrix}$$

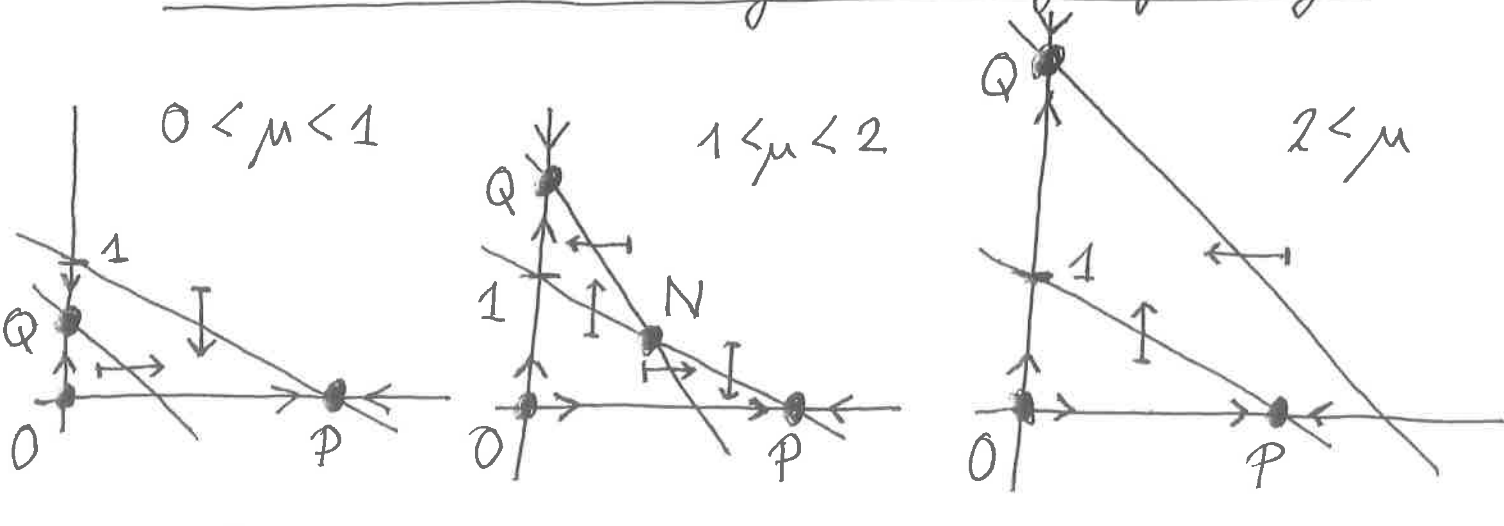


$\partial \mathbb{R}^2_+$

$$N \in \mathbb{R}^2_+ \iff \left.\begin{aligned} 2\mu-2 &\geq 0 \\ 2-\mu &\geq 0\end{aligned}\right\} \iff 1 \leq \mu \leq 2$$

lokális fázisportrék O, P, Q, N körül

és a vektormező néhány további jellegzetessége



int $\mathbb{R}^2_+$ pontjai közül vonz:

	0 – 1	1 – 2	2 – μ
P	mindent	csökkenő részt	semmit
Q	semmit	növekvő részt	mindent

Ha $\mu \geq 0$ növekszik, akkor az y versenyképessége javul

$$\boxed{\dot y = b_2\, y\left(1-\frac{y}{C_2}\right)}$$

b_2 = birth rate

C_2 = carrying capacity

XIV

μ növelése egyszerre jelent magasabb születési rátát és a környezet eltartó-képességének növelését!

$$\boxed{x(0)=x_0=0 \Rightarrow x(t)=0\ \forall t}$$

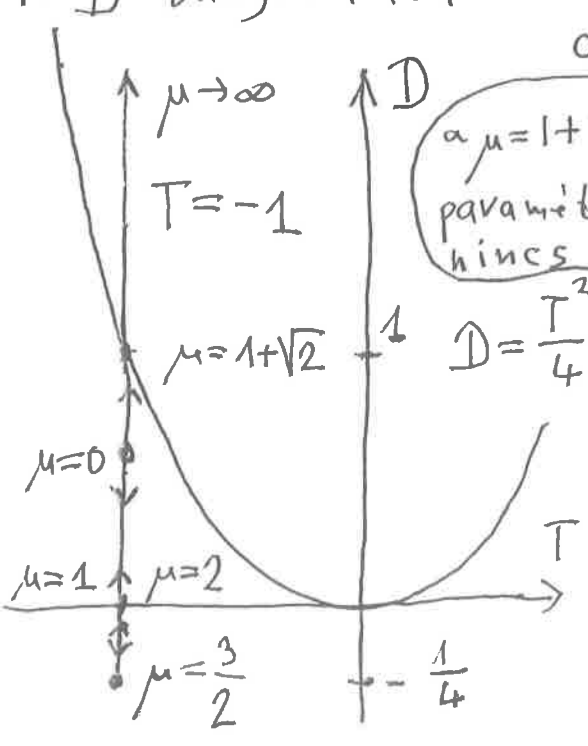
$$J(N)=\begin{pmatrix} 1-\mu & 2-2\mu \\ \mu-2 & \mu-2 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2 - T\lambda + D = 0 \qquad T=-1, \quad D=(\mu-1)(\mu-2)$$

$$\exists k:\ \mathrm{Re}\,\lambda_k = 0 \iff \begin{cases} \mu=1: & N(\mu) \text{ belép } \mathbb{R}^2_+\text{-ba} \\ \mu=2: & N(\mu) \text{ kilép } \mathbb{R}^2_+\text{-ből} \end{cases}$$

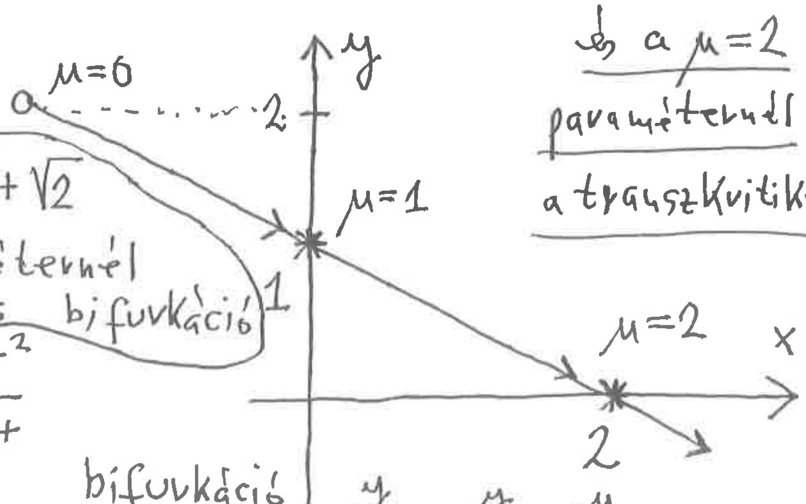
$\iff$ a linearizálás módszere N körül önmagában nem elegendő!

μ		$1-\sqrt2$	1	2	$1+\sqrt2$
N	vonzó fókusz	vonzó csomó	nyeregpont	vonzó csomó	vonzó fókusz

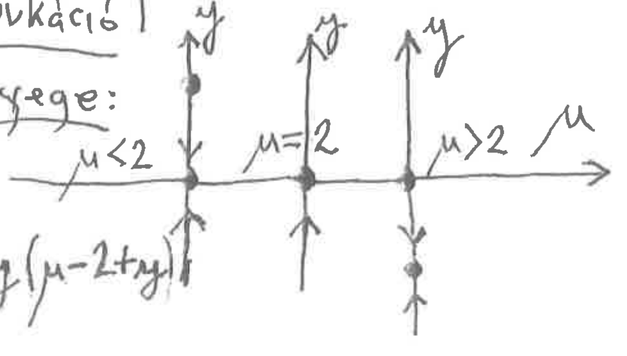
$N=N(\mu)$ mozgása a T–D diagrammon



N mozgása $\mathbb{R}^2$-ben



és a $\mu=2$ paraméternél a transzkritikus bifurkáció lényege:



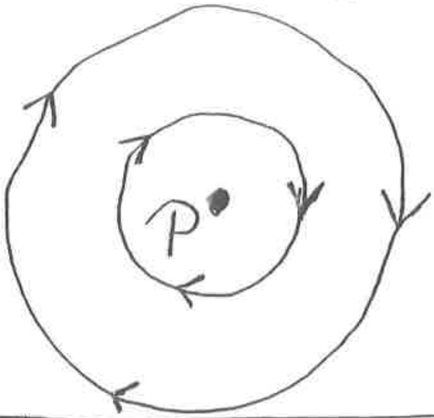
szóhasználat a síkon

XV

stabil csomó/fókusz $\Longleftrightarrow$ vonzó csomó/fókusz

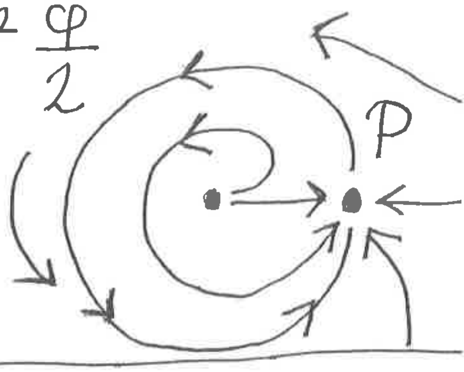
instabil csomó/fókusz $\Longleftrightarrow$ taszító csomó/fókusz

általános egyensúlyi helyzetre: $\boxed{\text{stabilitás} \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\not\Rightarrow}{\quad}} \text{vonzás}}$



$$\left.\begin{aligned}\dot r &= 0\\ \dot\varphi &= -1\end{aligned}\right\} \quad\Big\Updownarrow\quad \left.\begin{aligned}\dot x &= y\\ \dot y &= -x\end{aligned}\right\}$$

$$\dot r = r(1-r)$$
$$\dot\varphi = \sin^2\frac{\varphi}{2}$$



$$\boxed{x(t) = r(t)\cdot\cos\varphi(t) \;\&\; y(t) = r(t)\cdot\sin\varphi(t)}$$

Tfh $\left.\begin{aligned}\dot x &= f(x)\\ x(0) &= x_0\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow x_0,\, x_0(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

megoldó-operátor / megoldásfgv

$\boxed{\text{existencia, unicitás, folytonos függés}}$

$\boxed{\text{definíciók}}$

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi &: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n\\ (t,x) &\to x_{0,x}(t) = \Phi(t,x)\end{aligned}}$$

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ egyensúlyi helyzet $\Leftrightarrow f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \Phi(t, x_0) = x_0 \;\forall t$

stabil $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon\,\exists\delta$, hogy $|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |x_0 - \Phi(t,x)| < \varepsilon \;\forall t \geq 0$

vonzó $\Longleftrightarrow \exists\eta_0$, hogy $|x_0 - x| < \eta_0 \Longrightarrow \Phi(t,x) \xrightarrow{t\to\infty} x_0$

aszimptotikusan stabil $\Longleftrightarrow$ stabil és vonzó

vonzási tartomány $\Longleftrightarrow \mathcal{A}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Phi(t,x) \xrightarrow{t\to\infty} x_0\}$

instabil $\Longleftrightarrow$ nem stabil a $\overline{XV}$ lap folytatásaként: XVI

további <u>alapdefiníciók</u> és $\left\{\begin{array}{l}\text{Bolzano-}\\ \text{-Weierstrass}\end{array}\right\}$ típusú tételek

(X,d) metrikus tér

$\Phi: \mathbb{R}\times X \to X$ <u>dinamikus rendszer</u>, ha

(i) Φ [mindkét változójában egyszerre] folytonos

(ii) $\Phi(0,x)=x \quad \forall x\in X$

(iii) $\Phi(t+s,x)=\Phi(t,\Phi(s,x)) \quad \forall t\,\forall s\in\mathbb{R} \quad \forall x\in X.$

$M\subset X$ <u>invariáns halmaz</u>, ha

$x\in M \Longrightarrow \Phi(t,x)\in M \quad \forall t\in\mathbb{R}$ azaz ha $x\in M \Rightarrow \gamma(x)\subset M.$

$\gamma(x)\stackrel{\text{def}}{=}\{\Phi(t,x)\in X \mid t\in\mathbb{R}\}$ az x-en átmenő <u>trajektória</u>

$\left.\begin{array}{l}\text{pozitív}\\ \text{negatív}\end{array}\right\}$ <u>féltrajektória</u>: $\left\{\begin{array}{l}\gamma^+(x)=\{\Phi(t,x)\in X \mid t\geq 0\}\\ \gamma^-(x)=\{\Phi(t,x)\in X \mid t\leq 0\}\end{array}\right.$

$\omega(x)=\{y\in X \mid \exists\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}, \text{ hogy } t_n\to\infty \text{ és } \Phi(t_n,x)\to y\}$

$\omega(x)$ neve: az $x\in X$ pont <u>omega határhalmaza</u>

$\alpha(x)=\{y\in X \mid \exists\{t_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}, \text{ hogy } t_n\to-\infty \text{ és } \Phi(t_n,x)\to y\}$

$\alpha(x)$ neve: az $x\in X$ pont <u>alfa-határhalmaza</u>

$\boxed{\text{Mostantól kezdve}}$ legyen $X=\mathbb{R}^d$ és $\Phi:\mathbb{R}\times X\to X$ din. rendsz.

vagy $X=M\subset\mathbb{R}^d$ zárt, invariáns részhalmaza

XVII

Tétel: $\gamma^+(x)$ korlátos halmaz X-ben

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \omega(x) \neq \emptyset \\ \text{korlátos és zárt} \\ \text{invariáns} \\ \text{összefüggő} \end{array}\right\} \text{halmaz}$$

és $d(\Phi(t,x), \omega(x)) \longrightarrow 0$ ha $t \longrightarrow \infty$.

Tétel: a $d=2 \Leftrightarrow$ síkbeli esetben sokkal több is igaz.

tfh: az egyensúlyi helyzetek száma véges

tfh: $\gamma^+(x)$ korlátos $\mathbb{R}^2$-ben.

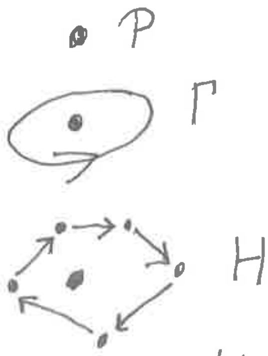
[Poincaré–Bendixson]

$\Rightarrow$ $\omega(x)$ csak háromféle lehet:

$\omega(x) = P$ egyensúlyi helyzet

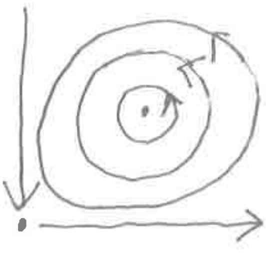
Γ periodikus pálya

H heteroklinikus kör



továbbá Γ és H belsejében is létezik egyensúlyi helyzet

Még egy síkbeli tétel: 2D Lotka-Volterra rendszernek nem lehet olyan periodikus megoldása, amely akár csak az egyik oldalról izolált lenne:



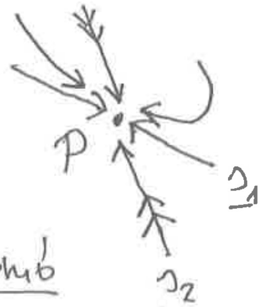
tehát ha $\exists$ periodikus megoldás, akkor $(0,\infty) \times (0,\infty)$ ki van töltve periodikus megoldásokkal egy centrumpont körül.

példa $\left.\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x(1-x) - cy\end{aligned}\right\}$ $c \geq 2$ **XVIII**

egyensúlyi helyzetek $P = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ Jacobi $= \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1+2x & -c\end{pmatrix}$

$J(P) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -c\end{pmatrix}$ $\lambda^2 + \lambda c + 1 = 0$ $\lambda_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2-4}}{2} < 0$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$



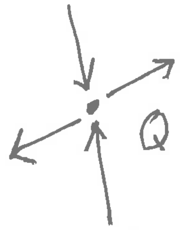
$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

stabil csomó

a pályák $\underline{v}_1$-hez hajolnak

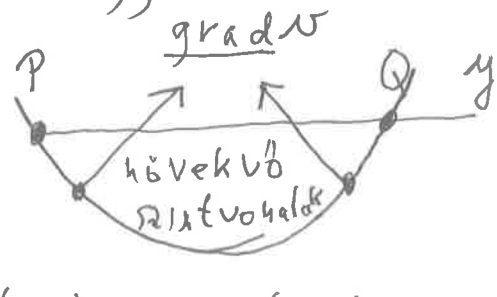
$J(Q) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -c\end{pmatrix}$ $\lambda^2 + \lambda c - 1 = 0$ $\lambda_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2+4}}{2} \gtrless 0$

$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\ \lambda_2\end{pmatrix}$



nyeregpont

Most egy Bolzano & Weierstrass típusú érvelés:



$y = -x(1-x)$

a holdacskán belül

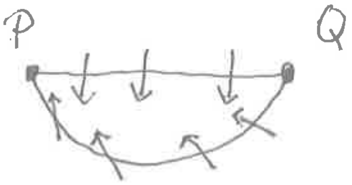
Q össze van kötve P-vel

$V(x,y) = y + x(1-x) = 0$

$\left\langle \operatorname{grad} V, \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}^T \right\rangle = (1-2x)\dot{x} + \dot{y} \Big|_{\substack{\dot{x} = y \\ \dot{y} = -x(1-x) - cy}}$

$\operatorname{grad} V = (+1-2x, 1)$

$= (1-2x)y - x(1-x) - cy \Big|_{y + x(1-x) = 0} = y(2-2x-c) > 0$ [ha $y \neq 0$]



és megvan a $Q \longrightarrow P$ összekötés

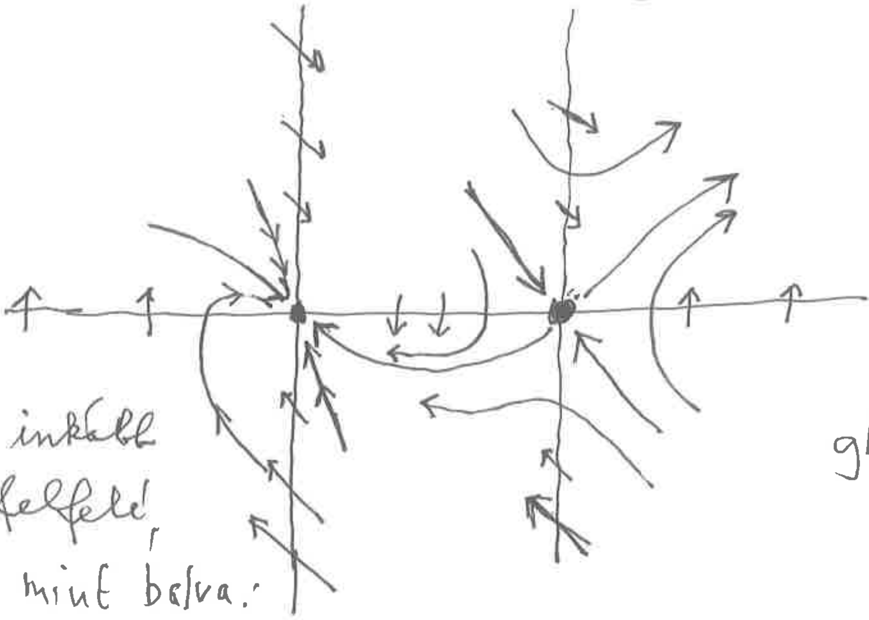
XIX

Alternatív érvelés:

$$\frac{d}{dt}V\left(x(t),y(t)\right)\Big|_{t=0} > 0 \qquad V(x,y)=0 \qquad 0<x<1$$

"Ljapunov-felület"

$\boxed{\text{Ljapunov - szintvonal}}$



$\dot{x}=y$

$\dot{y}=-x(1-x)-cy$

globális fázisportré [?!]

inkább felfelé, mint balra:

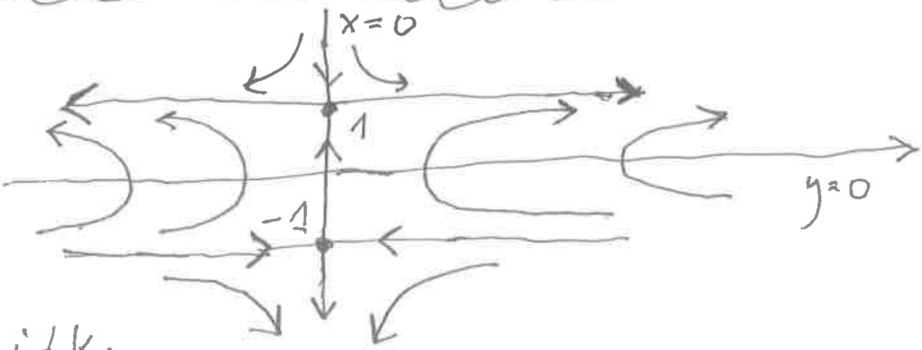
[$-x(1-x)-cy > |y|$ a harmadik síknegyedben]

$\underset{0}{\vee}$ $\underset{0}{\vee}$

[és a második ~~negyedik~~ síknegyedben sem szökhet föl]

$\dot{x}=xy$

$\dot{y}=1-y^2$

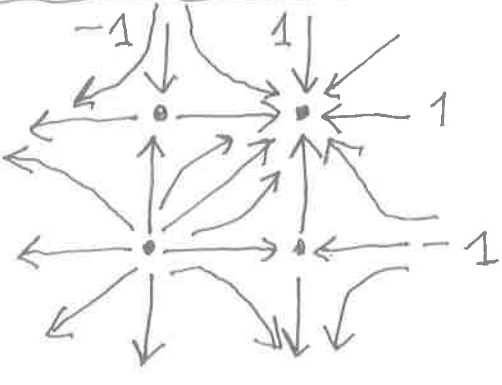


erős szimmetriák:

könnyű az ábrázolása a globális fázisportrénak is

$\dot{x}=1-x^2$

$\dot{y}=1-y^2$

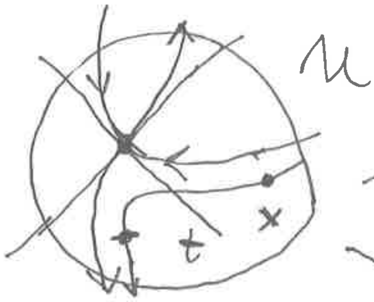


ez is könnyű

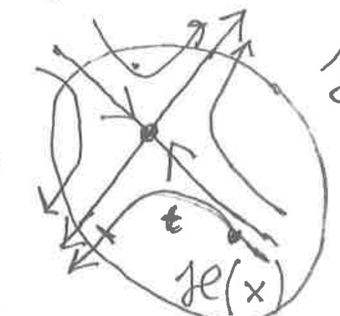
Linearizálás } mint az identitáshoz
Diszkretizálás } közeli koordináta-tranformációk

nem-elfajult egyensúlyi helyzetek kis környezetében

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases} \qquad \underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\xrightarrow{\mathcal{H}}$



$\mathcal{H}(\mathcal{U})$ $\qquad \mathcal{H} \approx id_{\mathcal{U}}$

$$\mathcal{H}(\Phi(t,x)) = e^{At}\mathcal{H}(x)$$

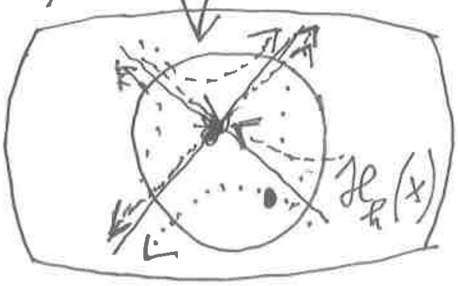
$\mathcal{H}_h$

$\dot{x} = Ax + a(x)$ $\qquad \dot{x} = Ax$ $\qquad \mathcal{H} : \mathcal{U} \to \mathcal{H}(\mathcal{U})$

(N) $\Phi(t,x)$ $\qquad$ (L) $e^{At}x$ $\qquad$ folytonos, folytonos inverzzel

$\mathcal{H}_h : \mathcal{U} \to \mathcal{H}_h(\mathcal{U})$

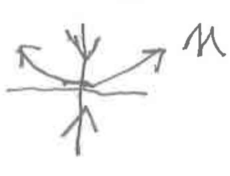
(D) $\varphi(h,x)$

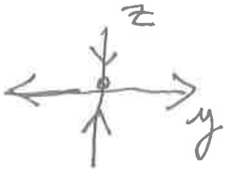


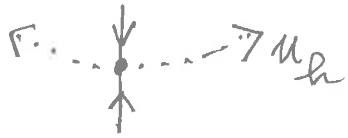
$$\mathcal{H}_h(\Phi(h,x)) = \varphi(h, \mathcal{H}_h(x))$$

$$|\Phi(h,x) - \varphi(h,x)| \le K_1 h^{p+1} \implies |\mathcal{H}_h(x) - x| \le K_2 h^p$$

példa $\quad x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$







(N) $\begin{aligned} \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= -z + y^2 \end{aligned}$ $\qquad$ (L) $\begin{aligned} \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= -z \end{aligned}$ $\qquad$ (D) $\begin{aligned} Y &= y + hy \\ Z &= z + h(-z + y^2) \end{aligned}$

$\cancel{y}$ $y = 0$ tengely invariáns (N), (L) és (D)-ben

$z = u(y) = \frac{y^2}{3}$ $\qquad z = 0$ $\qquad z = u_h(y) = \frac{y^2}{3+h}$

invariáns [instabil altér ill. sokaság] $\quad |u(y) - u_h(y)| \le K_3 h^p$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\cdot} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

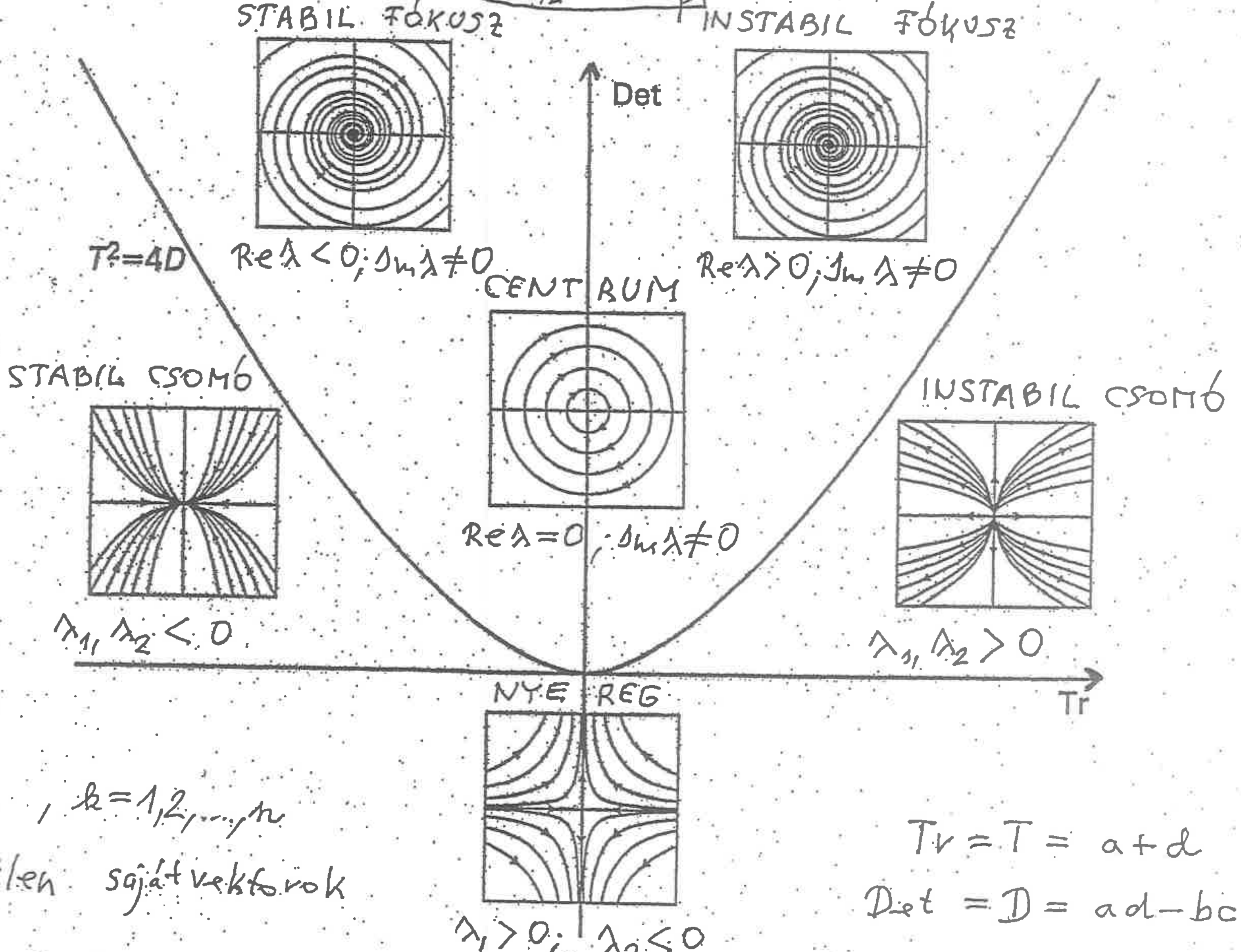
$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - T\lambda + D = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4D}}{2}$$

~~type resides~~ See Figure 4.1. This yields a geometric classification of 2 × 2 linear systems.

$\boxed{\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta}$



$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{s}_k = \lambda_k \underline{s}_k \quad , k = 1, 2, \ldots, n$$

valós és lin. fgtlen sajátvektorok

$$\Downarrow$$

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} \underline{s}_k$$

$Tr = T = a + d$

$Det = D = ad - bc$

Figure 4.1 The trace-determinant plane. Any resemblance to any of the authors' faces is purely coincidental.

(M. W. HIRSCH, S. SMALE, R. L. DEVANEY)