Mehrschrittverfahren

21. Januar 2011

Theoretischer Hintergrund

Ist

$$\frac{1}{h}\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu u^{j+\nu} = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu f(t_{j+\nu}, u^{j+\nu})$$

ein lineares Mehrschrittverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen, so ist die *Konsistenzordnung* des Verfahrens p, wenn die Koeffizienten a_ν, b_ν folgende Gleichungen erfüllen

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu p_k(\nu) = \sum_{\nu=0}^{m} b_\nu p_k'(\nu), k = 0, \ldots, p. \tag{1}$$

Dabei ist $p_k(\nu) = \frac{\nu^k}{k!}$.

Um die triviale Lösung auszuschließen und die Lösung eindeutig zu machen, fordert man zusätzlich

$$\sum_{\nu=0}^{m} b_\nu = 1. \tag{2}$$

Es gilt der folgende Satz

Satz. *I) Alle Koeffizienten seien Null außer*

$$a_{m_0}, a_m \text{ und } b_{\nu_0}, \ldots, b_{\nu_1}$$

mit $m_0 < m$. *Dann sind* (1) *und* (2) *mit* $p = \nu_1 - \nu_0 + 1$ *eindeutig lösbar und* p *gibt die Konsistenzordnung des Verfahrens an.*

II) Alle Koeffizienten seien Null außer

$$a_{m_0}, \ldots, a_m \text{ und } b_{\nu_0}, \ldots, b_{\nu_1}$$

mit $m_0 \leq \nu_0 \leq \nu_1 \leq m$. *Dann sind* (1) *und* (2) *mit* $p = m - m_0 + \nu_1 - \nu_0$ *eindeutig lösbar und* p *gibt die Konsistenzordnung des Verfahrens an.*

Beispiele

I) a) $m_0 = m-1, \nu_0 = 0, \nu_1 = m-1$ Adams-Bashforth

b) $m_0 = m-1, \nu_0 = 0, \nu_1 = m$ Adams-Moulton

c) $m_0 = m-2, \nu_0 = 0, \nu_1 = m-1$ Nyström

d) $m_0 = m-2, \nu_0 = 0, \nu_1 = m$ Milne-Simpson

II) a) $m_0 = 0, \nu_0 = \nu_1 = m$ rückwärtige Differenzenformeln (BDF)

b) $m_0 = 0, \nu_0 = \nu_1 = m-1$ Mittelpunktsregel