

Nemlineáris Dinamikus Rendszerek
mérnök, informatikus és bionikus hallgatók részére

Garay Barnabás
PPKE ITK — SZTAKI

Az ábrák és az animációk Balogh Ádám munkái

Bevezetés

Egli é scritto in lingua matematica — *Galilei*

A Galilei utáni nemzedék számára már magától értetődő tény, hogy a természet könyve a matematika nyelvén íródott. Ezért fogalmazhatta meg¹ Newton: hasznos — más, korábbi fordításokban helyénvaló — dolog differenciálegyenleteket megoldani.

Differenciálegyenletek megoldása a szó teljes értelmében azok kvantitatív és kvalitatív vizsgálatát jelenti. Az intuíciót a vizsgálandó egyenlet konkrét fizikai, műszaki, biológiai vagy éppen közgazdaságtani jelentése alapvetően meghatározza. Az intuíció másik forrása az egyre növekvő számítógépi-szimulációs tapasztalat. A már idézett V.I. Arnold híres megállapítása szerint a matematika a természettudományoknak az az ága, amelyben a kísérletezés olcsó. A számítógéppel kapott eredmények — too much progress, too much promise — mit sem érnek a megfelelő interpretáció nélkül. A keretet a matematika, mint a természet- és a műszaki tudományok univerzális nyelve jelenti.

A differenciálegyenletek, a számítógép és a nem-„*in silico*” kísérletek kapcsolatát S. Luzzatto és J.D. Murray szavai jól jellemzik: „Simulation of (continuous time) dynamical systems is often taken for granted in the sciences and engineering because methods for solving initial value problems of ordinary differential are one of a small number of basic numerical algorithms in toolkits for scientific computation. Modeling is seen as the hard part; simulating the models the easy part. Nonetheless, this process seldom

¹*Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa.* A XVII. századi latin mondatot nem könnyű modern nyelvekre fordítani, hiszen a differenciál- és integrálszámítás hőskorának többek között az adekvát szaknyelv megteremtése is hosszan elhúzódó feladata volt. Newton és Leibniz eredeti megfogalmazásai (és eredeti, egymásétól egyébként nagyon különböző jelölései) közül ma csak keveset használunk. Az angol nyelvű szakirodalomban a V.I. Arnold *Geometric Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin, 1983) könyvében szereplő fordítás a leginkább elterjedt: „*In contemporary mathematical language, this means: It is useful to solve differential equations*”.

answers all of the questions we ask about a model. Dynamical Systems Theory provides mathematical foundations for going much farther, but additional numerical methods are needed to connect the mathematics and the models.” (S.L.) valamint „It is premature to say one mechanism is a best model until further experimental information is available.” (J.D.M.).

A jegyzet kontextusában a differenciálegyenletek és a dinamikus rendszerek jelentése jól fedi egymást. Megírásával a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai és Bionikai Karán rendszeresen tartott két kurzusom hallgatói részére kívántam segítséget adni, a „Tér-időbeli jelek, modellek és számítógépek” és a „Dinamikai modellek a biológiában” tágabb matematikai környezetének bemutatásával.

Amióta a Práter utcában (PPKE ITK) és a Lágymányosi utcában (SZTAKI) dolgozom, megértettem, hogy a *Big Data* korában az adatok csoportosítása és szűrése elsőrendűen fontos feladattá vált az alkalmazott matematikai analízis egésze szempontjából. Az adatbányászat és az adatfeldolgozás nem az én kenyerem. Konkrét lépéseket, mint oktató, nem tudok tenni ezekbe az irányokba, de azt elhatároztam, hogy a következő években — Ottlik Géza „Iskola a határon” című regényének non est volentis neque currentis (sem azé aki akarja, sem azé aki fut (utána)) mottója erre is vonatkozik — az általam oktatott matematika tárgyakat szeretném az *Observational Mathematics* irányába vinni.

A jegyzetnek, tudom, sok hiányossága és bizonyára jónéhány hibája is van. Minden visszajelzést, kritikai megjegyzést² előre is köszönök.

A magyarázatok nemegyszer „fecsegő” hangja a szemléletességet próbálja növelni és a szaknyelvet a köznyelvhez közelíteni. A szemléletességet ezzel együtt elsősorban az ábrák és a kísérő animációk közvetítik.

²Komoly hiányosságnak érzem, hogy a fizikai mértékegységeket és a paraméterek konkrét értékeit szinte soha nem tüntettem fel. A mérnök-kollégákkal való célirányos konzultáció sokat segített volna ebben, de nem futotta rá az időmből. Mentségemre szolgál az is, hogy a matematikusok a matematika saját objektumait szokták vizsgálni, és általában nem számokkal, hanem betűkkel számolnak.

Amit legjobban sajnálok, az az, hogy nem tudtam megírni a relaxációs oszcillációk matematikájáról szóló fejezetet (jóllehet tudom, hogy relaxációs oszcillációkkal mind az informatikus-mérnök, mind a bionikus hallgatók több szaktárgyban is gyakran találkoznak). Erre sem volt időm, pedig nagyon szerettem volna. A lineáris analízis rész tárgyalásából hiányzik számos, a Frobenius-Perron tételekre és a Markov-lánckokra történő utalás. A parciális egyenletek és az idősorok alapján történő, szinte egyenletek nélküli számolás részletes tárgyalása fel sem merült bennem, az összehasonlíthatatlanul nagyobb falat lett volna.

Az élményt, amit Galilei érzett, amikor először pillantotta meg a Jupiter holdjait, vagy amit Haydn érzett, amikor első alkalommal nézett Herschel távcsövébe egy júniusi éjszakán, még töredékesen sem tudom újra-élni. Mégis, örömmel írom ide — találjon visszhangra az Olvasóban! — Wigner Jenő *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* dolgozatának befejező mondatát: „The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.”³

Budapest, 2013 június 30.

Garay Barnabás
PPKE ITK és SZTAKI

³Ráadásként álljon itt még egy idézet, Th. Merton huszadik századi amerikai szerzetes–költő (fiatal korában ismert jazz–zenész) egy esszéjéből: „There is a logic of language and a logic of mathematics. The former is supple and lifelike, it follows our experience. The latter is abstract and rigid, more ideal. The latter is perfectly necessary, perfectly reliable: the former is only sometimes reliable and hardly ever systematic. But the logic of mathematics achieves necessity at the expense of living truth, it is less real than the other, although more certain. It achieves certainty by a flight from the concrete into abstraction. Doubtless, to an idealist, this would seem to be a more perfect reality. I am not an idealist.” A szövegrész világosan utal a matematikai modell–alkotás egyik legfőbb nehézségére — egyszerre kell a köznyelvet, legalább egy természet– vagy műszaki tudomány, valamint a matematika nyelvét használnunk — de egyúttal a mottóul választott Galilei idézet kommentárjának is tekinthető.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS:

KÖSZÖNET a közvetett numerikus tapasztalatokért

valamennyi Práter utcai gyakorlatvezetőnek, akikkel együtt dolgoztam:

Balogh Ádám, Gelencsér András, Goda Márton, Hartdégen Márton, Horváth András, Indig Balázs, Juhász János, Lakatos Péter, Ligeti Balázs, Reguly István, Szélig Ádám

azoknak a fiatal kollégáknak, akikkel más formában dolgoztam együtt:

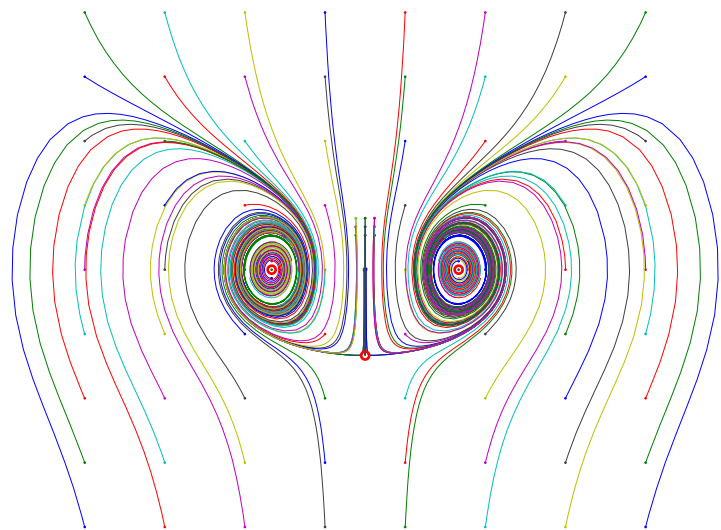
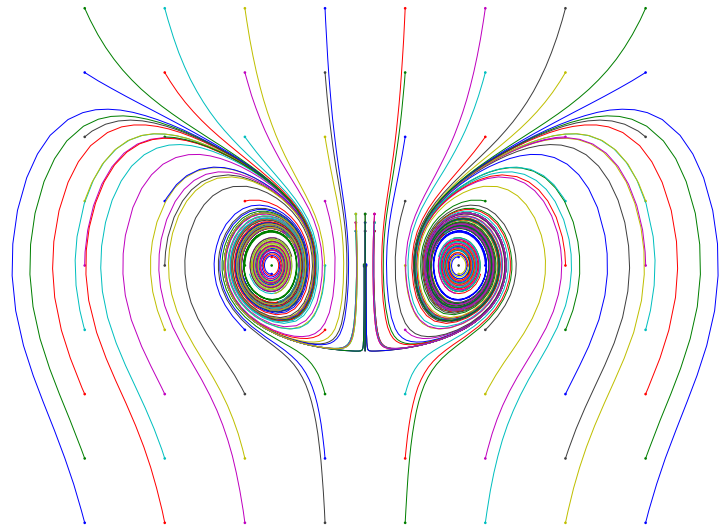
Bánhelyi Balázs (Szeged), Csikja Rudolf (BME), Koller Miklós (PPKE), Simkó Marcell (PPKE), Stubendek Attila (PPKE), Tornai Gábor (PPKE)

KÖSZÖNET azoknak, akiktől egyet s mást *mind a számítógépi, mind az alkalmazott matematika területén* megtanultam (nem rajtuk múlt, hogy nem többet):

Csendes Tibor (Szeged), Ercsey–Ravasz Mária (Kolozsvár), Galántai Aurél (Óbuda), Hatvani László (Szeged), Horváth Róbert (BME), Hujter Mihály (BME), Karsai János (Szeged), Máté László (BME), Nagy Zoltán (SZTAKI), Roska Tamás (PPKE), Simon L. Péter (ELTE), Stoyan Gisbert (ELTE), Tóth János (BME)

Köszönet az ábrákért és az animációkért, amelyeket *Balogh Ádám* kísérletező kedvvel, időről–időre nekem is meglepetéseket okozva készített el. Az ábrák és az animációk nemcsak illusztrálják a szöveget, hanem esetről esetre annak lényegét fejezik ki. Köszönöm *Kiss Márton* lektor segítőkész és gondos munkáját. A jegyzet végső formába öntéséhez a LATEX titkait jól ismerő *Koller Miklós* nyújtott időt és fáradságot nem kímélő, nélkülözhetetlen segítséget, amelyért nagyon hálás vagyok. Külön köszönet *Nyékyné Gaizler Judit* prodékán asszonynak és *Simonovits András*-nak a jegyzet írásával kapcsolatos baráti figyelmükért és tanácsaikért.

A jegyzet a TÁMOP–4.1.2.A/1–11/1 pályázat keretében készült.



A JEGYZET SZERKEZETE, SZERKESZTÉSE

a Pólya György féle spirális elvet követi: megerősítő ismétlések, egyre több részlet egyre gazdagabb kibontásával.

A legfontosabb kérdéskörök

- a kvalitatív–geometriai elmélet elemei
- a diszkretizált/közelítő és a pontos megoldás viszonya
- a linearizálás módszere
- a káosz

már az első fejezetben megjelennek. Az itteni tárgyalásmód teljesen szemléletes, és nem lépi túl az LRC–kör, a rugó– valamint az inga/hajóhinta–egyenlet által felkínált kereteket. Az első fejezet három függeléke — lineáris algebra, lineáris analízis, közönséges differenciálegyenletek egyensúlyi helyzeteinek osztályozása a síkon — ismétlés jellegű. (A negyedik függelék a függelékek szokásos stílusát követi).⁴

A 41 sorszámozott Tétel mindegyikét igyekeztem érthetővé tenni, de közülük csak alig néhánynak írtam le a bizonyítását. A bizonyítások egy része hibabecslési–perturbációs technikákat mutat be, közöttük az implicit függvény tétel két alkalmazását, a fennmaradók az iterált függvényrendszereken alapuló képtömörítés határértéktételéhez, illetve a kombinatorikus káosz egydimenziós, intervallum–leképezésekre vonatkozó változatához vezetnek el.

A legfontosabb alfejezetek sorszáma: 2.2, 2.15, 3.7, 3.8 — a konkrét példák sokféleségén keresztül ezek mutatják be a dinamikus rendszerek fogalomkörének és a kísérő számítógépes módszerek alkalmazhatóságának távlatait.

⁴Az Olvasók egy része számára a \ll és a \gg jelölések szokatlanok lehetnek: $0 < \varepsilon \ll 1$, illetve $\Omega \gg 1$ az elegendően/nagyon kicsiny, illetve az elegendően/nagyon nagy pozitív számokat jelentik.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	i
1. Néhány bevezető példa	1
1.1. Rezgőkörök, rugó és inga/hajóhinta	1
1.2. Differenciálegyenletek megoldásainak ábrázolása	6
1.3. Numerikus, számítógépes megoldások	13
1.4. Rezgőkör és rugó csillapítással	26
1.5. Függelék 1.) Egy kevés lineáris algebra és lineáris analízis	31
1.6. Függelék 2.) Stabilitási kritériumok lineáris egyenletekre	37
1.7. Függelék 3.) Egyensúlyi helyzetek osztályozása a síkon	40
1.8. Inhomogén linearitások	45
1.9. Példa káoszra: a csillapított, gerjesztett inga	54
1.10. Összefoglalás — példák konkrét számadatokkal	60
2. Közönséges differenciálegyenlet és megoldó-operátor	62
2.1. A Picard–Lindelöf Tétel	62
2.2. A dinamikus rendszerek típusai. Példák	72
2.3. Folytonos függés amitől csak lehet	82
2.4. Közönséges differenciálegyenletek diszkretizációi	88
2.5. Árnyékok és szellemek a numerikában	95
2.5.1. Elemi példák valódi és hamis periodikus megoldásokra	95
2.5.2. Kerekítési/számábrázolási hibák: strukturált következmény	98
2.5.3. Intervallumos programozás	101
2.5.4. Jóslási időhorizont és Ljapunov exponens	102
2.5.5. Az árnyékolási (shadowing) lemma	102
2.6. A dinamika Bolzano–Weierstrass típusú tételei	104
2.7. Linearizálás egyensúlyi helyzetek körül	111
2.8. Kis perturbációk és exponenciális stabilitás	117

2.9. Matrijosa–babányi dióhéj: Ljapunov függvények	123
2.10. Strukturális stabilitás. Ízelítő a globális analízisből	131
2.11. Periodikus pályák vizsgálata	137
2.12. Hopf születés, Hopf halál	140
2.12.1. A Hopf–bifurkáció normálalakja	140
2.12.2. Az oszcilláló reakciók egyik alappéldája	143
2.12.3. A kémiai kinetika sztöchiometriai alapegyenleteinek felírása	147
2.13. Függelék 4.) A legegyszerűbb bifurkációk listája. Leképezések bifurkációi	149
2.14. Megjegyzések a nem–autonóm esetről	159
2.15. Összefoglaló példák	161
3. Az egyszerűtől a bonyolult felé	169
3.1. Egydimenziós egyfajmodellek	169
3.2. A Ricker modell. Káoszról általában	175
3.3. Káosz egy dimenzióban. A legegyszerűbb tételek	182
3.4. Fraktálok és Newton módszer	193
3.5. Iterált függvényrendszerek. Halmazértékű és véletlen iterációk	199
3.6. Iterált függvényrendszer és képtömörítés	208
3.7. Példasorozat szinkronizációra. Különböző szempontok	210
3.8. Lotka–Volterra típusú modellek	218
4. A számítógépes matematika dicsérete	229
5. Animációk jegyzéke	233
Irodalomjegyzék	234
Definíciójegyzék	235
Tételjegyzék	237
Tárgymutató	240

1. fejezet

Néhány bevezető példa

1.1. Rezgőkörök, rugó és inga/hajóhinta

Jól ismert, hogy a sorosan kapcsolt elemekből álló RLC-körben folyó áram $I = I(t)$ erősségének időbeli változását az

$$L\dot{I} + RI + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(s) ds = v(t) \quad (1.1)$$

differenciálegyenlet írja le. Itt L a tekercs indukciós együtthatója, R az (ohmikus) ellenállás, C a kondenzátor kapacitása, $v = v(t)$ pedig a külső vezérlő feszültség. A mögöttes fizikai törvény Kirchhoff huroktörvénye, mely szerint a tekercsen, az ellenálláson és a kondenzátoron eső feszültség együttesen a külső gerjesztési feszültséggel egyenlő:

$$V_L + V_R + V_C = v(t),$$

ahol az egyes áramköri elemekre

$$V_L = L\dot{I}_L, \quad V_R = RI_R, \quad V_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I_C(s) ds \quad (\Leftrightarrow \dot{V}_C = \frac{1}{C} I_C)$$

érvényes és I_C a kondenzátoron tárolt $Q = Q_C$ töltésmennyiség $I_C = \dot{Q}_C$ deriváltjaként is kifejezhető. A soros kapcsolás (ha úgy tetszik, Kirchhoff csomóponti törvényének „nincs-csomópont” triviális esete) miatt minden áramköri elemen ugyanakkora áram halad át, s így $I = I_L = I_R = I_C$.

Az (1.1) egyenlet tehát

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = v(t) \quad (1.2)$$

alakban is írható, amelynek idő szerinti deriváltjaként

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = h(t), \quad \text{ahol } h(t) = \dot{v}(t).$$

Az RLC-körben csak a tekercsen és a kondenzátoron tárolódik (míg az (ohmikus) ellenálláson csak disszipálódik az) energia. Az RLC-kör összenergiája minden egyes időpillanatban

$$E(t) = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2C}Q^2 \quad \Leftrightarrow \quad E(t) = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2 + \frac{1}{2C}Q^2,$$

amely külső gerjesztés hiányában az idő múlásával

$$\dot{E}(t) = L\dot{Q}\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q\dot{Q} = \dot{Q} \left(L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q \right) = \dot{Q}(v|_{v=0} - R\dot{Q}) = -R\dot{Q}^2 \leq 0 \quad (1.3)$$

szerint nem növekedhet. Azt is megkaptuk, hogy $R = 0$ esetén (amikor is az RLC-kör LC-körre egyszerűsödik) ez az összenergia állandó.

Az (1.1) egyenlet nemlineáris változatai közül az a legegyszerűbb, amikor a lineáris (ohmikus) $V_R = RI_R$ ellenállást egy nemlineáris ellenállással pótoljuk. A nemlineáris ellenállás őspéldája a Van der Pol által csaknem száz éve dióda és extra áramforrás együttesével¹ megvalósított $V_R = p(-I_R + \frac{I_R^3}{3})$ karakterisztikájú ellenállás, ahol $p \geq 0$ paraméter. A $v(t)$ külső vezérlő feszültséget nullának véve, az (1.1) egyenlet

$$L\dot{I} + p \left(-I + \frac{I^3}{3} \right) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(s) ds = 0$$

nemlineáris változatának idő szerinti deriválása az

$$L\ddot{I} + p(-1 + I^2) + \frac{1}{C}I = 0$$

egyenlethez vezet. A Van der Pol egyenlet szokásos

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x \end{array} \right\}, \quad \text{ahol } \mu \geq 0 \quad (1.4)$$

alakját lineáris helyettesítésekkel, a paraméterek skálázása/normálása révén kapjuk. Valóban, az $I(t) = x(at) = x(\tau)$ idő-átparaméterezés szerint $\dot{I} = x' \cdot a$, $\ddot{I} = x'' \cdot a^2$ adódik, ahol a $'$ a τ szerinti deriválást jelenti. Az (1.4) egyenlet levezetéséhez már csak az $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ és a $\mu = \frac{p}{La}$ helyettesítéseket kell elvégeznünk, a τ helyébe pedig a t -t visszaírunk.

Az (1.4) Van der Pol egyenletre (még ebben a bevezető fejezetben) többször is visszatérünk. A jegyzet első tétele is a Van der Pol egyenlettel lesz kapcsolatos.

Az (1.2) egyenletet érdemes összehasonlítani a fékezett és gerjesztett rugó egyenletével, amelyet az

$$ma = \{\text{eredő-erő}\}$$

¹manapság operációs erősítőt használnak ugyanerre a célra — itt jegyezzük meg, hogy az elméleti villamosságtan egyik approximációs tétele szerint bármely áramerősség-függő és $V_R = f(I_R)$, $I_m \leq I_R \leq I_M$ karakterisztikájú ellenállás (itt az $f : [I_m, I_M] \rightarrow \mathbb{R}$ függvénytől csak azt követeljük meg, hogy folytonos legyen) tetszőlegesen kicsiny hibával megépíthető

Newton törvényből vezetünk le s amely $a = \ddot{x}$ és az

$$\{\text{eredő-erő}\} = \{\text{külső erő}\} + \{\text{súrlódó-erő}\} + \{\text{rugóerő}\} = F(t) - bv - kx$$

összefüggések miatt az

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) \quad (1.5)$$

alakot ölti. Itt x a kitérés, $v = \dot{x}$ a sebesség, $a = \ddot{x}$ a gyorsulás, m a tömeg, b a súrlódási tényező, k a rugóállandó, $F = F(t)$ pedig a külső (gerjesztés által a rugóra ható) erő. Az analógia első pillantásra is világos. Az absztrakt matematika nézőpontjából az (1.2) és az (1.5) egyenlet egy és ugyanaz. Mindkettejük másodrendű, és mindkettejüket ekvivalens módon írhatjuk át két elsőrendű egyenletből álló rendszerré:

$$\begin{cases} \dot{Q} = I \\ \dot{I} = -\frac{1}{LC}Q - \frac{R}{L}I + \frac{1}{L}v(t) \end{cases} \quad \text{illetve} \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}y + \frac{1}{m}F(t). \end{cases}$$

Az átírás után a Kirchhoff-törvény és a Newton-törvény kevésbé transzparens mint korábban, viszont az I áramerősség illetve az y sebesség explicit módon jelenik meg. A geometria, pontosabban a matematikai ábrázolhatóság szempontjából az átírás egyértelműen előnyös, csakúgy, mint a számítógépes módszerek „ráereszthetősége” szempontjából. Ha a megoldást kézzel kell kiszámolnunk, akkor az átírás a konkrét feladatot — a paraméterek értékeitől függően — kellemesebbé és rázóssabbá egyaránt teheti.

Azt azért, hogy az indukciós együttható felel meg a tömegnek és hogy a sebesség az áramerősségnek, még szoknunk kell egy kicsit. A külső erő és a külső feszültség azonosítása könnyebben elfogadható, s még az is, hogy *a tömegpontra ható összes erő eredője (beleértve a gyorsítóerőt is) nulla* törvény valami hasonlót fejez ki, mint a *körbemenve a feszültségkülönbségek összege zérus* törvény. A villamosmérnök megérzése egy bonyolult áramkör viselkedésével kapcsolatban valamint a gépészmérnök intuíciója egy hídszerkezet lengéseiről különböznek egymástól — jóllehet az absztrakt matematika szempontjából a két rendszer lehet teljesen ugyanaz.

A gravitációs inga differenciálegyenlete szintén az $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ Newton törvény alkalmazása, ahol az $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ gyorsulás az $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t)$ út t idő szerinti második deriváltja, $\mathbf{a} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{s}$. A mozgás egy körön valósul meg. Az ℓ hosszúságú inga végére helyezett pontszerű, m tömegű testre ható súlyerő és a kötél-erő eredője érintő irányú és nagysága $-mg \sin(\theta)$, ahol θ a felfüggesztési ponton átmenő függőleges és az inga szöge, az óramutató járásával ellentétes irányban mérve. A koordinátarendszer illetően választása feleslegessé teszi a Newton törvény vektoros írásmódját. A gyorsulásnak is csak az érintő irányú komponensét kell figyelembe venni, ami az $\ell\theta$ kitérés mint ívhossz idő szerinti második deriváltja, $\ell\ddot{\theta}$. Tehát az inga differenciálegyenlete

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0. \quad (1.6)$$

Egy kötélíngáról nehéz elképzelni, hogy lassú átfordulásokkor a kötélen alakja változatlan marad. Így kötél-erő helyett pontosabb rúderőt mondanunk, a hagyományos inga

helyett pedig gondolhatunk egy (vízszintes tengelyen forgó és súlytalan, merev rudak által tartott) hajóhintára is.

Mivel az összes közegellenállási, súrlódási etc. veszteséget elhanyagoltuk, az (1.6) egyenletben az energiamegmaradás törvénye is meg kell hogy jelenjen. A forgási energia $\frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$, a helyzeti energia pedig $mg\ell(1 - \cos(\theta))$ (ha a nulla energiaszintet a szabadon lógó mozdulatlan inga helyzete határozza meg). A teljes energia a t időpillanatban

$$E(t) = \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta}(t))^2 + mg\ell(1 - \cos(\theta(t))),$$

ami az (1.6) egyenlet megoldásai mentén valóban konstans, hiszen

$$\dot{E}(t) = m\ell^2\dot{\theta}(t)\ddot{\theta}(t) + mg\ell \sin(\theta(t))\dot{\theta}(t) = m\ell^2\dot{\theta}(t) \left(\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) \right) = 0.$$

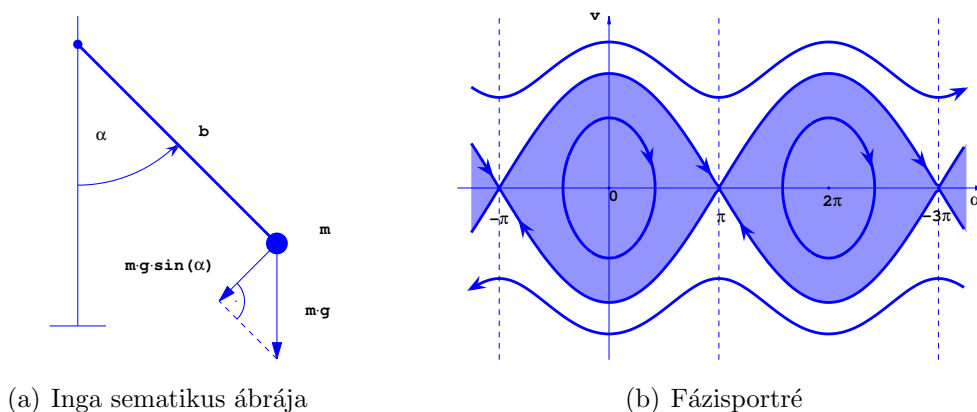
Ha a (szögsebességgel egyenesen arányosnak tételezett) közegellenállást és a külső gerjesztést is figyelembe vesszük, akkor az inga egyenlete két új taggal bővül, és a

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = F(t) \quad (1.7)$$

alakot ölti. Ha a θ kicsi, akkor a $\sin(\theta) = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots$ sorfejtés nemlineáris tagjai elhanyagolhatók és a fékezett, gerjesztett inga (1.7) nemlineáris differenciálegyenlete a

$$\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = F(t) \quad (1.8)$$

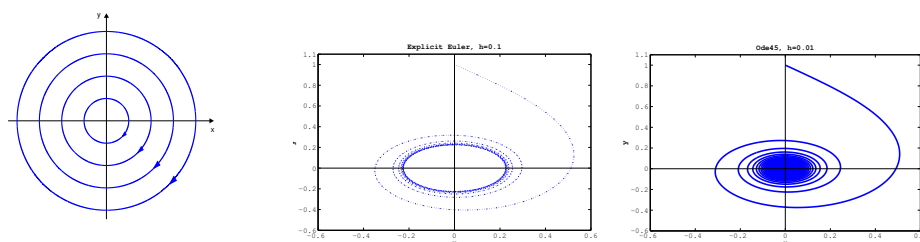
lineáris differenciálegyenletre egyszerűsödik, ami végső fokon nem más, mint az (1.5) egyenlet. Amennyiben tehát az inga kicsiny lengéseket végez, akkor jó közelítéssel rugó-



1.1. ábra. Inga/hajóhinta, csillapítás és gerjesztés nélkül

ként viselkedik. Mivel a levegő közegellenállása elhanyagolható, a kicsiny szögkitérésekkel,

szabadon lengő inga súrlódásmentes rugónak tekinthető. Ez utóbbit — egészen pontosan azt, hogy az inga kis lengéseinek periódusideje nem függ az amplitúdótól² — saját kísérletei eredményeként már Galilei is ismerte³ Differenciálegyenleteket először Newton írt fel, hogy a bolygók mozgásának Kepler törvényeit mint az általa felfedezett gravitáció következményeit az egzakt matematika révén magyarázza.



(a) Fázisportré

(b) Implicit Euler — cf.

(c) MATLAB ODE45

1.5.. Példa: Implicit Euler

1.2. ábra. Súrlódásmentes, gerjesztés nélküli rugó pontos és kétféle közelítő módszerrel számolt megoldása

²és gyökösen függ az inga hosszától — mai jelölésekkel $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ (amely formula az (1.5) és az (1.2) differenciálegyenletek matematikai azonossága miatt *okkal emlékeztet* az LC-körbeli $I(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}}(t-t_0)\right)$ egyenletű rezgések $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC}}$ periódusidejére)

³Az $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0$ egyenletű inga alsó, $\theta=0$, $\dot{\theta}=0$ egyensúlyi helyzete körüli lengéseinek periódusidejét zárt alakban nem lehet kiszámolni, arra csak elliptikus integrált tartalmazó formula adható. Valóban, a $\theta(0) = \theta_0 \in (-\pi, 0)$, $\dot{\theta}(0) = 0$ kiindulási értékeket az $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}(1 - \cos(\theta)) = \text{const}$ energia-összefüggésbe írva, majd az $x\left(\frac{T}{4}\right) = 0$ szimmetria, valamint a $\zeta = \theta(t)$, $d\zeta = \dot{\theta}(t) dt$ helyettesítések segítségével

$$\dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0))} \Rightarrow \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\dot{\theta}(t)}{\sqrt{2(\cos(\theta(t)) - \cos(\theta_0))}} d\theta = \int_0^{\frac{T}{4}} \sqrt{\frac{g}{\ell}} dt$$

$$\Rightarrow T = T(\theta_0) = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{1}{\sqrt{2(\cos(\zeta) - \cos(\theta_0))}} d\zeta$$

adódik (ahol a $\theta_0 \rightarrow 0^-$ kis lengésekre vonatkozó $T = T(\theta_0) \rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ határátmenet a $2(\cos(\zeta) - \cos(\theta_0)) \approx 2\left(1 - \frac{\zeta^2}{2}\right) - 2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\right) = \theta_0^2 - \zeta^2$ aszimptotikus egyenlőség és az $\int_{\theta_0}^0 \frac{1}{\sqrt{\theta_0^2 - \zeta^2}} d\zeta = \arcsin\left(-\frac{\zeta}{\theta_0}\right)\Big|_{\theta_0}^0 = \frac{\pi}{2}$ integrálás következménye). Ha az Olvasó a fenti levezetést nehéznek találta, ne szomorodjon el. Vigasztalásul álljon itt egy olyan feladat, amely sokkal könnyebb: Tekintse az $\ddot{x} + \sin(x) = 0$ differenciálegyenletet, az $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$ kezdeti feltételekkel együtt, majd keresse meg a kérdéses megoldás görbét az 1.1 Ábra (b) részén. Ha megtalálta, akkor örüljön neki, majd próbálkozzon meg annak ellenőrzésével, hogy — nem semmi!! — $x(t) = 4 \arctan(e^t) - \pi$, $\dot{x}(t) = \frac{4e^t}{1+e^{2t}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

1.2. Differenciálegyenletek megoldásainak ábrázolása

A megoldás ábrázolásának elveit egy roppant egyszerű példán szemléltetjük.

1.1. Példa Tekintsük a súrlódásmentes, gerjesztés nélküli rugó viselkedését leíró

$$\ddot{x} + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

differenciálegyenlet-rendszernek azt a megoldását, amely a $t_0 = 0$ pillanatban az

$$x(0) = 1 \text{ kezdeti kitéréssel és a } \dot{x}(0) = 0 \text{ kezdeti sebességgel indul.}$$

A megoldás $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = -\sin(t)$. Az ellenőrzés könnyű: visszahelyettesítünk és igazságot kapunk. Valóban,

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ esetén } \begin{cases} \dot{x}(t) = -\sin(t) = y(t) \\ \dot{y} = -\cos(t) = -x(t) \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x(0) = \cos(0) = 1 \\ y(0) = -\sin(0) = 0 \end{cases}$$

A mátrixos felírásnak megfelelően a kezdeti feltételt az $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a megoldást az $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}$ alakban is megadhatjuk.

Fontos megjegyeznünk, hogy az $\frac{1}{2}y^2$ mozgási és a rugóban tárolt $\frac{1}{2}x^2$ energia összege mindvégig ugyanaz marad:

$$E(t) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}x^2(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{E} = \dot{x}\ddot{x} + x\dot{x} = \dot{x}(\ddot{x} + x) = 0.$$

A kérdéses megoldás ábrázolására több lehetőségünk is van:

- 1.) $(t, x(t), y(t))$: a kitérés és a sebesség együtt, az idő függvényében térbeli ábra, az első tengely az időtengely
- 2.) $(x(t), y(t))$: kitérés és a sebesség a síkon, paraméteres görbeként, egyes időpontok feltüntetésével, a paraméter az idő
- 3.) $(t, x(t))$ és $(t, y(t))$: a kitérés és a sebesség egyenként az idő függvényében

A „teljes”, térbeli ábra maga az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \rightarrow (x(t), y(t))$ megoldásfüggvény grafikonja, esetünkben

- a $(t, x(t), y(t)) = (t, \cos(t), -\sin(t))$ csavarvonal,

a többi ennek kétdimenziós vetületei, jelesenül

- az $(x(t), y(t)) = (\cos(t), -\sin(t))$ körvonal,

valamint a megoldás mindkét koordináta-függvényének egyenkénti grafikonjaként, külön-külön ábrázolva, de együtt kezelve

- a $(t, x(t)) = (t, \cos(t))$ cosinus-görbe és
a $(t, y(t)) = (t, -\sin(t))$ „lefelé fordított” sinus-görbe.

Általában is, tekinthetjük az

$$(A) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad \text{a jobboldalon a } t \text{ nem szerepel}$$

autonóm, valamint az

$$(NA) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \end{cases} \quad \text{a jobboldalon a } t \text{ explicit módon szerepel}$$

nem-autonóm közönséges differenciálegyenleteket, ahol f és g folytonos, x és y változóikban folytonosan differenciálható függvények.

Mind az (A) autonóm, mind az (NA) nem-autonóm esetben a $(t, x(t), y(t))$ megoldásgörbék összessége az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tér egyrétű fedését alkotja. Az egyrétű (a téglányösszeg szóhoz hasonlóan) a XIX-ik század matematikai nyelvéből ittmaradt zárvány. Arra utal, hogy a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ tér tetszőleges pontján áthalad megoldásgörbe és pedig egyetlenegy megoldásgörbe halad át, azaz tetszőleges $t_0 \in \mathbb{R}$ és $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esetén az

$$(A) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

valamint az

$$(NA) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y) \\ \dot{y} = g(t, x, y) \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

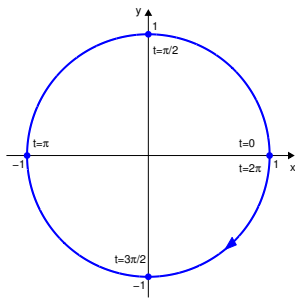
kezdetiérték-feladatok mindegyikének pontosan egy megoldása van.

Az (A) autonóm egyenlet specialitása, hogy

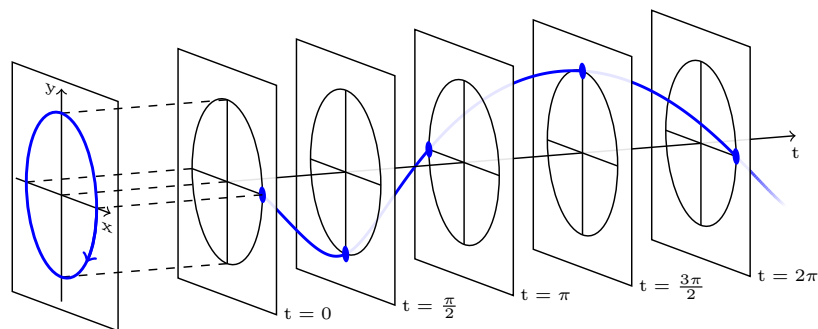
$$\text{az } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \text{ állapotváltozást leíró } \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \text{ törvény}$$

nem függ az időtől. Bármely autonóm egyenlet adott megoldásának minden időbeli eltöltje is megoldás, így az időtengely menti vetítés azokat egy s ugyanazon pályagörbébe viszi. Az $(x(t), y(t)) \subset \mathbb{R}^2$ pályagörbék, idegen szóval trajektóriák összessége az \mathbb{R}^2 sík egyrétű fedését alkotja. A pályagörbék összességét fázisportrének nevezzük. A fázisportré fogalmát csak autonóm egyenletekre definiáljuk.

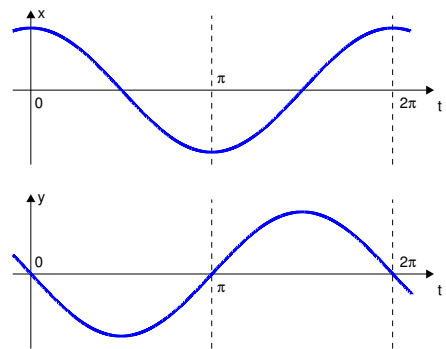
Autonóm egyenlet esetén a kezdeti időpontot $t_0 = 0$ -nak szokás beállítani. A kezdeti időpont $0 \rightarrow t_0$ megváltoztatása a pályagörbe t_0 -lal történő eltolásos idő-átparaméterezését



(a) Fázisportré: tengelyek x és y



(b) Térbeli ábra: tengelyek t , x és y



(c) Páros ábra: tengelyek t és x , t és y

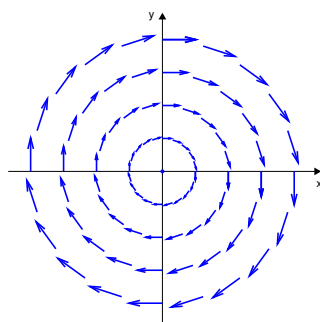
1.3. ábra. Súrlódásmentes, gerjesztés nélküli rugó egy megoldásának különböző típusú ábrázolásai, a választott tengelyek függvényében

jelenti. Az (1.9) egyenletnek tehát a $(t, \cos(t), -\sin(t))$ csavarvonallal együtt annak (a $t_0 \in \mathbb{R}$ kezdeti időponttal vett,) időtengely menti eltoltjai, azaz a $(t, \cos(t - t_0), -\sin(t - t_0))_{t_0 \in \mathbb{R}}$ csavarvonalak mindegyike is megoldásgörbéje. A (lehető legegyszerűbb paraméterezéssel

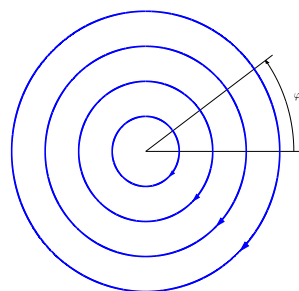
ellátott) közös vetület a fázisportrén az $(x(t), y(t)) = (\cos(t), -\sin(t))$ pályagörbe/trajektória. Az energiamegmaradás törvényének megfelelően a fenti csavarvonalak a

$$\mathcal{C} = \{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

hengeren helyezkednek el, ezért maga a pályagörbe körvonal, az x - y sík egységkör-vonala.



(a) Vektormező



(b) Polárkoordináták

1.4. ábra. Súrlódásmentes, gerjesztés nélküli rugó: vektormező és fázisportré

Az (1.9) egyenlet polárkoordinátarendszeres alakja $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = -1$. Az origótól vett távolság az időben nem változik: $\dot{r} = 0$. A polárszög egyenletesen forog az óramutató járásával megegyező irányba, a szögsebesség egységnyi: $\dot{\varphi} = -1$. Az $r(0) = r_0 \geq 0$, $\varphi(0) = \varphi_0 \in \mathbb{R}$ kezdeti feltételhez az $r(t) = r_0$, $\varphi(t) = -(t - \varphi_0)$ megoldás tartozik. A fázisportré tehát az sík origóját (az idő szerinti paraméterezésben) negatív irányban megkerülő körvonalak, periodikus pályák összessége, az origóval, mint egyensúlyi helyzettel együtt.

A fázisportré mindig utólagos, meghatározása — pontosabban lényegi meghatározása, kvalitatív és kvantitatív jellegzetességeinek feltérképezése — a feladat természetének megfelelően mérnöki, fizikusi, biológusi intuíciót, valamint az analitikus, geometriai és numerikus módszerek kombinálását igényli.

1.2. Megjegyzés *Mindez már elővételezi, hogy a d -dimenziós általános esetben az explicit, nem-autonóm, közönséges*

a differenciálegyenlet $\dot{x} = f(t, x)$, ahol $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvény,

a kezdeti feltétel $x(t_0) = x_0$, ahol $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ rögzített,

a megoldás az $x_{t_0, x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvény,

a megoldó-operátor a $\Phi(\cdot, t_0, x_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $t \rightarrow x_{t_0, x_0}(t)$ függvény.

Az $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ jelölés mintájára használhattuk volna az

$$\dot{x}_k = f(t, x_1, x_2, \dots, x_d) \quad \text{és} \quad x_k(0) = (x_0)_k, \quad k = 1, 2, \dots, d$$

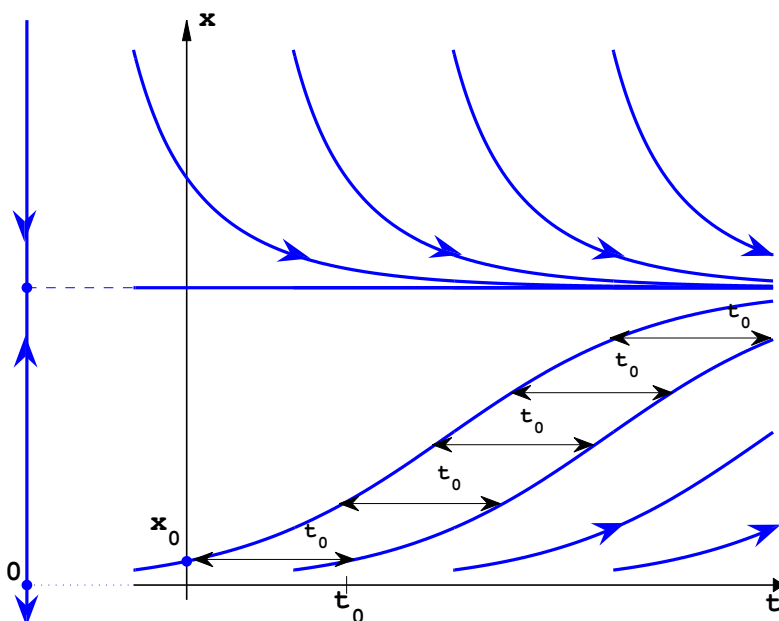
koordinátás írásmódot is. A $d = 1, 2, 3$ esetben — az erősebb hagyomány kedvéért — indexek nélkül, a hagyományos x, y, z változókkal koordinátázunk. Természetesen a most szerepeltetett függvények mindegyike legalább folytonos.

Látni fogjuk, hogy a $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $(t, t_0, x_0) \rightarrow x_{t_0, x_0}(t)$ függvény bevezetése teljesen kiváltja majd az indexek használatát. A megoldásnak a $t_0 \in \mathbb{R}$ kezdeti időpillanattól és az $x_0 \in \mathbb{R}^d$ kezdeti állapottól való függését célszerűbb lesz indexek helyett valódi változókkal kifejezésre juttatni. Mivel az autonóm esetben a kezdeti időpont $t_0 = 0$ választása

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}x(t-t_0) = f(x(t-t_0)) \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow x_{t_0, x_0}(t) &= x_{0, x_0}(t-t_0) \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.10}$$

okán szinte kizárólagos, azért az $\dot{x} = f(x)$ autonóm egyenlet megoldó-operátora

$$\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (t, x) \rightarrow x_{0, x_0}(t).$$



1.5. ábra. Autonóm közönséges differenciálegyenlet minden megoldásának időbeli eltolója is megoldás. Az ábra az $\dot{x} = x(1-x)$ Verhulst egyenlethez tartozik

Mind az (A) autonóm, mind az (NA) nem-autonóm esetben szokásos a differenciálegyenletrendszert magát is szemléltetni, a jobb oldalait által meghatározott síkbeli $(f(x, y), g(x, y))$, illetve térbeli $(1, f(t, x, y), g(t, x, y))$ vektormezőkkel, amelyeket általában pontozott tűskék sokaságával reprezentálunk. Autonóm rendszerek $(x(t), y(t))$ pályagörbéi a síkon, autonóm és nem-autonóm rendszerek $(t, x(t), y(t))$ megoldásgörbéi a térben azok a görbék lesznek, amelyek minden egyes pontjukban érintik az adott vektormezőket.

A vektormező ábrázolása sok esetben sejteti a megoldásgörbék viselkedését, az (A) autonóm differenciálegyenletrendszer jobb oldalának matematikai elemzése pedig nem-egyszer önmagában is lehetővé teszi a fázisportré felvázolását. Az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} \quad \text{és az} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$$

izoklínák a sík azon pontjainak mértani helyét jelölik ki, ahol a vektormező függőleges illetve vízszintes, s ahol ennek megfelelően a megoldásgörbék érintője is függőleges, illetve vízszintes. A fel vagy le, jobbra vagy balra kérdésért $g(x, y)$ illetve $f(x, y)$ előjele dönti el. Az izoklínák az egyensúlyi helyzetekben metszik egymást. Az (1.9) egyenletre $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. A $g(x, y) = -x$ előjele alapján arra következtetünk, hogy a trajektóriák az x tengely pontjaiban a tengelyre merőlegesen felfelé indulnak, ha $x < 0$, és lefelé, ha $x > 0$. Hasonló érveléssel kapjuk, hogy a trajektóriák az y tengely pontjaiban a tengelyre merőlegesen jobbra indulnak, ha $y > 0$, és balra, ha $y < 0$. Következtetés: az origót a trajektóriák körüljárják, éspedig az óramutató járásával egyező irányban.

A vektormezőre pillantás másik haszna a szimmetriaviszonyok tisztázása:

- $f(0, y) \equiv 0 \Rightarrow$ az $x = 0$ tengely invariáns
- $g(x, 0) \equiv 0 \Rightarrow$ az $y = 0$ tengely invariáns
- $f(-x, -y) \equiv -f(x, y), g(-x, -y) \equiv -g(x, y) \Rightarrow$ origóra vett szimmetria
- $f(-x, y) \equiv -f(x, y), g(-x, y) \equiv g(x, y) \Rightarrow$ szimmetria az y tengelyre
- $f(x, -y) \equiv f(x, y), g(x, -y) \equiv -g(x, y) \Rightarrow$ szimmetria az x tengelyre

Nehogy bárki is betanulja ezeket a szabályokat⁴!! De ha munkát akar spórolni magának — minden egyes konkrét feladatban: a mérnöki intuíció segíteni fog — gondoljon a

⁴Legyen T egy $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ homogén lineáris transzformáció (tükrözés, forgatás etc.). Az $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vektormező, illetve az általa meghatározott $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet szimmetrikus a T transzformációra, ha $f(Tx) = Tf(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^d$ esetén. A feladat szimmetriája a megoldás-operátor szimmetriájával ekvivalens, sőt („tisztesseges” diszkrétizációk esetén: másokról idáig nem tanultunk és ezután sem fogunk) a numerikus diszkrétizáció-operátor szimmetriájával is:

$$f(Tx) = Tf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(t, Tx) = T\Phi(t, x) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d,$$

$$f(Tx) = Tf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \Leftrightarrow \quad \phi(h, Tx) = T\phi(h, x) \quad \forall (h, x) \in [0, h_0] \times \mathbb{R}^d,$$

ahol a $\phi(h, x)$ absztrakt jelölés a $\phi(h, x) = \phi_E(h, x) = x + hf(x)$ explicit Euler-módszer példáját követi.

szimmetriára!

Az (1.9) egyenlet által meghatározott vektormezőt az 1.4. Ábra mutatja. Az origót, mint egyensúlyi helyzetet leszámítva valamennyi pályagörbe körvonal. A mozgások — csillapítás (ohmikus ellenállás, súrlódás) és külső gerjesztés híján — energia-szintvonalakon valósulnak meg: az energia-szintvonalak egyenletei $x^2 + y^2 = r_0^2 \geq 0$. A körkörös forgatási szimmetria legkönnyebben a polárkoordinátarendszerre való áttérés után látható: $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = -1$.

Vegyük észre, hogy az (1.9) egyenlet azonos a $\mu = 0$ paraméterű (1.4) Van der Pol egyenlettel. A paraméter $\mu > 0$ értékeire a $\mu = 0$ eset körkörös forgatási szimmetriájából csak az origóra történő középpontos tükrözési szimmetria marad. (Ehhez bőven elegendő az $(y, \mu(1-x^2)y-x)$ vektormezőt egy vízszintes-függőleges téglalap $(\pm x, \pm y)$ csúcspontjaiban ábrázolni, de aki ágyúval szeret verébre lőni, akkor az vizsgálhatja az

- $f(-x, -y) \equiv -f(x, y)$, $g(-x, -y) \equiv -g(x, y) \Rightarrow$ origóra vett szimmetria

típusú szabályok teljesülését is.) A Van der Pol egyenlet szimmetriája egyébként a *belső időváltozó és a paraméter szerinti szimmetriát* is jelent. Valóban, az

$$x(t) = z(\tau) = z(-t), \quad y(t) = -w(\tau) = -w(-t), \quad \tau = -t, \quad \nu = -\mu$$

transzformációk együttes hatása az (1.4) Van der Pol egyenlet síkbeli rendszerré átváltására

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1-x^2)y-x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = w \\ \dot{w} = \nu(1-z^2)w-z, \end{array} \right.$$

ami egyúttal azt is magyarázza, miért szokás a Van der Pol egyenletet csupán a μ paraméter $\mu \geq 0$ értékeire vizsgálni.

A Van der Pol egyenlet globális dinamikáját a most következő tétel írja le.

1.3. Tétel *A paraméter $\mu > 0$ értékei mellett az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \mu(1-x^2)y-x$ síkbeli differenciálegyenletnek egyetlen, az origóra középpontosan szimmetrikus Γ_μ periodikus megoldása van, amely az origó nélküli pontozott $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sík valamennyi trajektóriáját aszimptotikusan magához vonzza. Mind az origó, mint a végtelen távoli pont taszítanak. A $\mu \rightarrow 0^+$ határátmenetben $\Gamma_\mu \rightarrow \Gamma_0$, ahol Γ_0 a $\mu = 0$ paraméter-értékhez tartozó $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ egyenlet $r = r_0 = 2$ megoldása.*

A bizonyítás kifejezetten hosszadalmas, jöllehet csupa elemi lépésből áll. Legnehezebb része a Γ_μ , $\mu > 0$ periodikus megoldás unicitásának ellenőrzése, de az $r = r_0 = 2$ konkrét számérték megtalálása sem könnyű: az aszimptotikusan stabil periodikus megoldások az $r_0 = 2$ körvonalból bifurkálnak (elfajult Hopf bifurkáció).

1.3. Numerikus, számítógépes megoldások

Numerikus szempontból még *egy teljesen értelmetlen kinézésű kezdetiérték-probléma is tartogathat meglepetéseket*. Tekintsük az (1.4) Van der Pol egyenletet a paraméter $\mu=200$ választásával. A MATLAB által első helyen ajánlott és oly sokszor jól bevált ODE45 módszer futtatása most nemcsak a MATLAB lefagyásához vezet, hanem jó eséllyel magát a PC-t is újra kell indítanunk. Ugyanakkor az ODE15s módszer remekül működik. A naív magyarázat az, hogy — figyelembe véve a $\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = y, \dot{y} = \mu(1-x^2)y - x$ Van der Pol egyenlet speciális szerkezetét — a paraméter $\mu=200$ értéke elviselhetetlenül nagy az ODE45 módszer számára. A $\mu=0.01$ esetben viszont az ODE15s módszer a kevésbé jó választás és az ODE45 módszer a sikerebb.

A sokkhatásból magunkhoz térve szisztematikus építkezésbe kezdünk: a paramétereit tekintve skálázott/normált, csillapítás és külső gerjesztés nélküli $\ddot{x} + x = 0$ rugó és $\ddot{x} + \sin(x) = 0$ inga/hajóhinta példáján mutatjuk be a(z egy-lépéses) diszkretizációs módszerek legfontosabb tulajdonságait, és kiválasztásuk alapvető szempontjait. *Az elméleti és a gyakorlati szempontokat egymással átfedésben próbáljuk érvényesíteni.*

A legegyszerűbb közelítő eljárás közvetlenül a vektormező fogalmára épít. A fázistér minden egyes pontjában ismerjük az azon a ponton áthaladó megoldásgörbe érintőjét:

$$\dot{x} = f(x) \text{ és } x(0) = x_0 \Rightarrow \text{Érintő}_{0,x_0}(t) = x_0 + tf(x_0).$$

Az x_0 pontból indulva és $h > 0$ ideig az $\text{Érintő}_{0,x_0}(t)$ mentén haladva az $x_1 = x_0 + hf(x_0) = \phi_E(h, x_0)$ pontba jutunk. Ha pedig a pontos megoldás mentén haladunk $h > 0$ ideig, akkor az $x_{0,x_0}(h) = \Phi(h, x_0)$ pontot érjük el. A kettő egymástól vett eltérése $\mathcal{O}(h^2)$ nagyságrendű, azaz

$$|\Phi(h, x_0) - \phi_E(h, x_0)| \leq Kh^2, \text{ ahol a } K \text{ konstans egyedül az } f\text{-től függ.}$$

Az eljárást az x_0 pont helyett az x_1 pontból etc. újraindítva az

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ rekurzív pontsorozathoz,}$$

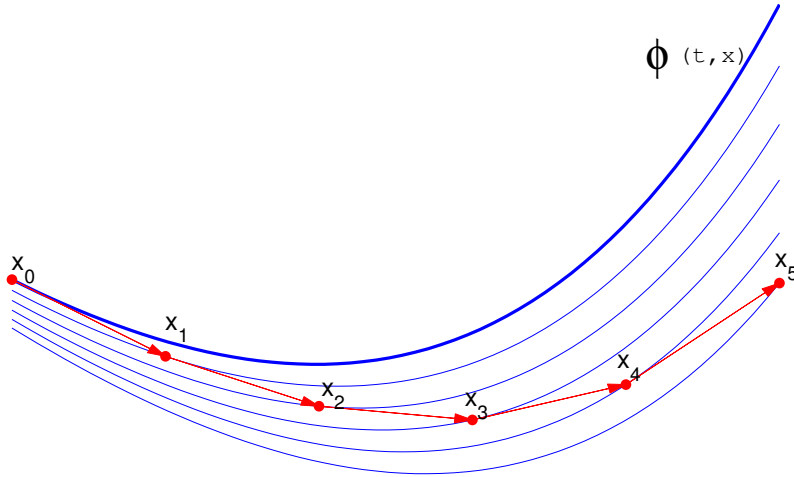
majd az egymást követő szomszédos pontokat rendre összekötve az

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \text{ Euler féle töröttvonalhoz jutunk.}$$

Tetszőleges $[0, T]$, $T > 0$ intervallumon, a $h = \frac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}_+$ lépésközzel az x_{num} numerikus és a $\Phi(\cdot, x_0)$ pontos megoldás különbségére az

$$|x_{num}(t) - \Phi(t, x_0)| \leq \text{const}(T) \cdot h \quad \forall t \in [0, T]$$

hibabecslés érvényes. Fontos számon tartanunk, hogy x_{num} maga a töröttvonal, amelyet az $\{x_k\}_{k=0}^N$ pontsorozatból utólagos interpolációval (vagy ha úgy tetszik, a menet közbeni



1.6. ábra. Euler töröttvonal módszere: explicit Euler módszer

rövid érintőszakaszok megtartásával) képeztünk. A hibabecslés a $t_k = kh$ időpontokban az

$$|x_k - \Phi(kh, x_k)| \leq \text{const}(T) \cdot h \quad \forall 0 \leq k \leq N \quad (1.11)$$

alakra egyszerűsödik.

A most ismertetett eljárás az *explicit Euler módszer*, amelynek dinamikus jellegét az

$$\phi_E : [0, h_0] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (h, x) \rightarrow \phi_E(h, x) = x + hf(x)$$

Euler féle diszkretizációs operátor bevezetésével is hangsúlyozzuk, ahol $h_0 > 0$ a *maximális megengedett lépésköz*. Ugyanerre utal az

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \Leftrightarrow \quad X = \phi_E(h, x) \quad \Leftrightarrow \quad X = x + hf(x)$$

kompakt írásmód is, valamint ha x_k helyett $\phi_E^k(h, x_0)$ -at írunk.

1.4. Példa Az 1.1. Példa folytatásaként alkalmazzuk az explicit Euler módszert az ottani (1.9) differenciálegyenlet-rendszerre. Az $(x_0) \in \mathbb{R}^2$ kezdeti állapotból indulva az

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} y_k \\ -x_k \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{k+1} = x_k + hy_k \\ y_{k+1} = y_k - hx_k \end{cases} \end{aligned} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

lineáris rekurziót kapjuk. Négyzetre-emelés és összeadás után a tényleges (s tudjuk jól, mindvégig konstans) $E(t) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}x^2(t) \quad \forall t \geq 0$ összenergiát a $t_k = kh$ időpillanatban közelítő $E_k = \frac{1}{2}x_k^2 + \frac{1}{2}y_k^2$ diszkrétizált összenergiára az

$$E_{k+1} = (1+h^2)E_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \Rightarrow \quad E_N = (1+h^2)^N E_0, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

képlet adódik. Így az $N \rightarrow \infty$ határátmenetben $E_N \rightarrow \infty$ (amennyiben $h > 0$ és $E_0 > 0$): A pontos megoldások önmagukba záródó köreit az Euler féle töröttvonal kifelé csavarodó és a végtelen távoli pontba tartó spirálkarokkal pótolja.

Jóllehet véges hosszúságú időintervallumokon a lépésköz nagyon kicsivé tétele az energia növekedését elfedi⁵, nem képes minden hiányérzetünket megszüntetni. Az energiamegmaradás a (1.9) differenciálegyenlet-rendszer lényegi tulajdonságai közé tartozik.

Visszatérve az az 1.1. Példa után definiált általános síkbeli autonóm (A) egyenlethez, a $t_{k+1} = (k+1)h$ időpontokhoz tartozó $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ töréspontokat megadhatjuk az

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} f(x_{k+1}, y_{k+1}) \\ g(x_{k+1}, y_{k+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(X, Y) \\ g(X, Y) \end{pmatrix}$$

összefüggéssel is. A régi $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ töréspontból most nem az ottani vektormező irányába megyünk tovább. Éppen ellenkezőleg, azt követeljük meg, hogy a régi $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ töréspont legyen rajt az új $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}$ töréspontból induló (és onnan visszamutató) érintő egyenesen. Az indexek nélküli átfogalmazás most is az eljárás leképezés-jellegét hangsúlyozza, ahol $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ a h és az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ismeretében, mint az $X = x + hf(X, Y)$, $Y = y + hg(X, Y)$ (általában) nemlineáris egyenletrendszer $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \phi_I \left(h, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$ megoldása számítandó ki.⁶

⁵Valóban, ha egy $[0, T]$ időintervallumot N egyenlő részre bontunk, akkor $h = \frac{T}{N}$, és

$$1 < \frac{E_N}{E_0} = (1+h^2)^N = \left(1 + \frac{T^2}{N^2}\right)^{N^2 \cdot N^{-1}} < \sqrt[N]{e^{T^2}} \rightarrow 1 \quad \text{ha } T > 0 \text{ fix és } N \rightarrow \infty.$$

⁶Az eljárás tényleges végrehajtásakor $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ helyett elegendő annak egy jól közelítő, mondjuk $\begin{pmatrix} X^{(\tau)} \\ Y^{(\tau)} \end{pmatrix}$ értékét vennünk és azzal tovább számolnunk. (Elegendően kicsiny h esetén az $X = x + hf(X, Y)$, $Y = y + hg(X, Y)$ egyenletrendszer iterációval oldható meg, ahol az

$$\begin{pmatrix} X_{(0)} \\ Y_{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{indulással} \quad \begin{pmatrix} X_{(n+1)} \\ Y_{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{(n)} \\ Y_{(n)} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(X_{(n)}, Y_{(n)}) \\ g(X_{(n)}, Y_{(n)}) \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ami — egészen a 2.33. Megjegyzésig — még titokzatosabbá teszi, mik lehetnek ennek a jóval munkaigényesebb, implicit eljárásnak az előnyei a megelőző, explicit eljáráshoz képest.)

1.5. Példa (Folytatás: továbbra is az (1.9) differenciálegyenlet-rendszert vizsgáljuk.)
Az explicit Euler módszer után az

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ -x_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} Y \\ -X \end{pmatrix}$$

implicit Euler módszert alkalmazva most

$$\left. \begin{array}{l} X = \frac{1}{1+h}(x+hy) \\ Y = \frac{1}{1+h}(y-hx) \end{array} \right\} \Rightarrow 2\mathfrak{E} = X^2 + Y^2 = \frac{1+h^2}{(1+h)^2}(x^2+y^2) < (x^2+y^2) = 2\mathfrak{e}$$

adódik. Ha tehát $h > 0$, akkor a diszkrétizált összenergia minden egyes lépésben csökken, sőt $N \rightarrow \infty$ mellett a 0-hoz tart. Az explicit Euler módszer kifelé csavarodó és a végtelen távoli ponthoz tartó spirálkarjai után most befelé csavarodó, és az origóba tartó spirálkarokat kapunk. Az explicit Euler módszerhez hasonlóan az implicit Euler módszer sem veszi tekintetbe az energiamegmaradás törvényét: $h > 0$ lépésközönként az aktuális \mathfrak{e} energia $\frac{2h}{(1+h)^2}$ része disszipálódik.

A $\phi_E(h, \cdot)$ explicit és a $\phi_I(h, \cdot)$ implicit Euler módszer kombinációjaként vezessük be az (A) egyenlet pontos megoldásait az

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left(\begin{pmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x_{k+1}, y_{k+1}) \\ g(x_{k+1}, y_{k+1}) \end{pmatrix} \right)$$

rekurzióval közelítő eljárást is, amely

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h \left((1-\theta) \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} f(X, Y) \\ g(X, Y) \end{pmatrix} \right) \quad \text{ahol } \theta = \frac{1}{2}$$

okán a $\theta = \frac{1}{2}$ módszer nevet viseli, de amelyet trapéz-módszernek is szokás hívni.

Ellentétben az $\dot{x}(t)$ deriváltat a „kézenfekvő” különbségi hányadosokkal helyettesítő

$$\frac{X-x}{h} = f(x) \Rightarrow X = \phi_E(h, x) \quad \text{valamint} \quad \frac{X-x}{h} = f(X) \Rightarrow X = \phi_I(h, x)$$

módszerekkel, a trapéz-módszer az $\int_0^h f(x(t)) dt$ integrál értékének trapéz-szabály szerinti

$$x(h) = x(0) + \int_0^h f(x(t)) dt \approx x(0) + \frac{h}{2}(f(x(0)) + f(x(h))) \Rightarrow X = x + \frac{h}{2}(f(x) + f(X))$$

helyettesítésén, pontosabban az X ezt követő $X = \phi_T(h, x)$ kifejezhetőségén alapul.

1.6. Példa (Folytatás:) A trapéz-módszer — legalábbis az (1.9) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ rendszer esetében, amely több szempontból is kivételes tulajdonságokkal rendelkezik — megőrzi az energiát:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \left(\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y \\ -X \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} X - \frac{h}{2} Y = x + \frac{h}{2} y \\ Y + \frac{h}{2} X = y - \frac{h}{2} x \end{array} \right\} \quad (1.12)$$

$$\text{négyzetre-emelés, összeadás} \Rightarrow 2\mathfrak{E} = X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 = 2\mathfrak{e}.$$

Az energia azonban az (1.9) rendszer nem egyetlen megmaradó mennyisége: a terület is megmarad – és a terület-tartó tulajdonságot⁷ a trapéz-módszer is megőrökl. Valóban, az (1.12) algebrai egyenletrendszer X és Y ismeretleneit kiszámolva

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{h^2}{4}\right) X &= x \left(1 - \frac{h^2}{4}\right) + hy, & \left(1 + \frac{h^2}{4}\right) Y &= -hx + y \left(1 - \frac{h^2}{4}\right) \\ \Rightarrow J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} &= \frac{1}{1 + \frac{h^2}{4}} \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{4} & h \\ -h & 1 - \frac{h^2}{4} \end{pmatrix} & \Rightarrow \det(J) \equiv 1 \end{aligned}$$

adódik, a $h \in (0, h_0]$ lépésköz mint paraméter bármely értékénél.

Hátra van még annak bizonyítása, hogy az az (1.9) differenciálegyenlet-rendszer $\Phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ megoldó-operátora megőrzi a területet. Ez a tény Liouville alábbi eredményének⁸ közvetlen következménye.

⁷Az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(x, y) \\ Y(x, y) \end{pmatrix}$ leképezés területtartó voltát a $J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}$ Jacobi-mátrix $\det(J) \equiv 1$ tulajdonsága fejezi ki. Ez a megállapítás idegennek és ismeretlennek tűnik, jóllehet könnyen levezethető a kettős integrálok

$$\int_{\mathcal{D}_{X, Y}} f(X, Y) dX dY = \int_{\mathcal{D}_{x, y}} f(X(x, y), Y(x, y)) \det \left(\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right) dx dy \quad (1.13)$$

alakú általános transzformációs képletéből, amelynek leggyakrabban használt $\int_{\mathcal{D}_{x, y}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{D}_{r, \varphi}} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r dr d\varphi$ változatára ha nem is mindnyájan, de sokan és jól emlékszünk. A most következő érvelés — ha az (1.13) formula felidézése megerőltető is volt valamelyikünknek — a NON RECUSO LABOREM szellemében mindnyájunk számára jól követhető kell legyen. Az f függvényt azonosan 1-nek választva az (1.13) formula az

$$\text{Area}(\mathcal{D}_{X, Y}) = \int_{\mathcal{D}_{X, Y}} dX dY = \int_{\mathcal{D}_{x, y}} \det \left(\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right) dx dy$$

alakra egyszerűsödik, és így $\text{Area}(\mathcal{D}_{X, Y}) = \text{Area}(\mathcal{D}_{x, y})$ pontosan akkor lesz igaz az összes szóba jövő \mathcal{D} tartományra, ha a $\det \left(\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right)$ mint kétváltozós függvény értéke azonosan 1. Az alsó X, Y illetve x, y indexek a \mathcal{D} tartomány $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ valamint $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ változókkal történő megadására-megadhatóságára utalnak.

⁸Liouville az (1.14) azonosság $\text{div} f \equiv 0$ speciális esetét bizonyította a mechanika egy fontos feladat-osztályára. Amit ma Liouville tételének hívunk, nem sokat tesz hozzá Liouville 1838-as gondolatmenetéhez.

1.7. Tétel Liouville Tétel *Tekintsük az $\dot{x} = \underline{f}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ differenciálegyenletet, ahol $\underline{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonosan deriválható függvény. Legyen továbbá $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ korlátos reguláris tartomány, $\partial\Omega_0$ peremmel és $\underline{\nu}$ kifelé mutató normális egységvektorral. Legyen továbbá $\Omega(t) = \Phi(t, \Omega_0)$, $t \geq 0$. A mondott feltételek mellett*

$$\frac{d}{dt} \text{mesh}(\Omega(t)) = \int_{\Omega(t)} \text{div} \underline{f}(x) dx, \quad (1.14)$$

ahol mesh az \mathbb{R}^d térbeli mértéket/térfogatot jelöli.

Bizonyítás. A $\partial\Omega(t)$ peremre ráépülő vékony határréteg térfogata $0 < h \ll 1$ esetén⁹

$$\text{mesh}(\Omega(t+h)) - \text{mesh}(\Omega(t)) \approx \int_{\partial\Omega(t)} \underline{f}(x) \cdot h \underline{\nu} dS = h \int_{\partial\Omega(t)} \underline{f}(x) d\underline{S}.$$

A bizonyítandó (1.14) azonosságot Gauss integrál-átalakító más néven divergencia tétele szerint, h -val átosztva, a $h \rightarrow 0^+$ határátmenettel kapjuk. \square

Továbbra is az (1.9) differenciálegyenlet-rendszert vizsgálva, az eddigi három diszkrétizációs módszer után — gyors emlékeztetőül az explicit Euler, implicit Euler, $\theta = \frac{1}{2}$ (más néven trapéz) módszerek lényege:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{X-x}{h} = y \\ \frac{Y-y}{h} = -x \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{X-x}{h} = Y \\ \frac{Y-y}{h} = -X \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \frac{X-x}{h} = \frac{y+Y}{2} \\ \frac{Y-y}{h} = -\frac{x+X}{2} \end{array} \right\}$$

— most lássuk a semiimplicit Euler módszer alkalmazását:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{X-x}{h} = y \\ \frac{Y-y}{h} = -X \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} X = x + hy \\ Y = y - hx - h^2y. \end{array} \right\} \quad (1.15)$$

1.8. Megjegyzés Szorozzuk be az (1.15) bal oldalán álló első egyenletet $(X+x)$ -el, a második egyenletet $(Y+y)$ -al, majd adjuk össze őket:

$$\left. \begin{array}{l} X - x = hy \\ Y - y = -hX \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X^2 - x^2 = hyX + h y x \\ Y^2 - y^2 = -hXY - hXy \end{array} \right\} \\ \Rightarrow X^2 + Y^2 + hXY = x^2 + y^2 + hxy.$$

A kapott eredménynek mind a fizika, mind a numerika szempontjából fontos jelentése van. Konkrét példánkban a semiimplicit Euler módszer az energiát nem őrzi meg, de a

⁹a most következő formula abban a speciális esetben válik igazán érthetővé és jól szemléltethetővé, amikor az $\dot{x} = \underline{f}(x)$ differenciálegyenletben szereplő \underline{f} vektormező az $\Omega(t)$ tartomány $\partial\Omega(t)$ határát minden pontban transzverzálisan, kifelé metszi — ez biztosítja, hogy $\Omega(t+h) \supset \Omega(t) \forall 0 < h \ll 1$

kicsivel módosított majdnem-energiát igen. Az $\frac{1}{2}(y^2 + x^2)$ tényleges energia mint fizikai invariáns helyébe egy/az attól (legalábbis a $0 < h \ll 1$ esetben) alig különböző $\frac{1}{2}(y^2 + x^2 + hxy)$ numerikus invariáns lép. (A fázisportrén a pontos megoldások $y^2 + x^2 = \text{const}$ körei helyett a diszkretizált megoldások az azokat jól közelítő $y^2 + x^2 + hxy = \text{const}$ ellipszis-család tagjain helyezkednek el. Az ellipszisek centruma az origó, a nagytengelyek a -45° , a kistengelyek a $+45^\circ$ fok irányában állnak.)

Az (1.15) jobb oldalán definiált $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \rightarrow (X, Y)$ leképezés Jacobi mátrixa és ennek determinánsa az \mathbb{R}^2 sík tetszőleges (x, y) pontjában

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 - h^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J) \equiv 1,$$

a $h \in (0, h_0]$ lépésköz mint paraméter bármely értékénél. Továbbra is az (1.9) differenciálegyenlet-rendszerrel maradva, a semiimplicit Euler módszer tehát megőrzi a területet (amelyet egyébként — amint azt az 1.6. Példában láttuk, az energiával együtt a trapéz módszer is megőriz¹⁰), az explicit Euler módszer $\det(J) = 1 + h^2 > 1$ miatt megnövel, az implicit Euler módszer pedig $0 < \det(J) = \frac{1+h^2}{(1+h)^2} < 1$ okán csökkent.

A fenti példák mind arra utalnak, hogy a pontosság mint ELSŐ SZEMPONT mellett — amint azt az (1.11) hibabecslés olyan szépen kifejezésre juttatja: véges időintervallumon a lépésköz nullához tartásával együtt a diszkretizációból adódó hiba is elvben nullához kell tartson — egy MÁSODIK SZEMPONT is állandóan jelen van, amikor közelítő megoldásokról beszélünk. A lehetőség szerint arra is ügyelnünk kell, hogy a numerikus eljárás őrizze meg a feladat kvalitatív tulajdonságait¹¹. Van egy HARMADIK SZEMPONT is, amit mindig mérlegelnünk kell: Hiába tart a diszkretizációból adódó hiba elvben a nullához, ha azt a soha meg nem szüntethető kerekítési és számábrázolási hibák alaposan felülírják. Ráadásul ez a numerikus zaj — amint azt a Trefethen mátrix-család sajátértékei mutatják — strukturált formában is jelentkezhethet.

SPECIÁLIS SZERKEZETŰ EGYENLETHEZ SPECIÁLIS ALGORITMUST

¹⁰ez csak szerencsés véletlen lehet: a Ge–Marsden Tétel azt mondja ki, hogy az a numerikus eljárás, amelyik a (PN) differenciálegyenletek osztályán mind az energiát, mind a területet pontosan megőrzi, nem lehet más, mint a pontos megoldások menti idő-átparaméterezés

¹¹Az (1.9) rendszerre négy diszkretizációs módszert is ráeresztettünk, és megvizsgáltuk, hogyan s mint maradnak érvényben – vagy éppen mennyire torzulnak el – az energia– valamint a területmegmaradás törvényei. És hogy egy egészen más jellegű kvalitatív tulajdonságról is szó essék: Ha az $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + u(1 - u)$ parciális differenciálegyenletben u helyesen modellezi egy kedvező gén relatív gyakoriságának térbeli/egyenes-menti terjedését, vagy éppen egy oldat koncentrációjának változását az idő és a kémcső menti hosszúság függvényében, akkor a pontos megoldással együtt a közelítő megoldás sem szabad, hogy negatívvá vagy egynél nagyobbá váljon.

Az (1.9) kezdetiérték-feladat a Newton második törvényét potenciális erőterben leíró

$$\ddot{x} + V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\text{PN}) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases}$$

differenciálegyenletek családjához tartozik. A (PN) differenciálegyenletek két különleges tulajdonsággal rendelkeznek:

- pontos megoldások mentén az $E(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$ energia megőrződik
- az idő múlása a fázisportrén/fázissíkon megőrzi a területet

A $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$ Hamilton-függvény, esetünkben az energia megmaradása a pontos megoldások dinamikájának jól ismert tulajdonsága, amelyet matematikailag az összetett függvény deriválási szabálya igazol:

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t))|_{(\text{PN})} = (H'_x \cdot \dot{x} + H'_y \cdot \dot{y})|_{(\text{PN})} = V'(x) \cdot y + y \cdot (-V'(x)) = 0.$$

A pontos megoldások dinamikájában a terület is változatlan marad¹²: ez az 1.7. Tétel speciális esete (és a $\text{div}(\begin{smallmatrix} y \\ -V'(x) \end{smallmatrix})$ divergencia azonosan nulla voltával egyenértékű).

A semiimplicit Euler módszert a (PN) feladatok osztályán úgy szokás definiálni, mint a

$$\phi_S : [0, h_0] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_S \left(h, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x + hy \\ y - hV'(x + hy) \end{pmatrix}$$

leképezést, amely mögött természetesen most is a deriváltak különbségi hányadosokkal történő közelítése áll:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{X-x}{h} = y \\ \frac{Y-y}{h} = -V'(X) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} X = x + hy \\ Y = y - hV'(x + hy) \end{array} \right\}$$

A $V(x) = \frac{x^2}{2}$ speciális esetben az (1.15) képletet kapjuk vissza.

1.9. Lemma *A (PN) differenciálegyenletek osztályán a rögzített $h \in [0, h_0]$ lépésközzel vett semiimplicit Euler módszer megőrzi a területet.*

¹²Vácsolunk egy közvetlen bizonyítást is: a $\dot{\Phi}(t, x, y) = \Psi(t, x, y)$, $\dot{\Psi}(t, x, y) = -V'(\Phi(t, x, y))$ formulákat kell csak az x valamint az y változók szerint egyszer–egyszer parciálisan deriválni, majd $J(0) = I$ per definitionem és $\frac{d}{dt}J(t) \equiv 0$: minden kiesik, direkt számolás a megfelelő visszahelyettesítésekkel. (Ha valakinek elsőre kijön, büszke lehet magára, hiszen ugyancsak hosszadalmas, a rontások és elszámolások megannyi lehetőségével. A szerző szerényen vallja be, hogy neki csak a harmadik próbálkozásra sikerült.)

Ezen a ponton már világos kell legyen, hogy a H Hamilton-függvény és a $2d$ -dimenziós térfogat invarianciája az általános, Hamilton típusú $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$, $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$ (ahol $x, y \in \mathbb{R}^d$) dinamikákban is teljesül.

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy $\det(J) \equiv 1$. Valóban,

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & h \\ -hV''(x+hy) & 1 - hV''(x+hy) \cdot h \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J) \equiv 1,$$

s már készen is vagyunk. □

A Verlet (más néven Störmer–Verlet) módszert a (PN) feladatok osztályán úgy szokás definiálni, mint a

$$\phi_V : \left(h, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + hy - \frac{h^2}{2}V'(x) \\ y - \frac{h}{2}V'(x) - \frac{h}{2}V'(x + hy - \frac{h^2}{2}V'(x)) \end{pmatrix}$$

leképezést. Verlet módszere mögött is a deriváltak különbségi hányadosokkal történő közelítése áll, de az y koordinátában most egy fél lépésközt is közbeiktatunk, majd az $y_f \approx y(\frac{h}{2})$ segédváltozót (nagy szerencse, hogy ezt meg lehet tenni) kiküszöböljük:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{X-x}{h} = y_f \\ \frac{y_f-y}{h/2} = -V'(x) \\ \frac{Y-y_f}{h/2} = -V'(X) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} X = x + hy_f \\ y_f = y - \frac{h}{2}V'(x) \\ Y = y_f - \frac{h}{2}V'(X) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = x + hy - \frac{h^2}{2}V'(x) \\ Y = y - \frac{h}{2}V'(x) - \frac{h}{2}V'(X) \end{array} \right.$$

Ez az egyszerűsítési lehetőség vezetett el a $\phi_V : [0, h_0] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ Verlet módszer általunk is használt, teljesen explicit definíciójához.

Az egymás utáni $t_k = kh$, $k=0,1,2, \dots$ időpillanatokhoz tartozó $x_k \approx x(kh)$, $y_k \approx y(kh)$ és a $t_{k+1/2} = (k + \frac{1}{2})h$ időpillanathoz tartozó $y_{k+1/2} \approx y(t_{k+1/2})$ közelítő értékekre az első látásra implicitnek tűnő

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x_{k+1}-x_k}{h} = y_{k+1/2} \\ \frac{y_{k+1/2}-y_k}{h/2} = -V'(x_k) \\ \frac{y_{k+1}-y_{k+1/2}}{h/2} = -V'(x_{k+1}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k + hy_{k+1/2} \\ y_{k+1/2} = y_k - \frac{h}{2}V'(x_k) \\ y_{k+1} = y_{k+1/2} - \frac{h}{2}V'(x_{k+1}) \end{array} \right\}$$

rekurzió tartozik, amely azonban az

$$\left. \begin{array}{l} x_{k+1} = x_k + hy_k - \frac{h^2}{2}V'(x_k) \\ y_{k+1} = y_k - \frac{h}{2}V'(x_k) - \frac{h}{2}V'(x_k + hy_k - \frac{h^2}{2}V'(x_k)) \end{array} \right\}, \quad k = 0,1,2, \dots$$

explicit rekurzióvá, ha úgy tetszik, közvetlenül programozható utasítás-sorozattá szelődül.

1.10. Lemma *A (PN) differenciálegyenletek osztályán a rögzített $h \in [0, h_0]$ lépésközzel vett Verlet módszer megőrzi a területet.*

Bizonyítás. Azt kell igazolnunk, hogy $\det(J) \equiv 1$. Valóban,

$$J = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{2}V''(x) \equiv \frac{\partial X}{\partial x} & h \\ -\frac{h}{2}V''(x) - \frac{h}{2}V''(X) \cdot \frac{\partial X}{\partial x} & 1 - \frac{h}{2}V''(X) \cdot h \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(J) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{h^2}{2}V''(x) \equiv 1$$

amit bizonyítani akartunk. □

Mind a semiimplicit, mint a Verlet módszer megőrzi tehát a (PN) differenciálegyenletre vonatkozó két megmaradási törvény egyikét: a fázisportrén/fázissíkon a terület a numerikus megoldás során sem változik. Az energiát a két módszer egyike sem őrzi meg¹³, de még ha viszonylag nagy lépésközzel számolunk is, roppant hosszú ideig elképesztően jól közelíti.

Itt a legfőbb ideje, hogy konkrét számadatokat is mondjunk. Íme a numerikus eredmények:

#	módszer	h	T	a diszkrétizált energia $t = 0$ és $t = T$ között
1	ϕ_E	0.001	100	monoton nő 1 és 1.068... között
2	ϕ_E	0.001	1000	monoton nő 1 és 1,70... között
3	ϕ_I	0.001	100	monoton fogy 1 és 0.934... között
4	ϕ_I	0.001	1000	monoton fogy 1 és 0.46... között
5	ϕ_S	0.1	10000	oszcillál 0.957 és 1.045 között
6	ϕ_V	0.1	10000	oszcillál 0.998 és az 1.000... között

A számítógépet a csillapítás és külső gerjesztés nélküli inga/hajóhinta (1.6) egyenletéből skálázott/normált $\ddot{x} + \sin(x) = 0$ alakú egyenletre eresztettük rá, az $x(0) = \frac{\pi}{2}$, $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Maga az egyenlet természetesen (PN) típusú és $V(x) = 1 - \cos(x)$. (Elvben lehetne akár $V(x) = -\cos(x)$ is, de a szabad konstansot érdemes úgy választani, hogy a $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$ összenergia lehetséges minimuma — az inga alsó egyensúlyi helyzetében — zérus legyen.) A kezdeti feltételt/állapotot úgy választottuk meg, hogy az onnan induló pontos megoldás energiája egységnyi legyen. Hat MATLAB kísérletet

¹³Ezt nem is nagyon teheti: a Ge–Marsden Tétel azt mondja ki, hogy az a numerikus eljárás, amelyik a (PN) differenciálegyenletek osztályán mind az energiát, mind a területet pontosan megőrzi, nem lehet más, mint egy, a pontos megoldások menti idő-átparaméterezés: az (1.9) egyenletre — szerencsés véletlen! — ezt a $\theta = \frac{1}{2}$ trapéz módszer is megteszi. A számolás részleteit az 1.6. Példában már bemutattuk. Itt említjük meg azt is, hogy az 1.8. Megjegyzésben a semiimplicit Euler módszer kapcsán bevezetett numerikusan invariáns majdnem-energia fogalma már a Verlet módszerre sem vihető át.

végeztünk, az energiát mindig a megfelelő numerikus megoldás mentén vizsgálva a $[0, T]$ idő-intervallumon. A lépésköz h (és a lépések N számával $T = Nh$). Az utolsóelőtti kísérletben az oszcillációk összessége sinus-hullám, az utolsó kísérletben ciklois-hullám jellegűek voltak. (Az oszcillációk száma mindkét esetben jó közelítéssel ezer volt.) Emlekeztetünk arra, hogy ϕ_E , ϕ_I , ϕ_S és ϕ_V rendre az explicit Euler módszert, az implicit Euler módszert, a semiimplicit Euler módszert és a Verlet módszert jelentik.

Lehet csodálkozni. Jóllehet a Táblázat sokkoló jellegét részben a fázistér kétdimenziós volta okozza, a belőle levonható következtetések általában is érvényesek.

EGY NUMERIKUS MÓDSZER CSAK AKKOR LEHET IGAZÁN HATÉKONY, HA

- figyelembe veszi a megoldandó feladat belső, kvalitatív tulajdonságait
- maximálisan ügyel a fizikára, amelyből a konkrét feladat származik

Célfeladathoz tehát célprogram tartozik. De ahhoz, hogy a számítógépet a valóban éles esetekben is jól tudjuk használni, tudnunk kell, mi van a célprogramok "fekete doboz"-ban: a konkrét feladat-osztály fizikájától függő hibrid, gondosan konstruált, ám ugyanakkor heurisztikus elemeket is jócskán tartalmazó algoritmusok.

A ϕ_T trapéz, valamint a (PN) típusú differenciálegyenletekre definiált Verlet módszer kivételével (amelyek másodrendű módszerek) minden eddig említett diszkrétizációs eljárás, köztük a ϕ_θ is (a paraméter $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta \neq \frac{1}{2}$ értékeire) elsőrendű. Egy lépéses módszerek rendje pontosan akkor $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$, ha az (1.11) egyenlőtlenség jobb oldalán a $\text{const}(T)$ tényező szorozója a h lépésköz p -edik hatványa.

1.11. Megjegyzés *Az implicit Euler módszer a számítógép részére természetesen nem adható meg $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} Y \\ -\sin(X) \end{pmatrix}$ alakban. Szükség van az $X = x + hY$, $Y = y - h \cdot \sin(X)$ egyenletrendszer, illetve az ebből kapott $X = x + hy - h^2 \sin(X)$ egyenlet megoldására. Ez utóbbi sem adható meg zárt alakban: X pontos értéke helyett meg kell elégednünk annak egy \tilde{X} közelítésével. Ha azonban \tilde{X} már ismert, akkor Y helyett vehetjük annak $\tilde{Y} = y - h \cdot \sin(\tilde{X})$ közelítését.*

Feladatunk tehát az $X = x + hy - h^2 \sin(X)$ egyenlet numerikus megoldása, amelyet elegendően kicsiny h lépésköz mellett iterációval végezhetünk. Az

$$\mathcal{F}_{h,x,y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad X \rightarrow \mathcal{F}_{h,x,y}(X) = x + hy - h^2 \sin(X)$$

képlettel definiált egyváltozós valós függvény $\frac{d}{dX} \mathcal{F}_{h,x,y}(X) = -h^2 \cos(X)$ deriváltja abszolút értékben legfeljebb $q = h^2$ lehet. Amennyiben $q < 1$, ha tehát $0 < h \leq h_0 < 1$, akkor az $X = x + hy - h^2 \sin(X) \Leftrightarrow X = \mathcal{F}_{h,x,y}(X)$ fixpont-egyenletre az iterációs módszer minden további nélkül alkalmazható. Az $X_{n+1} = \mathcal{F}_{h,x,y}(X_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ sorozat — tetszőleges $X_0 \in \mathbb{R}$ kiinduló érték esetén — a fixpontegyenlet egyetlen, $X = X^ \in \mathbb{R}$ megoldásához tart. Az iterációt a számítógépes program az $|X_{n_*} - X_{n_*-1}| < \text{TOL}$ megállási feltétel teljesülésekor fejezi be, és az X^* fixpontot a $\tilde{X} = X_{n_*}$ értékkel azonosítja. A korábbi analízis*

tanulmányainkból ismert és a számegyenes tetszőleges kontrakciójára érvényes (az emlékezetet a 2.30. Megjegyzés is frissíti)

$$|X_n - X^*| \leq |X_1 - X_0| \cdot \frac{q^{n-1}}{1-q}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

hibabecslés roppant gyors konvergenciát jelent, ami geometriailag a pókháló-diagramm pár lépés utáni "bekonvergálásával" szemléltethető. Az iterációt a szokásos $X_0 = x$ értékkel indítva $|X_1 - X_0| = |hy - h^2 \sin(X_0)| \leq h(|y| + h)$. Így az $|y| \leq 10$ feltétel mellett a 10^{-12} pontossághoz a $h = 0.1$ illetve $h = 0.001$ lépésköz-választással nyolc illetve három iterációs lépés már elegendő.

A diszkretizációs/numerikus módszerek tárgyalása a 2.27. Definícióval folytatódik és a 2.5 Alfejezet végéig tart.

MEG NINCS KESZEN!!!!!!!

1.12. Megjegyzés Numerikus módszerek nélkül egy tapodtat se! Az

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

differentiálegyenlet megoldásait lényegében csak akkor tudjuk konkrét képlettel kiszámolni, ha az egyenlet állandó együtthatós (homogén vagy inhomogén) lineáris illetve szétválasztható:

- $f(t, x) = Ax + b(t)$
- $d = 1$ és $f(t, x) = g(t) \cdot h(x)$
- valamint a fenti két típus „rokonsága”

Numerikus, közelítő eljárások természetesen mindig rendelkezésre állnak.

A számítógépek elterjedésével a matematika részint experimentális tudománnyá vált.

Ha úgy vesszük, maga a π szám is egy-, sőt többfajta numerikus módszer.

1.4. Rezgőkör és rugó csillapítással

Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletekkel nem most találkozunk először. Ismereteinket konkrét példák bemutatásával foglaljuk össze. Alappéldánk az RLC-kör vagy ha valakinek úgy a szemléletesebb, a fékezett, gerjesztés nélküli rugó differenciálegyenlete:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - by \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

ahol $b > 0$. A megoldások kézzel történő kiszámítása szempontjából a másodrendű $\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0$ alak a kezelhetőbb. A számítógép két elsőrendű egyenletből álló rendszert igényel mátrixos alakban és az $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ kezdeti feltételek megadását.

Az (1.16) egyenletre a próbafüggvény módszert alkalmazzuk, amely a $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + 1$ karakterisztikus polinomhoz vezet.

1.13. Megjegyzés *A határozatlan együtthatók módszere (leánykori nevén a próbafüggvény módszer) mint számolási trükk régi útitársunk:*

- *Feltesszük, hogy a megoldás ilyen és ilyen (paraméteres) alakú, majd*
- *a szabad paramétereket visszahelyettesítéssel, utólag választjuk meg.*

Hasonló érveléssel már korábban is találkoztunk:

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+6} dx = 2 \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-3} dx = 2 \ln(x-2) - \ln(x-3) + C,$$

hiszen a nevezőt szorzattá alakítva, a parciális integrálás szabályai szerint

$$\frac{x+4}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad \Rightarrow \quad Ax - 3A + Bx - 2B = x + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} x \text{ együtthatói: } A + B = 1 \\ y \text{ együtthatói: } -3A - 2B = 4 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad A = 2 \text{ és } B = -1;$$

majd (az $\frac{1}{x-2}$ és az $\frac{1}{x-3}$ függvények után most) az $e^x \cos(2x)$ és az $e^x \sin(2x)$ függvények lineáris függetlenségét használva

$$\int e^x \cos(2x) dx = \frac{1}{5} e^x \cos(2x) + \frac{2}{5} e^x \sin(2x) + C,$$

hiszen a feltételezett

$$\int e^x \cos(2x) dx = Ae^x \cos(2x) + Be^x \sin(2x) + C$$

eredményt visszaderiválva

$$e^x \cos(2x) = Ae^x \cos(2x) - 2Ae^x \sin(2x) + Be^x \sin(2x) + 2Be^x \cos(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} e^x \cos(2x) \text{ együtthatói: } A+2B=1 \\ e^x \sin(2x) \text{ együtthatói: } -2A+B=0 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{5} \text{ és } B = \frac{2}{5}.$$

A hárommal ezután **1.16.** Példa a határozatlan együtthatók módszerének újabb változatát mutatja majd be. (Nem csodálatos, hogy lényegében ugyanaz a számolási trükk mennyire különböző feladatokra alkalmazható?)

1.14. Példa Az (1.16) feladat $\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0$ változatában a próbafüggvény $x(t) = e^{\lambda t}$. Az egyenletbe történő visszahelyettesítéssel nyerjük a $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + 1$ karakterisztikus polinomot:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + b\lambda + 1 = 0.$$

A $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + 1$ karakterisztikus polinom gyökei $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$.

A $D = b^2 - 4$ diszkrimináns előjele szerinti három eset bemutatása:

Ha $D < 0$, például $b = \frac{6}{5}$:

$$b = \frac{6}{5} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{3}{5} \pm i\frac{4}{5} \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-\frac{3}{5}t} \cos\left(\frac{4}{5}t\right) + c_2 e^{-\frac{3}{5}t} \sin\left(\frac{4}{5}t\right)$$

Miután az $\ddot{x} + \frac{6}{5}\dot{x} + x = 0$ egyenlet általános megoldását kiszámoltuk, az $y(t) = \dot{x}(t)$ visszahelyettesítéssel áttérünk a vektoros alakra:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{3}{5}t} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{4}{5}t\right) \\ -\frac{3}{5} \cos\left(\frac{4}{5}t\right) - \frac{4}{5} \sin\left(\frac{4}{5}t\right) \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{3}{5}t} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{4}{5}t\right) \\ \frac{4}{5} \cos\left(\frac{4}{5}t\right) - \frac{3}{5} \sin\left(\frac{4}{5}t\right) \end{pmatrix}$$

Ha $D = 0$, azaz $b = 2$:

$b = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \Rightarrow x(t) = c_1 t e^{-t} + c_2 e^{-t}$ (belső rezonancia) Miután az $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$ egyenlet általános megoldását kiszámoltuk, az $y(t) = \dot{x}(t)$ visszahelyettesítéssel áttérünk a vektoros alakra:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \left(t e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ha $D > 0$, például $b = \frac{5}{2}$:

$$b = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = -2 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{-2t}$$

Ez esetben ugyanolyan könnyű a vektoros alakkal számolni, mint a másodrendűvel:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1.15. Példa (Folytatás: az (1.16) feladat tárgyalása a mátrixos változat alapján). A próbafüggvény most vektoros alakú: $x(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$. Az egyenletbe történő visszahelyettesítéssel:

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} \mathbf{v}) = A(e^{\lambda t} \mathbf{v}) \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = e^{\lambda t} A \mathbf{v} \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda \mathbf{v} = A \mathbf{v}.$$

Tehát λ sajátérték, $\mathbf{v} = \mathbf{s}$ pedig a λ -hoz tartozó sajátvektor. A karakterisztikus polinom elnevezés a mátrixos alakra utal:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -b-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + b\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}.$$

A korábbiakban már tárgyalt három eset, mindvégig vektorosan—geometrikusan:

- $0 < b < 2$: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ konjugált komplex pár, $\beta \neq 0$, $\alpha < 0$
 \Rightarrow az origó stabil fókusz, valós sajátvektorok nincsenek
és a trajektóriák forgásiránya az óramutató járásával ellentétes
- $b = 2$: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 < 0$ kétszeres sajátérték
 \Rightarrow az origó elfajult stabil csomó, az egyszeres sajátvektor $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
és a (nem-triviális) trajektóriák érintik az \mathbf{s} sajátirányt
- $2 < b$: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ negatív valós számok
 \Rightarrow az origó stabil csomó, a sajátvektorok $\mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$
és a (nem- \mathbf{s}_1 irányú) trajektóriák érintik az \mathbf{s}_2 sajátirányt

A fázisportré forgásiránnyal és az (origóban történő) aszimptotikus érintésekkel kapcsolatos finomabb tulajdonságait a vektormező felvázolásával, néhány pontban történő ábrázolásával nyerjük.

A $0 < b \leq 2$ esetben a pozitív síknegyed minden pontjában a vektormező jobbra (hiszen ott $\dot{x} = y > 0$) és lefelé (hiszen ott $\dot{y} = x - 2y < 0$) mutat, ami bőségesen elegendő a forgásirány meghatározásához.

A $b = 2$ esetben még látszik a forgásirány „maradék”. Az $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sajátvektor által meghatározott sajátaltér invariáns (a $\pm \mathbf{s}$ pontokon átmenő $\pm e^{\lambda t} \mathbf{s}$ trajektória ugyancsak az \mathbf{s} sajátirányba esik), ami aprópénzre váltva azt is jelenti, hogy a trajektóriák nem metszik az $y = -x$ egyenletű egyenest. Ugyanakkor az $y = -\frac{1}{2}x$, $x > 0$ félegyenes pontjai a rajtuk áthaladó trajektóriák minimumhelyei (speciálisan $\dot{x} = y < 0$ és $\dot{y} = -x - 2y = 0$), azok odáig csökkennek, utána növekednek. Ugyanezek a trajektóriák az $y = 0$, $x > 0$ félegyenesig jobbra, utána pedig balra haladnak. A gondolatmenet kis megfejelése elvezet az origóban történő aszimptotikus érintés igazolásáig.

A $b > 2$ eset jóval egyszerűbb, hiszen csak az $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{s}_2$ általános megoldás \mathbf{s}_1 és \mathbf{s}_2 irányú összetevőinek/koordinátáinak $t \rightarrow \infty$ melletti aszimptotikáját kell egymással összehasonlítani. Forgásirányról itt nem beszélhetünk.

Mindez világosan mutatja, hogy a függvényvizsgálat módszerei, kezdve az

- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow x^3 - 3x^2 + 2$ (harmadfokú polinom)
- $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$ (ciklois)
- $\left. \begin{array}{l} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = y^2 - x^2\} \\ \Leftrightarrow \{r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi] \mid r^2 = \cos(2\varphi)\} \end{array} \right\}$ (lemniskáta)

feladatokkal, hogyan terjeszthetők ki az

- $\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \quad \& \quad x(0) = 0 \\ \dot{y} = -x - 2y \quad \& \quad y(0) = 1 \end{array} \right\}$ (kezdetiérték-feladat)

implicit alakban megadott görbék tulajdonságainak elemzésére.

A teljesség kedvéért az (1.16) egyenletet polárkoordinátákra is átírjuk:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - by \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(r(t) \cos(\varphi(t))) = r(t) \sin(\varphi(t)) \\ \frac{d}{dt}(r(t) \sin(\varphi(t))) = -\cos(\varphi(t)) - br(t) \sin(\varphi(t)) \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = r \sin(\varphi) \\ \dot{r} \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = -r \cos(\varphi) - br \sin(\varphi) \end{array} \right\}$$

Az első egyenletet $\cos(\varphi)$ -vel, a másodikat $\sin(\varphi)$ -vel szorozzuk, majd a kettőt összeadjuk:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - by \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{r} = -br \sin^2(\varphi) \\ \dot{\varphi} = -1 - br \sin(\varphi) \cos(\varphi) \end{array} \right\}, \quad (1.17)$$

A végeredményt érdemes összehasonlítani az

$$E(t) = \frac{1}{2}y^2(t) + \frac{1}{2}x^2(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{E} = y\dot{y} + x\dot{x} = \dot{x} = y(-x - by) + xy = -by^2 \leq 0$$

energia-becsléssel, amiben nem nehéz felismerni az LRC-körre vonatkozó $\dot{E}(t) \leq -RQ^2 = -RI^2 \leq 0$ (1.3) egyenlőtlenséget sem. Az energia tehát legalábbis nem növekszik az idő előrehaladtával. Ez a nem-növekedés itt és most szigorú csökkenés is, hiszen $\dot{E}(t) = 0 \Leftrightarrow y(t) = 0$ csak azokban a kivételes időpontokban teljesül, amikor a rugó valamelyik irányban maximális kitérésű és (az $y(t) = \dot{x}(t) = 0$ pillanatnyi sebességgel) éppen visszafordul. Ezek az időpontok izoláltak. Az áramkörü interpretációban azokról a pillanatokról van szó, amikor a kondenzátor feltöltöttsége éppen maximális, s amikor nem folyik áram, jobban mondva amikor az áram éppen visszaindul. Az energia szigorú csökkenése úgy valósul meg, hogy a súrlódás illetve az ohmikus ellenállás okozta veszteség a lecsengés folyamatában csak diszkrét, egymástól viszonylag távoli időpillanatonként lehet nulla. Mindez jól látszik az egyenlet (1.17) polárkoordinátás átfogalmazásából is.

Az $E(t)$ energia $t \rightarrow \infty$ melletti nullához tartását az (1.16) egyenlet általános megoldása alapján már sokkal korábban tudtuk: a $b > 0$ feltétel szerint $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} < 0$, ami összességében exponenciális lecsengést biztosít (jóllehet a Gronwall Lemma $\frac{\dot{v}(t)}{v(t)} \leq \text{const} < 0$ differenciális változata — amelyet a (3.25) rendszerrel kapcsolatban említünk meg — a $v(t) = E(t) > 0$ energiafüggvényre itt és most nem teljesül).

1.16. Példa A.) Továbbra is az (1.16) egyenletnél maradva, keressen olyan α, β, γ valós paramétereket, amelyekre a

$$V(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta/2 \\ \beta/2 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

módosított energiafüggvény olyan, hogy

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = -x^2 - y^2 < 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, (x, y) \neq (0, 0). \quad (1.18)$$

B.) Szemléltesse az eredményt geometriailag!

A.) A *puding próbája az evés*:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} &= 2\alpha x\dot{x} + \beta\dot{x}y + \beta x\dot{y} + 2\gamma y\dot{y} \Big|_{t=0} \\ &= 2\alpha xy + \beta y \cdot y + \beta x(-x - by) + 2\gamma y(-x - by) = -x^2 - y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x^2 \text{ együtthatói: } -\beta = -1 \\ xy \text{ együtthatói: } 2\alpha - \beta b - 2\gamma = 0 \\ y^2 \text{ együtthatói: } \beta - 2\gamma b = -1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \beta = 1, \gamma = \frac{1}{b} \text{ és } \alpha = \frac{1}{b} + \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

B.) *Kulcsfontosságú, hogy ez a $V(x, y) = \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{2}\right)x^2 + xy + \frac{1}{b}y^2$ kvadratikus alak pozitív definit, azaz előjele definitíve/határozottan (mindenütt, mármint az origó kivételével) pozitív. Valóban,*

$$V(x, y) = \left(\frac{\sqrt{b}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{b}}y\right)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{4}\right)x^2 > 0 \quad \text{ha } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A $\left(\frac{1}{b} + \frac{b}{2}\right)x^2 + xy + \frac{1}{b}y^2 = c > 0$ szintvonalak az origó, mint a $V(x, y) = c = 0$ szintalakzat körüli ellipszisek. A geometriai jelentés az, hogy az (1.16) differenciálegyenlet trajektóriái ennek a Matrjosa-baba szerűen egymásba skatulyázott ellipszis-család minden egyes tagját transzverzálisan, kívülről befelé haladva metszik. Másképpen fogalmazva, az $\begin{pmatrix} \dot{x}(0) \\ \dot{y}(0) \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x - by \end{pmatrix}$ vektormező a sík minden egyes pontjában tompaszöget zár be az ottani szintvonal $\underline{\text{grad}}V(x, y) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, y), \frac{\partial V}{\partial y}(x, y)\right)$ normálvektorával. Valóban, az összetett függvény deriválási szabálya szerint kettejük skaláris szorzata, ahogyan az (1.18) képletben is,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} &= \langle \underline{\text{grad}}V(x, y), f(x, y) \rangle \\ &= \left\langle \left(\left(\frac{2}{b} + b\right)x + y, x + \frac{2}{b}y\right), (y, -x - by)\right\rangle = -x^2 - y^2, \end{aligned}$$

ami (az origó kivételével) mindenütt negatív.

1.5. Függelék 1.)

Egy kevés lineáris algebra és lineáris analízis

Lehet, hogy az Olvasó még nem találkozott a *lineáris analízis* kifejezéssel. Csodálkoznia mégsem szabad, hiszen már jól tudja, hogy az algebrai struktúra mellett minden mátrix hordoz geometriai és így analitikus struktúrát is. És sok példát tud arra is, milyen kombinatorikus illetve sztochasztikus tulajdonságok jeleníthetők meg mátrixok segítségével.

Először *idézzük fel, hogy az 1.16. Példa a lineáris algebra mely részeihez kapcsolódik.*

A teljes négyzetek összegévé alakítás helyett alkalmazhatjuk a kvadratikus alakok pozitív definitására tanult elégséges és szükséges feltételt is. Egy kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha az őt leíró szimmetrikus mátrix minden egyes főminorjának determinánsa pozitív, azaz ha

$$\left(\frac{1}{b} + \frac{b}{2}\right)x^2 + xy + \frac{1}{b}y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} \frac{1}{b} + \frac{b}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

szerint

$$\det\left(\frac{1}{b} + \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{b} + \frac{b}{2} > 0 \quad \text{és} \quad \det\begin{pmatrix} \frac{1}{b} + \frac{b}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{4} > 0,$$

amely minden $b > 0$ esetén automatikusan teljesül.

Egy jól kiszámolható speciális eset kvadratikus függvényünk szintvonalainak ábrázolására $b = \frac{3}{2}$. Ekkor a kvadratikus alak mátrixa valamint sajátértékei és (célszerűen egységnyi hosszúnak választott) sajátvektorai

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} + \frac{b}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \Big|_{b=\frac{3}{2}} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} \frac{17}{12} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{8}{3} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{3}, \mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \frac{5}{12}, \mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Az \mathbf{s}_1 és az \mathbf{s}_2 merőlegessége nem véletlen és az sem, hogy együttesen az \mathbb{R}^2 sík olyan bázisát alkotják, amelyben az A mátrix (pontosabban az A mátrix által reprezentált lineáris leképezés) a $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ alakot ölti.

Általában is, ha A $d \times d$ szimmetrikus mátrix, akkor a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ sajátértékek valósak, a hozzájuk tartozó $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_d$ sajátvektorok pedig úgy is megválaszthatók, hogy ortonormált bázist alkossanak. Így minden szimmetrikus mátrix diagonalizálható a valós számok teste felett, egy alkalmasan választott ortonormált mátrix segítségével¹⁴:

$$AM = MD \Leftrightarrow M^T AM = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d) \quad \text{ahol} \quad M = \text{col}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_d).$$

¹⁴Egy sajátvektorokból álló bázisban minden lineáris leképezés mátrixa diagonális: a főátlóban a sajátértékek állnak. Az ilyenkor érvényes transzformációs képlet

$$T^{-1}AT = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d),$$

Konkrét példánkban

$$M = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = M^T A M = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \frac{5}{12} \end{pmatrix}.$$

A számolást célszerű két részre bontva elvégezni:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{60} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

A két részeredmény szorzata valóban a $D = \text{diag}(\frac{5}{3}, \frac{5}{12})$ mátrix.

Az $A = A^T$ szimmetrikus mátrix-szal együtt az általa meghatározott kvadratikus alak is transzformálódik. A diagonális alaknak megfelelően az új változóiban csak a tiszta négyzetes tagok maradnak meg. Bevezetve az

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\xi \ \eta) = (x \ y) M,$$

konkrétan a

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\xi \ \eta) = (x \ y) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

új változókat, azonnal adódik az

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 &= (x \ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) M M^T \cdot A \cdot M M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x \ y) M \cdot D \cdot M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\xi \ \eta) D \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2, \end{aligned}$$

ahol a T mátrix első, második, ..., d -edik oszlopvektorában rendre a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ sajátértékekhez tartozó $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_d$ sajátvektorok (nak az eredeti

$$\mathbf{e}_1 = \text{col}(1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = \text{col}(0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_d = \text{col}(0, 0, 0, \dots, 1)$$

bázisvektorok szerint vett) koordinátái állnak. A $T = \text{col}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_d)$ mátrix invertálható, inverzét T^{-1} jelöli. Az általános esetben mind a sajátértékek, mind a sajátvektorok komplexek. Amennyiben a sajátvektorok páronként egymásra merőleges valós egységvektorok — azaz ha

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_d \in \mathbb{R}^d \text{ ortonormált bázis} &\Leftrightarrow T = \text{col}(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_d) \text{ ortonormált mátrix} \\ &\Leftrightarrow T^{-1} = T^T \text{ (inverz egyenlő transzponált)} \end{aligned}$$

—, akkor a $T = M$ azonosítás után a $T^{-1} A T = D$ formula az $M^T A M = D$ formulára egyszerűsödik.

konkrétan a

$$\frac{17}{12}x^2 + xy + \frac{2}{3}y^2 = \frac{5}{3}\xi^2 + \frac{5}{12}\eta^2$$

összefüggés.¹⁵ Tehát az $\frac{17}{12}x^2 + xy + \frac{2}{3}y^2 = \text{const}$ szintvonalak egyenlete az $\mathbf{s}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{s}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sajátvektorok által meghatározott koordinátarendszerben $\frac{5}{3}\xi^2 + \frac{5}{12}\eta^2 = \text{const}$, ahol ξ az \mathbf{s}_1 , η pedig az \mathbf{s}_2 koordinátatengely mentén mért koordinátát (előjeles távolságot) jelenti. Ebben az új¹⁶, elforgatott koordinátarendszerben már azonnal látszik, hogy a kvadratikus Ljapunov függvény $V(x, y) = \text{const} > 0$ szintvonalai olyan, egymásba-skatulyázott ellipszisek, amelyek nagytengelye az \mathbf{s}_2 , kistengelye az \mathbf{s}_1 irányba mutat, és $\frac{5}{3}\xi^2 + \frac{5}{12}\eta^2 = \frac{5}{3}\left(\frac{\xi^2}{1^2} + \frac{\eta^2}{2^2}\right) = \text{const}$ miatt a nagytengelyek hossza a kistengelyek hosszának mindig a duplája. A $V(x, y) = 0$ szintvonal kivételes, és pedig maga az origó, az RLC-kör vagy ha úgy tetszik, a fékezett, gerjesztés nélküli rugó viselkedését leíró

¹⁵Általában is, a kvadratikus alakok főtengetéle kifejezhető az

$$x^T Ax = \xi^T D \xi = \sum_{1 \leq k \leq d} \lambda_k \xi_k^2 \quad \text{képlettel, ahol } \xi = M^T x.$$

Mivel az M mátrix ortonormált, $x = M\xi \Rightarrow |x| = |\xi|$ és így

$$\max_{|x|=1} x^T Ax = \lambda_{\max} \quad , \quad \operatorname{argmax}_{|x|=1} x^T Ax = \operatorname{argmax}_{|\xi|=1} \sum_{1 \leq k \leq d} \lambda_k \xi_k^2 = \mathbf{s}_{\max}$$

a maximális $\lambda_k \leq \lambda_{\max}$ ($k = 1, 2, \dots, d$) sajátértékhez tartozó egység hosszúságú sajátvektor(ok bármelyike). Mindez azt is jelenti, hogy szimmetrikus mátrixok maximális sajátértékének meghatározása (feltételes) szélsőértékfeladattá fogalmazható át: *Rayleigh elv.*

¹⁶Általában is, a két koordinátarendszer egyikét réginnek, másikat újnak nevezzük. Az indexek u és r betűi erre a két koordinátarendszerre utalnak. A „visszafelé” nyilak az indexben meglehet szokatlan, de végül is jól érthető szerepet játszanak. A régi és az új koordinátarendszerben külön-külön

$$(Ax)_r = A_{r \leftarrow r} x_r \quad \text{illetve} \quad (Ax)_u = A_{u \leftarrow u} x_u,$$

a régi és az új koordinátarendszert összekapcsolva pedig

$$x_u = T_{u \leftarrow r} x_r \Leftrightarrow x_r = T_{r \leftarrow u} x_u = T_{u \leftarrow r}^{-1} x_u \quad \text{és ennek mintájára} \quad (Ax)_u = T_{u \leftarrow r} (Ax)_r.$$

Az eddigiek összefűzésével a mátrixok általános transzformációs szabálya

$$\begin{aligned} A_{u \leftarrow u} x_u &= (Ax)_u = T_{u \leftarrow r} (Ax)_r = T_{u \leftarrow r} A_{r \leftarrow r} x_r = T_{u \leftarrow r} A_{r \leftarrow r} T_{u \leftarrow r}^{-1} x_u \quad \forall x_u \\ &\Rightarrow A_{u \leftarrow u} = T_{u \leftarrow r} A_{r \leftarrow r} T_{u \leftarrow r}^{-1}, \quad \text{azaz} \quad A_{r \leftarrow r} = T_{u \leftarrow r}^{-1} A_{u \leftarrow u} T_{u \leftarrow r}. \end{aligned}$$

A $T_{u \leftarrow r}$ mátrix oszlopvektorai kiolvashatók az $x_u = T_{u \leftarrow r} x_r$ képletből:

$$\begin{aligned} & \text{A } T_{u \leftarrow r} \text{ mátrix } k\text{-adik oszlopvektora} \\ & = \text{a } k\text{-adik új bázisvektor koordinátái a régi koordinátarendszerben.} \end{aligned}$$

Ha az $A = A_{r \leftarrow r}$ mátrix szimmetrikus, akkor az $M = T_{u \leftarrow r}^{-1} = T_{r \leftarrow u}$, $M^T = M^{-1} = T_{u \leftarrow r}$ választás is lehetséges és ekkor a már ismert $M^T A M = D = A_{u \leftarrow u}$ formulát kapjuk vissza.

(1.16) differenciálegyenlet-rendszer egyetlen, aszimptotikusan stabil nyugalmi állapota, egyensúlyi helyzete.

Az általános megoldás képletét az 1.14. Példa, geometriáját — homogén lineáris differenciálegyenletek esetén a lokális és a globális fázisportré között nincs különbség — az 1.15. Példa tárgyalta.

Magasabbrendű homogén lineáris differenciálegyenletek mátrixos alakja sokkal kedvezőbb az ábrázolás és az elmélet számára, de az általános megoldás képletét (mármint az állandó együtthatós esetben) csak akkor könnyű felírni, ha létezik a mátrix méretével (és így a fázistér d dimenziójával) azonos számú lineárisan független sajátvektor és a sajátértékek valósak. Az általános megoldás ebben az esetben

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{s}_2 + \dots + c_d e^{\lambda_d t} \mathbf{s}_d, \quad \text{ahol } c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{R},$$

$\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_d$ pedig rendre a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok. Ha az $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$ kezdeti állapot is adott, akkor az alapmegoldások eddig még szabad $c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ együtthatóit az

$$x_0 = c_1 \mathbf{s}_1 + c_2 \mathbf{s}_2 + \dots + c_d \mathbf{s}_d$$

lineáris algebrai egyenletrendszer határozza meg.

Az általános megoldás felírásakor nem lehet megúszni az esetszétválasztást. Jóllehet nem vagyunk hozzászokva ehhez, mindvégig lehet mátrixokkal és vektorokkal dolgozni. A most következő két bekezdésben ismertetett speciális esetek a teljes általánosságot is többé-kevésbé jól jellemzik.

Az 1.14. Példa második, $b = 2$ paraméteréhez a $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -1$ kétszeres sajátérték, de csak egyetlen, az $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sajátvektor tartozik. Az $e^{\lambda \mathbf{s}} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ alapmegoldást gyorsan megkapjuk, de a másik alapmegoldás

$$x(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \text{helyett az} \quad x(t) = t e^{\lambda t} \mathbf{s} + e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad \text{alakban keresendő}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(t e^{\lambda t} \mathbf{s} + e^{\lambda t} \mathbf{v}) = A(t e^{\lambda t} \mathbf{s} + e^{\lambda t} \mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad \lambda \mathbf{s} = A \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} + \lambda \mathbf{v} = A \mathbf{v}.$$

Az ilyen, az $(A - \lambda I) \mathbf{v} = \mathbf{s}$ feltételnek eleget tevő vektorok a λ sajátértékhez és az \mathbf{s} szokásos/elsőrendű sajátvektorhoz tartozó úgynevezett másodrendű sajátvektorok. Konkrét példánkban nem nehéz meghatároznunk őket:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma + \tau = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sigma \\ 1 - \sigma \end{pmatrix},$$

például $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (összességében a korábbi eredményt kaptuk vissza). Az igazi cél persze nem ez volt, hanem egyfajta kapunyitás a többszörös sajátértékekkel rendelkező mátrixok magasabbrendű sajátvektorai, a Jordan blokk és a Jordan féle normálalak felé.

Külön tárgyaljuk a komplex sajátérték-párok esetét. Az 1.14. Példa első, $b = \frac{6}{5}$ paraméteréhez tartozó komplex általános megoldás

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{s}_2, \quad \text{ahol } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad (1.19)$$

és $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{5} \pm i\frac{4}{5}$, $\mathbf{s}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \pm i\frac{4}{5} \end{pmatrix}$. A valós és a képzetes rész kiszámítása a

$$e^{\lambda_1 t} \mathbf{s}_1 = e^{-\frac{3}{5}t} \left(\cos\left(\frac{4}{5}t\right) + i \sin\left(\frac{4}{5}t\right) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} + i\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

képletben most is a korábbi valós alapmegoldásokra vezet vissza.¹⁷

Idézzük fel azt is, hogy az $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0 \Leftrightarrow x(t) = e^{At} x_0$ skaláris feladat mintájára és — különösen ha nem tanultuk volna korábban — ellenőrizzük a sorfejtésbe történő visszahelyettesítésekkel, hogy

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x(t) = e^{At} x_0,$$

ahol

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \frac{A^3}{3!} t^3 + \dots \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (1.20)$$

minden négyzetes mátrixra igaz. A $t \rightarrow e^{At}$ mátrix exponenciális függvény zárt alakban történő kiszámítása akkor a legkönnyebb, amikor az A mátrix a valós számok teste felett diagonalizálható. Ekkor ugyanis a kettővel ezelőtti lábjegyzetben tárgyalt $A = A_{r \leftarrow r} = T_{u \leftarrow r}^{-1} A_{u \leftarrow u} T_{u \leftarrow r} = T^{-1} D T$ szabály az (1.20) sorfejtést alaposan leegyszerűsíti:

$$e^{At} = T^{-1} e^{Dt} T \quad \text{és} \quad e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_d t}). \quad (1.21)$$

Az (1.19) és az (1.21) képletek a Jordan féle mátrix normálalak segítségével minden $d \times d$ mátrixra átfogalmazhatók — de az esetszétválasztások békáját mindenképpen le kell nyelnünk. Itt jegyezzük meg, hogy az $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenlet-rendszer visszavezetése

¹⁷A komplex sajátértékek és a komplex sajátvektorok mindig párosával fordulnak elő: ha $\lambda = \alpha + i\beta$ sajátérték az $\mathbf{s} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ sajátvektorral, akkor $A\mathbf{s} = \lambda\mathbf{s} \Leftrightarrow A\bar{\mathbf{s}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{s}}$ miatt $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ is sajátérték az $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ sajátvektorral. Mivel

$$e^{\lambda t} \mathbf{s} + e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{s}} = 2 \text{Re } e^{\lambda t} \mathbf{s} \quad \& \quad e^{\lambda t} \mathbf{s} - e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{s}} = 2i \text{Im } e^{\lambda t} \mathbf{s}$$

miatt bármely komplex alapmegoldás valós illetve képzetes része valós alapmegoldás, a komplex általános (1.19) megoldásban szereplő valamennyi alapmegoldás-pár egy-egy, a valós alapmegoldásban szereplő valós alapmegoldás-párt határoz meg. Konkrétan az $\{e^{\lambda t} \mathbf{s}; e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{s}}\}$ komplex alapmegoldás-párnak megfelelő valós alapmegoldás-pár az $\{e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{u} - \sin(\beta t) \mathbf{v}), e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{v} + \sin(\beta t) \mathbf{u})\}$, hiszen

$$e^{\lambda t} \mathbf{s} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)) (\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{u} - \sin(\beta t) \mathbf{v}) + i e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \mathbf{v} + \sin(\beta t) \mathbf{u}).$$

egy vagy több magasabbrendű differenciálegyenletre teljes általánosságban a Jordan féle normálalak meghatározásával rokon, de annál kicsit nehezebb probléma.

A $d = 2$ eset ebben a tekintetben is kivételesen egyszerű:

1.17. Példa

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -4x + y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$$

Az első egyenletet deriválva, majd menet közben az ugyancsak az első egyenletből származó $y = \dot{x} + 4x$ formulát visszahelyettesítve

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -4\dot{x} + \dot{y} = -4\dot{x} + (-x - 2y) = -4\dot{x} - x - 2y = -4\dot{x} - x - 2(\dot{x} + 4x) \\ &= -4\dot{x} - x - 2\dot{x} - 8x = -6\dot{x} - 9x \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0 \end{aligned}$$

és ily módon $\lambda_1 = \lambda_2 = -3 \Rightarrow x(t) = c_1 t e^{-3t} + c_2 e^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Hasonlóan kell eljárunk az

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 3 \sin(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -4x + y + \cos(t) \\ \dot{y} = -x - 2y + 3 \sin(t) \end{cases}$$

inhomogén feladat esetében is. Az inhomogenitásokat a fenti számításokon át végighurcolva:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 2 \cos(t) + 2 \sin(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{25} \cos(t) + \frac{7}{25} \sin(t) + c_1 t e^{-3t} + c_2 e^{-3t}.$$

Szerencsére az előző három lábjegyzet elméleti fejtegetései a számítógépes megoldási módszereket csak alig-alig érintik. Numerikus módszereket — elsődlegesen numerikus lineáris algebrát, nagyméretű feladatokra — minden igényes számítógép-felhasználónak érdemes tanulnia.

1.6. Függelék 2.)

Stabilitási kritériumok lineáris egyenletekre

1.18. Definíció Az $\dot{x}=Ax$ lineáris differenciálegyenlet $x_0=0$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabil, ha

$$\max\{\operatorname{Re} \lambda_k \mid \lambda_k = \lambda_k(A) \text{ sajátérték, } k = 1, 2, \dots, d\} < 0,$$

illetve stabil, ha

$$\max\{\operatorname{Re} \lambda_k \mid \lambda_k = \lambda_k(A) \text{ sajátérték, } k = 1, 2, \dots, d\} \leq 0,$$

és a $\{\lambda_k = \lambda_k(A) \mid \operatorname{Re} \lambda_k = 0\}$ kritikus sajátértékekhez tartozó lineárisan független sajátvektorok száma pontosan $\#\{1 \leq k \leq d \mid \operatorname{Re} \lambda_k = 0\}$.

1.19. Tétel Az $\dot{x}=Ax$ lineáris differenciálegyenlet ($x_0=0$ egyensúlyi helyzetének) aszimptotikusan stabilitása exponenciális stabilitás: alkalmasan választott $\omega > 0$ és $K = K(\omega) > 0$ állandók mellett

$$|e^{At}x_0| \leq Ke^{-\omega t}|x_0| \quad \text{minden } t \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ esetén.} \quad (1.22)$$

Bizonyítás. Tudjuk — és ennyiben mégiscsak utalunk arra a bizonyos három előző lábjegyzetre —, hogy az alapmegoldások $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ etc. alakúak, és minden más megoldás alapmegoldások lineáris kombinációjaként áll elő.

Így a feltétel szerint $\omega_0 = \max\{\operatorname{Re} \lambda_k \mid k = 1, 2, \dots, d\} < 0$. Legyen most $\omega_0 < -\omega < 0$ tetszőleges. Mivel az (1.22) becslés igaz az alapmegoldások mindegyikére, minden további megoldásra — speciálisan az $x(0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő $x_{0,x_0}(t) = e^{At}x_0$ megoldásra is — igaz. A figyelmes Olvasó azt is meg tudja mondani, hogy az (1.22) mely speciális esetekben igaz a $-\omega = \omega_0$ értékre. \square

A tétel azt fogalmazza meg, hogy az állandó együtthatós, aszimptotikusan stabil $\dot{x} = Ax$ lineáris differenciálegyenlet összes megoldása (vagy ami a linearitás miatt most ugyanaz: bármely két megoldásának különbsége) $t \rightarrow \infty$ mellett legfeljebb $e^{-\omega t}$ nagyságrendű. Akik tanultak mátrixnormákat, észre kell vegyék, hogy (1.22) pontosan ugyanazt jelenti, mint a

$$\|e^{At}\| \leq Ke^{-\omega t} \quad \text{minden } t \geq 0 \text{ esetén}$$

norma-becslés. Itt $|\cdot|$ tetszőleges vektornorma az \mathbb{R}^d téren, $\|\cdot\|$ pedig a belőle származtatott mátrixnorma az \mathbb{R}^d teret önmagába vivő folytonos lineáris operátorok $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ terén.

Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet és karakterisztikus polinoma (csakúgy mint ennek multiplicitásokkal számolt gyökei), valamint az általános megoldás egymást kölcsönösen meghatározzák. Az alapmegoldások rendszere alatt a megoldások vektorterének egy bázisát értjük (elvben bármely bázist vehetjük, a gyakorlatban

igyekszünk minél egyszerűbb megoldásfüggvényeket választani), amelyek lineáris kombinációjaként az összes megoldás kifejezhető.

1.20. Példa Ha a p gyökei $\pm i, \pm i, 0, 2, 2, 2$, akkor a nyolc alapmegoldás $t \cos(t), t \sin(t), \cos(t), \sin(t), 1, t^2 e^{2t}, t e^{2t}, e^{2t}$ és így az általános megoldás $x(t) = c_1 t \cos(t) + c_2 t \sin(t) + c_3 \cos(t) + c_4 \sin(t) + c_5 + c_6 t^2 e^{2t} + c_7 t e^{2t} + c_8 e^{2t}$ az egyenlet $x^{(8)} - 6x^{(7)} + 14x^{(6)} - 20x^{(5)} + 25x^{(4)} - 22x^{(3)} + 12\ddot{x} - 8\dot{x} = 0$ hiszen $p(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^2 \lambda(\lambda - 2)^3$ (kifejtve a megfelelő nyolcadfokú polinom)

A d -edrendű, $a_d x^{(d)} + a_{d-1} x^{(d-1)} + \dots + a_2 \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$ alakú homogén lineáris differenciálegyenlet, vagy ami lényegében ugyanaz, az $\dot{x} = Ax$ alakú lineáris differenciálegyenlet-rendszer azonosan nulla egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitása a karakterisztikus polinom ismeretében könnyen eldönthető. A Routh–Hurwitz kritérium *stabilitási-kvalitatív* összefüggés, amely kapcsolatot teremt valós együtthatójú polinomok gyökei és együtthatói között. A legtöbb alkalmazásban p_d az A mátrix karakterisztikus polinomja.

1.21. Tétel Legyen

$$p_d(\lambda) = a_d \lambda^d + a_{d-1} \lambda^{d-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

valós együtthatójú polinom és tegyük fel, hogy az a_d vezéregyüttható pozitív. Ez esetben ekvivalensek:

- (i) a p_d polinom stabil, azaz valamennyi gyökének valós része negatív
- (ii) $a_{d-1} > 0, \dots, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$ valamint az alábbi négyzetes, $(d-1)$ rendű úgynevezett Hurwitz mátrix minden főminorának determinánsa is pozitív:

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & & & & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{2d-3} & a_{2d-4} & a_{2d-5} & \dots & \dots & & & & a_{d-1} \end{pmatrix}$$

Mindez természetesen úgy értendő, hogy $a_{2d-3} = a_{2d-4} = \dots = a_{d+1} = 0$.

A H mátrixot úgy kell megjegyezni, hogy először a főátlóját írjuk le. A szakirodalom nem használ egységes jelöléseket ezen a területen: a Routh–Hurwitz kritériumnak ennek megfelelően számos, a fentivel ekvivalens alakja van. Szokásos feltevés, hogy $a_d = 1$.

1.22. Példa A $c \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékeire lesz az origó stabil egyensúlyi helyzete az alábbi differenciálegyenletnek?

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & c+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ c & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A 3×3 mátrixok $p_3(\lambda) = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ karakterisztikus polinomjára

a Routh–Hurwitz kritérium $d = 3$ esete : $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ és $a_1a_2 > a_0$

érvényes. Mivel $p_3(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + (11 - c - c^2)\lambda + 6 - c - c^2$, az aszimptotikus stabilitás szükséges és elégséges feltétele $-3 < c < 2$. Kis okoskodás után a stabilitás kritériuma $-3 \leq c \leq 2$.

Érdemes felfigyelni rá, hogy a feladat igazából csak kétdimenziós, hiszen

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & c+1 \\ 0 & -1 & 0 \\ c & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dot{y} = -y \text{ és } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & c+1 \\ c & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix},$$

így a $d = 2$ Routh–Hurwitz kritérium $T = -5 < 0$ és $D = 6 - c - c^2 > 0$ egyenlőtlenségeit is használhattuk volna.

1.7. Függelék 3.)

Egyensúlyi helyzetek osztályozása a síkon

A $d = 2$ speciális esetben nemcsak az aszimptotikus stabilitás kritériumát, hanem az $\dot{x} = Ax$ egyenletek teljes osztályozását is megadjuk. A *stabil–instabil, csomó–fókusz–nyereg* esetszétválasztásokat a roppant szemléletes *nyom–determináns diagram*, a T – D paraméter–sík $TD = 0$ tengelykeresztje és $D = \frac{T^2}{4}$ egyenletű parabolája határozzák meg. Legyen tehát

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} \\ \dot{y} \end{aligned} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D, \text{ ahol } T = a + d, D = ad - bc$$

Az elfajult (pld. $\dot{x} = 0, \dot{y} = -y$: az x tengely pontjainak minden pontja stabil egyensúlyi helyzet) és átmeneti (pld. $\dot{x} = y, \dot{y} = -x - 2y$: elfajult stabil csomó) esetek kivételével:

- instabil fókusz $\Leftrightarrow T > 0$ & $D > \frac{T^2}{4}$
- instabil csomó $\Leftrightarrow T > 0$ & $0 < D < \frac{T^2}{4}$
- nyereg $\Leftrightarrow D < 0$
- stabil csomó $\Leftrightarrow T < 0$ & $0 < D < \frac{T^2}{4}$
- stabil fókusz $\Leftrightarrow T < 0$ & $D > \frac{T^2}{4}$

Az átmeneti esetek közül a legfontosabb

- centrum $\Leftrightarrow T = 0$ & $D > 0$ — stabilitás vonzás nélkül .

Az aszimptotikus stabilitás (\Leftrightarrow stabilitás & vonzás) jellemzése:

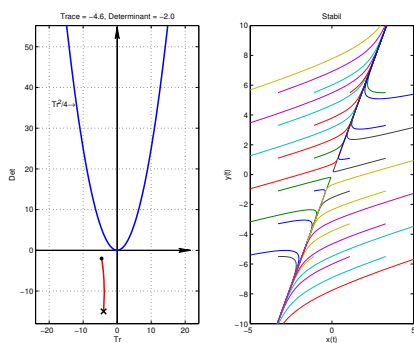
- stabil csomó vagy stabil fókusz $\Leftrightarrow T < 0$ & $D > 0$
- átfogalmazás: $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, ahol $a_1 > 0$ & $a_0 > 0$

(Az utolsó eredmény természetesen ugyanaz, mint a Routh–Hurwitz kritérium $d = 2$ esete.)

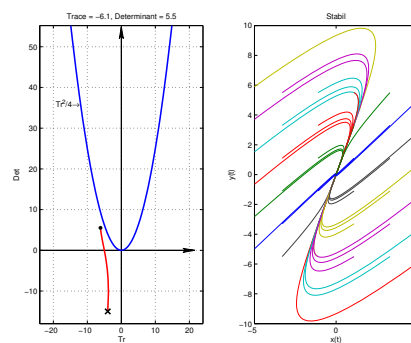
Ügyesen választott lineáris koordinátatranszformáció révén minden kétszer kettes méretű valós mátrix az alábbi normálalakok egyikére hozható:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

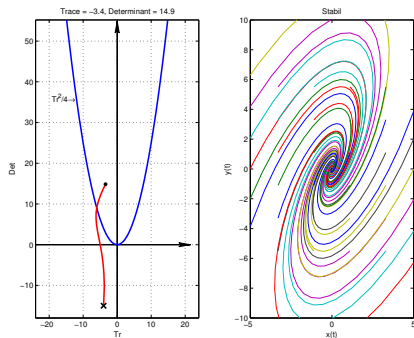
A középső mátrix egy Jordan–blokk (amikor is a λ sajátérték kétszeres, de a hozzá tartozó sajátaltér egydimenziós: az új koordinátarendszerben az $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor sajátvektor, az



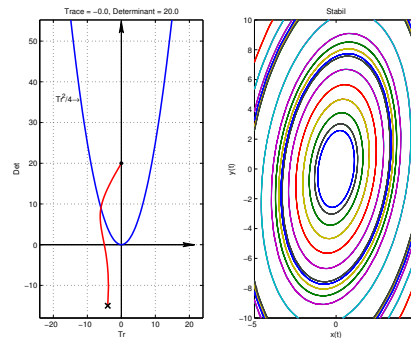
(a) Nyeregpont



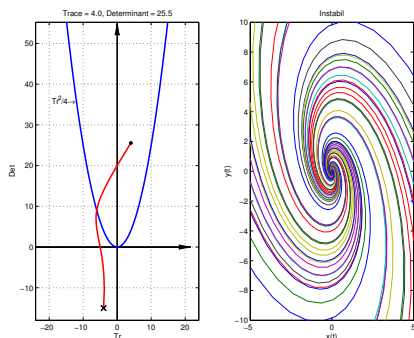
(b) Stabil/vonzó csomó



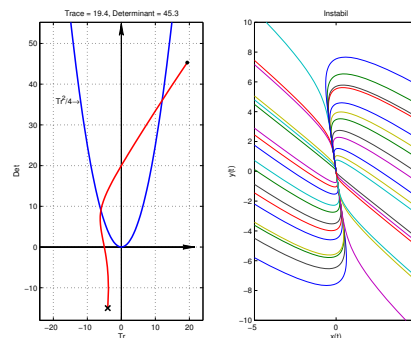
(c) Stabil/vonzó fókusz



(d) Centrum



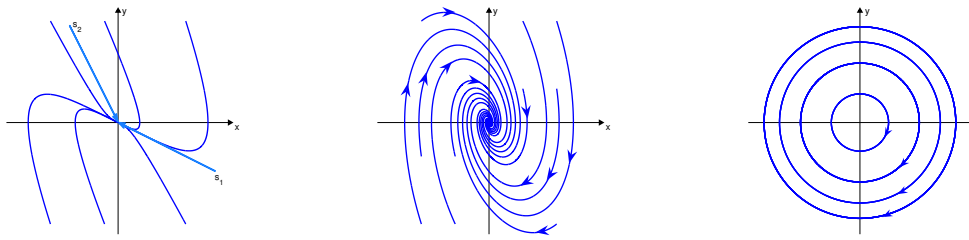
(e) Instabil/taszító fókusz



(f) Instabil/taszító csomó

1.7. ábra. Egyensúlyi helyzetek osztályozása a nyom–determináns diagram segítségével a síkon

$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor pedig másodrendű általánosított sajátvektor, azaz $(A - \lambda I)\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$, illetve $(A - \lambda I)^2\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$ de $(A - \lambda I)\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}$. A harmadik mátrixot is ismerjük: ez egy forgatásnak



(a) Stabil/vonzó csomó

(b) Stabil/vonzó fókusz

(c) Centrum

1.8. ábra. A három eset ábrázolása rögzített $D > 0$ és növekvő $-\infty < T \leq 0$ paraméterek mellett

és egy origó középpontú, $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ -szoros nagyításnak/kicsinyítésnek az egymásutánja, sajátértékei pedig $\alpha \pm i\beta$.

Nyeregpontra a legegyszerűbb példa az $\dot{x} = x, \dot{y} = -y$ rendszer origója. A *nyeregpont* elnevezésnek két magyarázata is van. Egyrészt arra utal, hogy

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x(t) = c_1 e^t \\ y(t) = c_2 e^{-t} \end{array} \right\} \Rightarrow x(t)y(t) = c_1 c_2 = \text{const}$$

miatt a trajektóriák a $z = xy$ nyeregfelület szintvonalain maradnak, másrészt arra, hogy az $\dot{x} = x, \dot{y} = -y \Leftrightarrow \dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = -x_2$ differenciálegyenletrendszer maga is egy nyeregfelület, az $F(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ egyenletű nyeregfelület révén származtatható:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \dot{x} = -(\text{grad}F(x))^T \Leftrightarrow \dot{x} = -F'(x) :$$

esik az eső a Virágos-nyeregre, a Csúcshegy és a Hármashatárhegy között (de ha ez valakinek túl romantikus, gondolhat egy műanyag piaci tojástartóra).

A síkbeli lineáris nyeregpont jellemzői a $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ sajátérték-pár, valamint a két kijövő ($t \rightarrow -\infty$ mellett onnan induló) és a két bemenő ($t \rightarrow \infty$ mellett oda érkező) trajektória, amelyek a sajátvektorok irányában haladnak. Az instabil alteret az \mathbf{s}_1 , a stabil alteret az \mathbf{s}_2 sajátvektor határozza meg.

1.23. Példa *Az elmondottak egyszerű illusztrációja:*

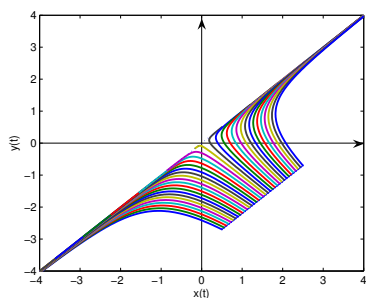
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \ \& \ \lambda_2 = -3 \Rightarrow \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \& \ \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

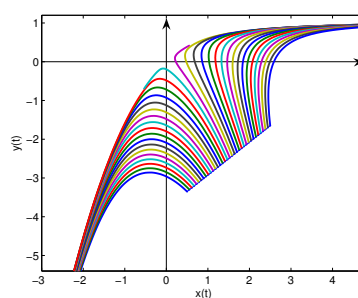
Egy stabil fókusz vagy csomó megtalálása nem nehéz feladat a számítógépnek. Ahová a (vonzási tartományból induló) trajektóriák tartanak. Az idő megfordítása (az egyenlet jobb oldala előjelenek

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}y(\tau) = -f(y(\tau)), \quad \text{ha } \tau = -t, \quad y(\tau) = x(t)$$

ellentétesre változtatása) révén ugyanígy kaphatjuk meg az instabil/taszító fókuszokat és csomókat. A nyeregpontokkal nem ez a helyzet. Egy nyeregpont a hiányával, pontosabban a kijövő és a bemenő trajektóriák hiányával vevődik észre. Egy csöppet ügyesnek kell lennünk ahhoz, hogy ezeket a kivételes trajektóriákat, az „erre vagy arra” eseteket szétválasztó *separatrixokat* meghatározhassuk. Ez bizony a Bolzano tétel! A gyakorlatban intervallum-felezés, vagy egy, a stabil alteret a nyeregpont közelében transzverzálisan metsző rövid szakasz, elegendően sűrű rács-felosztással. Így már indíthatjuk, így kell indítanunk a trajektóriákat! Oda kell tenni a nagyítót — oda kell „zoom”-olni — ahol valami érdekesebb viselkedést remélünk!



(a) Lineáris/linearizált egyenlet



(b) Nemlineáris egyenlet

1.9. ábra. Az origó mint nyeregpont instabil alterének és instabil sokaságának számítógépes előállítás

Az ábrához érdemi magyarázat szükséges. Ez a geometriai lényeg szempontjából ugyanaz a gráf-transzformáció (függvénygrafikon-transzformáció, csak a koordinátarendszer áll ferdén), mint amelyet jól ismerünk Picard féle szukcesszív approximációként. A konvergenciát mindkét esetben a kontrakciós fixponttétel biztosítja. A módszer változtatás nélkül működik kis C^1 (a C^1 normában kicsiny) perturbációk mellett. Az 1.9. Ábra az

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.7x^2 \\ -1.8xy \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + 0.7x^2 \\ \dot{y} = 2x - y - 1.8xy \end{cases} \quad (1.23)$$

egyenlethez tartozik. Két dimenzióban könnyű. (De \gg ugyanezt \ll hogyan csináljuk három dimenzióban?)

Mindez elővételezi a *stabil altér* \Rightarrow *stabil sokaság* és az *instabil altér* \Rightarrow *instabil sokaság* általános fogalmát és azt is, hogy — erről fog szólni a *Grobman–Hartman Lemma* — nyeregpont kicsiny környezetében a nemlineáris és a linearizált egyenlet megoldásai egy az egyben megfeleltethetők egymásnak.

A 2×2 méretű B mátrixok által meghatározott $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \rightarrow Bx$ leképezések osztályozása hasonló mintákat követ, mint a síkbeli $\dot{x} = Ax$ differenciálegyenletek osztályozása. Az esetszétválasztásokat a *sajátértékek jobbra vagy balra a képzetes tengelytől* feltételek helyett most a *sajátértékek kívül vagy belül a komplex sík egységkörén* feltételek határozzák meg. A részletek taglalása nélkül utalunk rá, hogy Fibonacci diszkrét idejű (1.25) dinamikájának, más szóval az $F = \mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \rightarrow Fx$ lineáris leképezésnek az origó nyeregpontja. Amint azt (1.26) előtt konkrétan kiszámoljuk, a $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sajátérték abszolút értéke egynél nagyobb, a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sajátérték abszolút értéke egynél kisebb. Fibonacci $B = F$ leképezése $\det(F) < 0$ miatt megváltoztatja az \mathbb{R}^2 sík körüljárási irányát. A differenciálegyenletekhez tartozó nyeregpontokhoz képest a Fibonacci dinamika tehát egy origóra vonatkozó tükrözést is tartalmaz, így azt nem lehet semmilyen síkbeli autonóm differenciálegyenlet megoldó-operátorából származtatni (a folytonos idő $t = n \in \mathbb{Z}$ megszorítása elvben még szóba jöhetett volna: A síkbeli autonóm differenciálegyenlet megoldó-operátorába történő beágyazás lehetetlensége algebrailag Liouville (1.14) formulájának $f(x) = Ax \Rightarrow \det(e^{At}) = e^{\text{trace}(A)t} > 0 \forall t \geq 0$ speciális esetéből következik. Mindez a determináns alapvető geometriai jelentésével függ össze:

$$\text{determináns} = \text{előjeles térfogat}, \quad (1.24)$$

a mátrix oszlopvektorai által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.¹⁸⁾

¹⁸Az (1.24) tulajdonságnak oda–vissza sok köze van az (1.13) általános integrál–transzformációs képlethez. Igaz volta $d = 1, 2, 3$ dimenzióban könnyen ellenőrizhető.

Ha azonban a az (1.24) tulajdonság mögötti intuíciót keressük, más úton kell elindulnunk. Azt kell észrevennünk, hogy a determináns legfontosabb tulajdonságai párba állíthatók a d dimenziós térfogat képzésének szabályaival. *Végső soron két axióma-rendszer összehasonlításáról és egyenértékűségéről van szó.* Talán elegendő, ha itt és most csak néhány tulajdonságot állítunk párba egymással: a.) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ „az A oszlopvektorai által generált altér dimenziója kisebb mint d , tehát a kérdéses paralelepipedon térfogata zérus” b.) „két oszlopvektor felcserélése ellentétesre változtatja a permutációk paritását (>>sakktábla-szabály<<): pontosan ez határozza meg a térfogat előjelének ellentétesre váltását” c.) „ha az egyik oszlopvektorhoz egy másik oszlopvektor számszorosát adjuk hozzá, akkor a determináns értéke nem változik” \Leftrightarrow „az eredeti és az új paralelepipedon térfogata is ugyanaz, hiszen a mindkettőjük térfogatát meghatározó >>alapszor magasság<< formula pontosan ugyanaz maradt” d.) „ha A diagonál-mátrix, akkor a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz a determináns értéke megegyezik a kérdéses paralelepipedon (azaz a kérdéses d -dimenziós téglalest) előjeles térfogatával”.

1.8. Inhomogén linearitások

Alapvető fontosságú s ugyanakkor szinte magától értetődő a tény, hogy lineáris egyenletek megoldáshalmazának szerkezetében a linearitás megjelenik. A lineáris differenciálegyenletek körében gyakorta emlegetett *homogén egyenlet általános megoldása egyenlő a homogén egyenlet alpmegoldásainak lineáris kombinációja* valamint az *inhomogén egyenlet általános megoldása egyenlő a homogén egyenlet általános megoldása plusz az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása* szabályok pontosan ezt fejezik ki (ám ugyanakkor — talán — egy kicsit el is ködösítik).

1.24. Megjegyzés Legyen \mathcal{L} lineáris operátor (melynek egyelőre sem értelmezési tartományát, sem értékkészletét nem specifikáljuk). A linearitás miatt

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0} \ \& \ \mathcal{L}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

valamint

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \ \& \ \mathcal{L}(\mathbf{x}_{inhp}) = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{inhp}) = \mathbf{0}.$$

Először az $\mathcal{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenlet alpmegoldásait szokás kiszámolni, majd ezek segítségével az $\mathcal{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Természetesen sem az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ alpmegoldások családja, sem az \mathbf{x}_{inhp} partikuláris megoldás nem egyértelműen meghatározott.

A kérdéses két szabály mindegyikét fel tudjuk írni pusztán képletek segítségével is¹⁹:

$$\mathbf{x}_{homalt} = \sum_k c_k \mathbf{x}_k \quad \text{illetve} \quad \mathbf{x}_{inhomalt} = \mathbf{x}_{inhp} + \mathbf{x}_{homalt}.$$

Az alábbi, $\mathcal{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakú példák azonnal világossá tesznek mindent.

- *Algebrai Egyenletrendszer*

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + 2y - 3z = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- *Közönséges Differenciálegyenletek*

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + 1 & -2 \\ -2 & \frac{\partial}{\partial t} - 4 \end{pmatrix}$$

¹⁹a másodikban az összeadandók köznyelvben megszokott sorrendjét — ízlés dolga, de alighanem több az előnye, mint a hátránya — felcseréltük

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \sin(t) \\ -3 \sin(t) - 4 \cos(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- *Parciális Differenciálegyenletek & Peremérték-feltételek*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \& \quad u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \forall t > 0 \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + 2 \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in [0, \pi] \\ u(t,0) &= u(t,\pi) = 0 \quad \forall t > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow u(t,x) &= x(\pi-x) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin(kx), \quad \forall c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Az egyelőre még szabad $c \in \mathbb{R}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ illetve a $c_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots$) konstansokat rendre egy (új, az eddigi kettőtől lineárisan független) lineáris összefüggés hozzáírása, az $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ illetve az $u(0, \cdot) = g \in L_2[0, \pi]$ (azaz $g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ adott, a $\{\sin(kx)\}_{k=1}^{\infty}$ rendszer szerinti

$$g \sim \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin(kx), \quad g_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(kx) dx$$

Fourier sorfejtést szükségessé tevő és négyzetesen Lebesgue-integrálható függvény) kezdetiérték-feltételek megadása teszi egyértelművé.

- *Rekurziók — Differenciaegyenletek*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ i_{n+1} &= o_n, \quad o_{n+1} = i_n + o_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} i_n \\ o_n \end{pmatrix} &= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ez a Fibonacci féle homogén rekurzió, amelyet az alábbiakban részletesen is tárgyalunk. Tesszük ezt egyrészt a történeti érdekesség kedvéért, másrészt amiatt, hogy a lineáris differenciál- és a lineáris differenciaegyenletek közti párhuzamosságokat (igazából a diszkrét és a folytonos idő közti párhuzamosságokról van szó) konkrét példán is bemutassuk.

Inhomogén rekurzióra a [2.28](#). Tétel bizonyításában mutatjuk be a $H_{k+1} = \alpha H_k + \beta$, $k = 0, 1, \dots, N$ példát.

Következzék hát a *Fibonacci feladat*.

Az 0-ik generációban $i_0 = 1$ ifjú, és $o_n = 0$ öreg nyúlpár él egy gazdaságban, majd az ifjú nyúlpárok egy év alatt „öreggév”/ivaréretté lesznek, minden egyes öreg nyúlpár pedig egy ifjú nyúlpárral gyarapítja az állományt. És ez így megy tovább, évről évre. Az első néhány év adatai

$$\begin{array}{rcccccccc} n & = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ i_n & = & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & \dots \\ o_n & = & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \dots \end{array}$$

a rekurziós szabály pedig

$$i_{n+1} = o_n, \quad o_{n+1} = i_n + o_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A feladat linearitását a vektoros és mátrixos felírás nagy erővel juttatja kifejezésre:

$$\begin{pmatrix} i_0 \\ o_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} i_{n+1} \\ o_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_n \\ o_n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Bevezetve az

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} i_n \\ o_n \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{és az} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jelöléseket,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

Próbafüggvény (\mathbb{N} értelmezési tartománnyal). Keressük a megoldást $\mathbf{x}_n = \lambda^n \mathbf{s}$ alakban:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_n \Rightarrow \lambda^{n+1} \mathbf{s} = \mathbf{F}\lambda^n \mathbf{s} \Rightarrow \lambda \mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{s}.$$

Sajátérték–sajátvektor feladatot kapunk, amelynek megoldása

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

és így (1.25) általános megoldása az alapmegoldások lineáris kombinációjaként

$$\mathbf{x}_n = c_1 \lambda_1^n \mathbf{s}_1 + c_2 \lambda_2^n \mathbf{s}_2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.26)$$

ahol a $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ állandókat az $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ kezdeti feltétel határozza meg. Így

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 0 = c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 \end{cases} \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned}$$

Az (1.26) megoldásvektor második koordinátájaként az öreg nyulak száma az n -edik évben

$$\begin{aligned} o_n &= \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_1^{n+1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lambda_2^{n+1} \\ &= \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\lambda_1^n - \lambda_2^n) \end{aligned}$$

hiszen $\lambda_1 \lambda_2 = \det(\mathbf{F}) = -1$ (valamint $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{trace}(\mathbf{F}) = 1$) és végezetül

$$o_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tehát az öreg nyúlpárok számának o_n értéke n esztendő elmúltával is explicit módon kifejezhető. Az ifjú nyúlpárok számát ugyanekkor az $i_n = o_{n-1}$ formula adja meg, ugyancsak explicit módon.

A szokásos jelölés Fibonacci tiszteletére $f_n = o_n$. A Fibonacci számokra az

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{és} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.27)$$

másodrendű rekurzió érvényes. Vegyük észre, hogy az (1.27) és az (1.25) rekurziók lényegében ugyanúgy transzformálódnak egymásba, mint az

$$\ddot{x} = \dot{x} + x \quad \text{és az} \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = y + x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

differenciálegyenletek.

Fibonacci eredetileg csak az f_8 értékének kiszámítását tűzte ki célul — modellje így a biológiai realitások határain belül maradt: egy populáció létszámának növekedése valóban lehet exponenciális az első néhány generációban, amikor is sem az egyedek élettartamának, sem a környezet eltartóképességének korlátozott voltát sem kell még figyelembe venni.

Most visszatérünk a homogenitás és az inhomogenitás²⁰ tárgyalásához.

Az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletek közül azokat könnyű megoldani, amikor az inhomogenitás csak az 1, az t , a $\sin(at)$, a $\cos(at)$, és az e^{bt} típusú tagok kombinált összegeit és szorzatait — az úgynevezett kvázipolinomokat — tartalmazza. Ezek azok az esetek, amikor a helyesen alkalmazott határozatlan együtthatók módszere (ez a matematikailag pontos megnevezés, jóllehet a próbafüggvény-módszer elnevezés is kifejező) olyan lineáris algebrai egyenletrendszerhez vezet, amelynek van

²⁰Természetesen a Fibonacci feladatnak is van inhomogén lineáris változata, amelyre a 2.28. Tétel bizonyításában szereplő $H_{k+1} = \alpha H_k + \beta$, $k = 0, 1, \dots, N$ inhomogén rekurzió kétdimenziós, $\mathbf{H}_k \in \mathbb{N}^2$, $k = 0, 1, \dots, N$, $\alpha \in \mathbb{F}$, $\beta \in \mathbb{N}^2$ (sőt akár $\beta = \beta_k \in \mathbb{N}^2$, $k = 0, 1, \dots, N$) változata szolgáltat kézenfekvő példát.

megoldása és pontosan egy megoldása van. Amiknek az együttthatóiról szó van, azok az inhomogenitásban szereplő függvények összes deriváltja által generált függvényterbeli lineáris kombinációk, tetszőlegesen választott bázis esetén (és hogy a rezonanciákat is figyelembe vegyük, a báziselemek némelyikét a t alkalmas hatványaival meg kell szorozni). Hát ezt nem éppen egyszerű első olvasásra felfogni, de már egyetlen példa is világossá tesz mindent.

1.25. Példa Legyen $h(t) = te^{2t}$. Az egymás utáni deriváltak rendre

$$\dot{h}(t) = 2te^{2t} + e^{2t}, \quad \ddot{h}(t) = 4te^{2t} + 4e^{2t}, \quad h^{(3)}(t) = 8te^{2t} + 12e^{2t},$$

$$h^{(4)}(t) = 16te^{2t} + 32e^{2t}, \quad \dots \quad \Rightarrow \quad h^{(k)}(t) = 2^k te^{2t} + 2^{k-1} ke^{2t}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

A formális levezetés teljes indukciót igényel. A $k = 0$ eset rendben (minden függvény nulladik deriváltja önmaga), az indukciós lépés pedig

$$\frac{d}{dt} (2^k te^{2t} + 2^{k-1} ke^{2t}) = 2^k e^{2t} + 2^{k+1} te^{2t} + 2^k ke^{2t} = 2^{k+1} te^{2t} + 2^k (k+1) e^{2t}.$$

A h függvény végtelen sok deriváltja tehát összességében is csak a folytonos függvények terének egy két-dimenziós alterét feszíti ki, amelynek természetes bázisa $\{te^{2t}, e^{2t}\}$. Így ha a szokásos rugó-egyenletet (a matematikai példa kedvéért) a $15h(t)$ inhomogenitással látjuk el, akkor

$$\ddot{x} + x = 15te^{2t} \quad \Rightarrow \quad x_{homalt} = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.28)$$

Az eredeti inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $x_{inhp}(t) = Ate^{2t} + Be^{2t}$ alakban keressük. Az $x = x_{inhp}$ visszahelyettesítés után az (1.28) egyenlet bal oldalát (igazából mindkét oldalát) rendezzük, majd összehasonlítjuk a jobb és bal oldalon álló te^{2t} és e^{2t} függvények együttthatóit. Mivel a te^{2t} és az e^{2t} függvények lineárisan függetlenek, a megfelelő együttthatók páronként egyenlők egymással:

$$\ddot{x}_{inhp} + x_{inhp} = 15te^{2t} \quad \Leftrightarrow \quad (A(4te^{2t} + 4e^{2t}) + B(4e^{2t})) + Ate^{2t} + Be^{2t} = 15te^{2t}$$

$$\Leftrightarrow 5Ate^{2t} + (4A + 5B)e^{2t} = 15te^{2t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad 5A = 15 \quad \& \quad 4A + 5B = 0.$$

A kapott két-egyenlet-két-ismeretlen lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van: $A = 3$, $B = -\frac{12}{5}$. A végeredmény tehát

$$x_{inhomalt} = x_{inhp} + x_{homalt} = 3te^{2t} - \frac{12}{5}e^{2t} + c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ha $\ddot{x} - 4x = 15te^{2t}$, akkor $x_{homalt} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Most az $Ate^{2t} + Be^{2t}$ mint próbafüggvény nem működik, hiszen e^{2t} a homogén egyenlet megoldása. Ilyenkor t -vel kell szoroznunk. Az $x_{inhp} = t(Ate^{2t} + Be^{2t})$ próbafüggvény-választás vezet sikerre.

A próbafüggvény választására további példákat mutatunk:

- Ha $\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + x = \cos(3t)$, akkor $x_{inhp} = A \cos(3t) + B \sin(3t)$
- Ha $\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{10}y + \cos(3t) \end{array} \right\}$, akkor $\left. \begin{array}{l} x_{inhp} = A \cos(3t) + B \sin(3t) \\ y_{inhp} = C \cos(3t) + D \sin(3t) \end{array} \right\}$
- Ha $\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + x = \cos^2(t)$, akkor $x_{inhp} = A + Bt \cos(2t) + Ct \sin(2t)$
- Ha $\ddot{x} + x = \cos(t)$, akkor $x_{inhp} = At \cos(t) + Bt \sin(t)$ (külső rezonancia)
- Ha $\ddot{x} + x = \cos(\omega t)$ és $0 < \omega \neq 1$, akkor $x_{inhp} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

A fenti felsorolás utolsó két példáját részletezzük:

$$\ddot{x} + x = \cos(t) \quad \Rightarrow \quad x_{inhp}(t) = \frac{1}{2}t \sin(t)$$

hiszen $\ddot{x}_{inhp}(t) = -At \cos(t) - 2A \sin(t) - Bt \sin(t) + 2B \cos(t)$ és így

$$-2A = 0 \ \& \ 2B = 1, \text{ mert } -2A \sin(t) + 2B \cos(t) = \cos(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} :$$

tehát korlátos sajátrezgések plusz korlátos gerjesztés adhat nem-korlátos választ. De az $1 \neq \omega \approx 1$ majdnem-rezonancia is lehet veszedelmes:

$$\ddot{x} + x = \cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad x_{inhp}(t) = \frac{1}{1-\omega^2} \cos(t)$$

hiszen $\ddot{x}_{inhp}(t) = -A\omega^2 \cos(t) - B\omega^2 \sin(t)$ és így $A(1-\omega^2) = 1 \ \& \ B = 0$

$$\text{mert } A(-\omega^2 + 1) \cos(t) + B(-\omega^2 + 1) \sin(t) = \cos(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Következtetés: mérsékelt sajátrezgések plusz mérsékelt gerjesztés hatalmas amplitúdójú válaszhoz is vezethet.

1.26. Példa *Lássunk egy szokatlan, de érdeemben alig nehezebb példát is:*

$$\ddot{x} + x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right) \quad \text{ahol } 0 < L \neq 2\ell + 1, \ell \in \mathbb{N}.$$

Az inhomogenitás a $b(t) = \begin{cases} -1 & \text{ha } t \in (-L, 0) \\ 1 & \text{ha } t \in (0, L) \end{cases}$ függvény $2L$ -periodikus kiterjesztése, az L -re adott feltétel pedig a rezonanciát zárja ki. Így

$$x_{inhp} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_{2k+1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right) + B_{2k+1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{L}x\right) \right)$$

szintén Fourier-soros alakban keresendő.

Úgy illik, hogy *belső rezonanciára* is mutassunk példát:

- $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \Rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$
- $x^{(4)} + 2\ddot{x} + x = 0 \Rightarrow x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_3 t \cos(t) + c_4 t \sin(t)$

A mérnökök a külső rezonanciát *gerjesztési rezonanciának* nevezik, és érthető módon ugyancsak óvatosak vele kapcsolatban. Természetesen szó sincs arról, hogy a rezonancia jelenségek (mechanikai, akusztikus, elektromos, mágneses, optikai, atomi, részecske, molekuláris, neurobiológiai etc. — mindenütt, ahol rezgések és/vagy hullámok vannak, lehetséges és van is rezonancia) mindegyike káros vagy veszedelmes volna. Már Leonardo da Vinci is tudta, hogy a rezonancia mennyire jótékony szerepet játszik a hangok és a hangszerek világában. Ernst Chladni ezzel kapcsolatos klasszikus kísérletei a rezgő membránok sajátfüggvényei gyökeinek rajzolatát lenyűgöző szépséggel mutatják.

Rezonancia témában tartalmilag is és nyelvgyakorlásként is leghálásabb egy angol dalocskát²¹ felidézni. És most többek között arról, hogy a *London Bridge is falling down, falling down* történet még a huszonegyedik században is kis híján valósággá vált:

1.27. Megjegyzés *The London Millennium Footbridge, a steel suspension bridge for pedestrians crossing the River Thames in London, was opened on 10 June 2000. Unexpected lateral vibration (resonant structural response) caused the bridge to be closed on 12 June for modifications. It was reopened on 22 February 2002. The bridge has not been subject to significant vibration since. In spite of the successful fix of the problem by the retrofitting of 37 fluid-viscous dampers (energy dissipating) to control horizontal movement and 52 tuned mass dampers (inertial) to control vertical movement, the affectionate “wobbly bridge” epithet remains in common usage.*

The bridge’s movements were caused by a positive feedback phenomenon, known as synchronous lateral excitation. The natural sway motion of people walking caused small sideways oscillations in the bridge, which in turn caused people on the bridge to sway in step, increasing the amplitude of the bridge oscillations and continually reinforcing the effect.

²¹ “London Bridge is falling down, Falling down, falling down. London Bridge is falling down, My fair lady” is a traditional nursery rhyme and singing game, which is found in different versions all over the world (“Dong, Dong, Dongdaemun” is a similar Korean, and “Lengyel László jó királyunk” is a similar Hungarian singing game). It deals with the depredations of London Bridge and attempts, realistic or fanciful, to repair it. (Since the late nineteenth century the rhyme has been seen as one of the most popular and well known in the English speaking world. It has also been referenced in both literature and popular culture. It was used by T. S. Eliot at the climax of his poem *The Wasteland* (1922). The final line of the verse was probably the inspiration for the title of Lerner and Loewe’s 1956 musical *My Fair Lady*. The tune is often used by English football supporters as the basis for chants.) The identity of the *fair lady* of the refrain is disputed. Candidates include Matilda of Scotland (c. 1080–1118) Henry I’s consort, and Eleanor of Provence (c. 1223–91), consort of Henry III. — *Wikipédia, lényegében szó szerinti átvétel.*

Resonant vibrational modes due to vertical loads (such as trains, traffic, pedestrians) and wind loads are well understood in bridge design. The tendency of a suspension bridge to sway when troops march over it in step was well known, which is why troops are required to break step when crossing such a bridge. In the case of the Millennium Bridge, because the lateral motion caused the pedestrians loading the bridge to directly participate with the bridge, the vibrational modes had not been anticipated by the designers.

The dramatically visible, rhythmic twisting that resulted in the 1940 collapse of “Gallopig Gertie”, the original Tacoma Narrows Bridge, has sometimes been characterized in physics textbooks as a classical example of resonance. However, this description is misleading. The catastrophic vibrations that destroyed the bridge were not due to simple mechanical resonance, but to a more complicated interaction between the bridge and the winds passing through it – a phenomenon known as aeroelastic flutter. — Wikipédia, szó szerinti átvétel, kihagyásokkal.

A próbafüggvény-módszer helyett természetesen használhatjuk az állandók variálásának módszerét is, vagy — ha nagyon biztonságosan tudunk számolni, de tényleg csak akkor — az annak lényegét közvetlenül is kifejező konstans variációs formulát.

1.28. Példa Tekintsük példaként az

$$\dot{x} + 2tx = t^3 \quad \Leftrightarrow \quad x_{inhomalt} = x_{inhp} + x_{homalt} \quad \Leftrightarrow \quad x_{inhomalt} = x_{inhp} + cX$$

feladatot, ahol elsőként az $\dot{x} + 2tx = 0$ homogén egyenlet általános megoldását számoljuk ki:

$$\dot{x} + 2tx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} dx = -2t dt \quad \Rightarrow \quad \ln(x) = -t^2 + C \quad \Rightarrow \quad x = ce^{-t^2},$$

majd az így kapott $x_{homalt}(t) = cX(t) = ce^{-t^2}$, $c \in \mathbb{R}$ képletben a c állandó helyére a $c(t)$ függvényt írjuk és az eredeti, inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $x_{inhp}(t) = c(t)X(t) = c(t)e^{-t^2}$ alakban keressük. Visszahelyettesítés után a segédfüggvény $\dot{c}(t)$ deriváltjára kapunk egy képletet, amiből $c(t)$ integrálással adódik:

$$\left(ce^{-t^2} + c(-2t)e^{-t^2} \right) + 2t \left(ce^{-t^2} \right) = t^3 \quad \Rightarrow \quad \dot{c} = t^3 e^{t^2},$$

$$c(t) = \int t^3 e^{t^2} dt = \int \frac{t^2}{2} \cdot 2te^{t^2} dt = \frac{t^2}{2} e^{t^2} - \int te^{t^2} dt = \frac{t^2}{2} e^{t^2} - \frac{1}{2} e^{t^2}.$$

Így $x_{inhp}(t) = c(t)X(t) = c(t)e^{-t^2} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$ s végeredményként

$$x_{inhomalt} = x_{inhp} + cX \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + ce^{-t^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

A fenti levezetés sokkal érthetőbb (és megismételhetőbb is), mint az

$$\dot{x} + a(t)x = h(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = \left(\int h(t) e^{\int a(s) ds} dt + c \right) e^{-\int a(s) ds}, \quad c \in \mathbb{R}$$

általánosan érvényes képletbe történő behelyettesítés. (Vegyük észre, hogy mekkora szerencsénk volt a jobb oldalon álló $h(t) = t^3$ függvénnyel! Ha t^3 (és általában t^{2k+1} , $k \in \mathbb{N}$) helyett t^2 (és általában t^{2k} , $k \in \mathbb{N}$) szerepelt volna, akkor a közbűlső $c(t)$ integrál értékét nem tudtuk volna zárt alakban meghatározni.)

Ha az egyenlet homogén része autonóm, akkor minden sokkal egyszerűbbé válik. A szokásos írásmóddal ($a(t)$ helyére $-a$ kerül, s rendezés után a bal oldalon csak \dot{x} marad), rögtön egy kezdetiérték-feladat megoldásaként:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = ax + h(t) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)}h(s) ds.$$

Ez utóbbi képlet már tényleg jól használható, sőt annak

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + h(t) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}h(s) ds. \quad (1.29)$$

vektoros alakja is alkalmas konkrét számítások elvégzésére. A *konstans variációs formula* megnevezés legtöbbször az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre érvényes (1.29) képletre utal.

1.9. Példa káoszra: a csillapított, gerjesztett inga

Az (1.16) rugó-egyenlet az

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) - by \end{array} \right\}, \quad \text{ahol } b \geq 0 \quad (1.30)$$

inga/hajóhinta egyenlet alsó, $x = 0$, $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y = 0$ egyensúlyi helyzete körüli $\sin(x) \approx x$, $x \approx 0$ linearizáltja. Van felső egyensúlyi helyzet is, $x = \pi$, $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow x = \pi$, $y = 0$, amely körül a $\sin(x) \approx \pi - x$, $x \approx \pi$ linearizált

$$\frac{d^2}{dt^2}(x - \pi)^2 + b \frac{d}{dt}(x - \pi) - (x - \pi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{z} + b\dot{z} - z = 0, \quad z = \pi - x.$$

A következő tétel azt mondja ki, hogy a linearizálás, a diszkrétizáláshoz hasonlóan, jogos eljárás. A kontextus, amiben ez a kijelentés elhangzik, az $\dot{x} = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$) autonóm differenciálegyenlet bármely nemkritikus $x_0 \in \mathbb{R}^d$ egyensúlyi helyzetének egy lokális, kicsiny környezete. Az x_0 egyensúlyi helyzet *nemkritikus*, ha

$$\operatorname{Re} \lambda_k(A) \neq 0, \quad \forall 1 \leq k \leq d.$$

A *linearizálás* azt jelenti, hogy a jobboldal

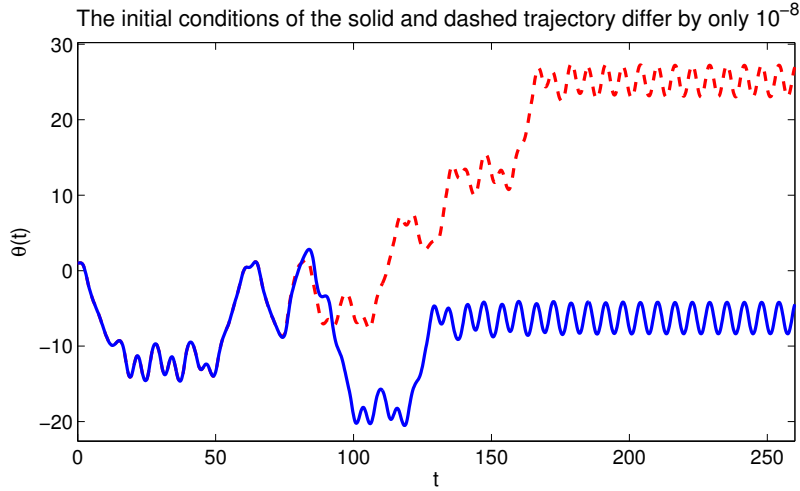
$$f(x) = f(x_0) + [f'(x_0)](x - x_0) + \dots = A(x - x_0) + \dots \quad \text{sorfejtésében}$$

megállunk az első tagnál és az eredeti $\dot{x} = f(x)$ nemlineáris egyenletet az $\dot{x} = A(x - x_0) \Leftrightarrow \dot{z} = Az$ egyenlettel pótoljuk, ahol $A = f'(x_0)$ és $z = x - x_0$. A linearizált egyenletről lényegében mindent tudunk, azt kézzel is meg tudjuk oldani. Így persze csak közelítő megoldás(ok)hoz jutunk, csakúgy mint akkor, amikor az eredeti egyenletre az Euler módszert (vagy más, standard számítógépes-diszkrétizációs módszert) alkalmazzuk.

1.29. Tétel Grobman–Hartman Lemma, nem-formális/lényegi változat *A fázisportré ábrázolása szempontjából a linearizálás és az (elegendően kicsiny lépésközű) diszkrétizálás — lokálisan, bármely nemkritikus egyensúlyi helyzet kicsiny környezetében — az identitáshoz nagyon közeli koordináta-transzformációnak számít.*

Ugyanez kicsit részletesebben: amíg csak benne maradunk a kérdéses egyensúlyi helyzet kicsiny környezetében, a \mathcal{H} koordináta-transzformáció trajektóriát trajektóriába visz (az $\dot{x} = f(x)$ egyenlet $\Phi(t, x)$ trajektóriáját a linearizált egyenlet $e^{At}\mathcal{H}(x)$ trajektóriájába) és megőrzi az időt is. A \mathcal{H}_h koordináta-transzformáció a $\Phi(t, x)$ trajektóriáján elhelyezkedő $\Phi(kh, x)$ pontokat a számítógép által meghatározott $x_k = \phi_E^k(h, \mathcal{H}_h(x))$ pontok, $k = 0, 1, \dots$ (ameddig csak lehet) sorozatába viszi.

Hangsúlyozzuk, hogy mind a \mathcal{H} , mind a \mathcal{H}_h ($0 < h \leq h_0 \ll 1$) koordináta-transzformációk jó közelítéssel az identitásnak tekinthetők. Tehát az eredeti nemlineáris, a linearizált, és numerikus fázisportrék (a mondott korlátozások mellett) azonosnak, kvalitatíve azonosnak, és kvantitatíve majdnem-azonosnak tekinthetők.



1.10. ábra. Kezdeti értékektől való érzékeny függés a csillapított, periodikusan gerjesztett inga/hajóhinta (1.31) egyenletében

Az inga felső egyensúlyi helyzete a paraméter minden (fizikailag releváns $b \geq 0$) értékére nyeregpont, az alsó egyensúlyi helyzet stabil fókusz, ha $0 < b < 2$ és stabil csomó, ha $2 < b$. A $b = 0$ esetben az alsó egyensúlyi helyzet centrum. Ez utóbbi nem a *Linearizálás egyensúlyi helyzetek körül* alfejezetben tárgyalt általános szabályok következménye — más oka van, az

$$E(t) = E(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}(y(t))^2 + (1 - \cos(x(t))) \quad \Rightarrow \quad \dot{E}(t) = 0 \text{ ha } b = 0$$

tulajdonság. A súrlódásmentes/közegellenállásmentes esetben a teljes energia az (1.30) és az (1.6) egyenlet megoldásai mentén konstans. Az általános, $b > 0$ esetben $\dot{E}(t) = -by^2(t) = -b(\dot{x}(t))^2 \leq 0$, azaz $\dot{E}(t) = -b(\dot{x}(t))^2 \leq 0$.

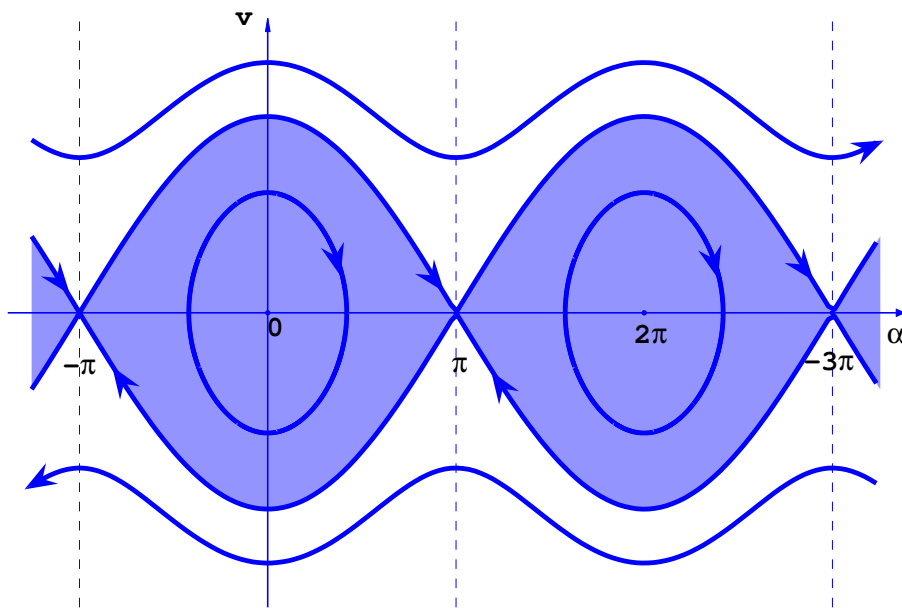
Az $A_0 = (0, 0) \Leftrightarrow x = 0, y = 0$ egyensúlyi helyzettel együtt az ingának az $A_k = (2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ pontok is alsó, az $F_0 = (\pi, 0) \Leftrightarrow x = \pi, y = 0$ egyensúlyi helyzettel együtt az $F_k = ((2k+1)\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ pontok is felső egyensúlyi helyzetei. Fizikailag pontosan két egyensúlyi helyzet van, az *alsó* és a *felső* — sokak számára ezért a teljes \mathbb{R}^2 helyett az

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2\pi, y \in \mathbb{R}\} \text{ halmaz az inga fázistere, amely a}$$

$\mathcal{C}_{cyl} = \{(\cos(\theta), \sin(\theta), y) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, y \in \mathbb{R}\}$ hengerrel azonosítható. Nézőpont dolga.

Az egyensúlyi helyzetek $2k, 2k+1$ sorszámait az inga átfordulásainak összesített $k \in \mathbb{Z}$ számát mérik. Az $x(0) = 0, y(0) = 3$ kezdeti értékből induló $\gamma_{0,3}$ trajektória $t \rightarrow \infty$ esetén

az F_{99} felső egyensúlyi helyzetéhez is tarthat — ez azért lehetséges, mert $E(x(0), y(0)) = E(0,3) = \frac{1}{2}3^2 + (1 - \cos(0)) = \frac{9}{2} > 2$ és persze ha a $0 < b \ll 1$ súrlódási/közegellenállási tényezőt megfelelően kicsinek választjuk. Az $E(x(0), y(0)) > 2$ feltétel azért fontos, mert az $E(x, y) = 2$ szintvonal éppen a felső egyensúlyi helyzeteket felfűző „mandulaszemek” kontúr-sorozata (amely a $b = 0$ esethez tartozó $F_k \rightarrow F_{k+1}$, $F_{k+1} \rightarrow F_k$ átrendüléseket is tartalmazza). A trajektóriák mentén az energia legalábbis nem csökkenhet, $\dot{E}(t) \leq 0$, speciálisan az $x(0) = 0$, $-2 < y(0) < 2$ kezdeti értékből induló trajektória nem léphet ki a nulladik „mandulaszemből”. Az $E(x, y) = \frac{9}{2}$ szintvonal $y > 0$ része jobbra tartó hullámvonal. Ha $b = 0$, akkor a $\gamma_{0,3}$ trajektória végig ezen a hullámvonalon halad, az inga végtelen sokszor fordul át a felső egyensúlyi helyzet körül. Bolzano *ha jobbra és balra, akkor középre is (ha pozitív is és negatív is, akkor nulla is — ha belül is és kívül is, akkor a határon is* tételének következménye az alábbi észrevétel: A $0 < b \ll 1$ paraméter $b = b_k$ beállításával elérhető, hogy a $\gamma_{0,3}$ trajektória $t \rightarrow \infty$ mellett az F_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ felső egyensúlyi helyzetéhez tartson.



1.11. ábra. Fázisportré: az $\ddot{x} + \sin(x) = 0$ egyenletű inga/hajóhinta, csillapítás és gerjesztés nélkül

1.30. Megjegyzés *Bolzano élete tipikus értelmiségi sors*²² *Kelet-Közép-Európában, ezért*

²²Ha valakiben felébred a kíváncsiság, mire gondolhatok, és ideje is van rá, olvassa el Banach (1892, Krakkó — Lemberg, 1945), Hausdorff (1868, Breslau — 1942, Bonn), és Ljapunov (1857, Jaroslavl — 1918, Ogyessza) élet- és haláltörténetét, s ha egy mód van rá, legalább két különböző leírásban: “Who controls the past controls the future: Who controls the present controls the past.” (Orwell)

talán nem baj, ha részletesen is írok róla: Bernhard Bolzano 1781-ben született Prágában, olasz szőnyegkereskedő apától és prágai német zsidó anyától. Katolikus papként — apja ellenezte pályaválasztását — fiatalon lett a Prágai Egyetem Filozófiai Karának dékánja. Egyetemistáknak tartott prédikációi miatt [az alábbi szövegrész különösen veszedelmesnek találtatott: “Every century furnishes us ... with new proofs of how harmful war is; of the abuses which certain social institutions inevitably lead to; under which constitutions the people are better off. And should it be impossible for our God to make us all wiser through this, to finally open our eyes so that we will recognize with wonder, how easily we might have had things better all along? O! he will certainly do that, our God, he will certainly make it happen! There will come a time—I say this with complete confidence—there will come a time when war—that absurd attempt to prove one’s right by force—will be looked upon with the same disgust as that duelling is now! There will come a time when all the thousandfold divisions and distinctions of rank between people which bring about so much evil, will be put back within their proper bounds, so that each will deal with his neighbors as a brother with his brother! There will come a time when constitutions will be introduced which are not open to the horrible abuses which our present one is (az eredeti német szövegben itt is többes szám áll, ‘als unsere gegenwärtigen’), a time ... when no one will think himself deserving of honour and respect because he, a single person, has taken for himself as much as would be sufficient to satisfy the needs of a thousand!” — idézi Paul Rusnock, Bolzano’s philosophy and the emergence of modern mathematics (Rodopi, Amsterdam, 2000), Eduard Winter, Der Bolzanoprozess (Brünn, Rohrer, 1944) alapján] leváltották, és attól kezdve falusi nyugdíjasként, rendőri felügyelet alatt élt. Híres példája mindenütt folytonos de sehol sem differenciálható függvényre — ez volt a világon az első fraktál — kéziratban maradt, pontosabban Bolzano elkobzott kéziratának egyikeként a bécsi titkosrendőrség levéltárából került elő a Habsburg Birodalom felbomlása után. Bolzano négykötetes fő műve, a Wissenschaftslehre (szó szerint „Tudománytan”) a protestáns Lipcsében jelent meg: témája az emberi gondolkodás. Bolzano a matematikai analízisben és a matematikai logikában egyaránt hatalmasat alkotott, jóllehet ő maga a matematikai analízisben elért eredményeit mindössze a szigorú szabályok szerinti gondolkodás példáiként értékelte. Ő vezette be a matematikába a halmaz fogalmát. A pszichológia tudománya a jeles előfutárok egyikeként tartja számon. Foglalkoztatták az emberi viselkedés nem-teljesen racionális oldalai, így az intuíció és a heurisztika mi-benléte. A kulturális és politikai szabadelvűség jegyében támogatta a cseh nyelv oktatását az akkor még markánsan német többségű Prágában. Baráti körben rendszeresen mondott gyógyító imádságokat. Idős korában, betegesen költözhetett csak vissza szülővárosába. 1848-ban halt meg.²³

²³A »political correctness« szerint érzékeny adatok cseh matematikusok személyes közlései. Egyikük sem tudott felvilágosítást adni arról, hogy Bolzano beszélt-e csehül, pontosabban hogy milyen mélységig ismerte a cseh nyelvet. Nagy zavarban voltak mindnyájan, amikor erről kérdeztem őket. — Ha már Prága és matematikusok, hadd írjak le egy másik, jellegzetesen kelet-közép-európai történetet. Jaroslav Kurzweil cseh matematikus a következő szavakkal nyitotta meg az 1989-es prágai EQUADIFF konfe-

Az (1.7) egyenlet speciális eseteként tekintjük most az egyszerre fékezett és periodikusan gerjesztett inga/hajóhinta

$$\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + \sin(x) = \cos(t) \quad \Leftrightarrow \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin(x) - \frac{1}{10}y + \cos(t) \end{array} \right\}, \quad (1.31)$$

alakú egyenletét, a Hubbard féle paraméter-választásokkal. Nyugalmi állapotokról, egyensúlyi helyzetekről itt nem beszélhetünk: a külső gerjesztés mindig továbblódítja az ingát. A megoldások viselkedését mégis össze lehet hasonlítani az előbb tárgyalt, gerjesztés nélküli esettel. Az (1.30) egyenlet $A_0=(0,0)$ alsó illetve $F_0=(\pi,0)$ felső egyensúlyi helyzetének az (1.31) egyenlet egy-egy 2π -periodikus megoldása felel meg. Az alsó A_0^{per} periodikus megoldás aszimptotikusan stabil, és az A_0 pontot bolyongja körbe. Az F_0^{per} felső periodikus megoldás nyeregszerűen instabil, és az F_0 pontot bolyongja körbe. Ha a \mathcal{S} függőleges sávon, vagy a \mathcal{C}_{cyl} hengeren dolgozunk, akkor csak ez a két 2π -periodikus megoldás van. Ha a teljes \mathcal{R}^2 síkot nézzük, akkor az A_0^{per} és az F_0^{per} periodikus megoldások $(2k\pi,0)$, $k \in \mathbb{Z}$ vektorokkal történt A_k^{per} és F_k^{per} eltoltjai is periodikus megoldások, amelyek rendre az egykori A_k illetve F_k egyensúlyi helyzetek hült helyét bolyongják körül.

Ha a megoldásokat az $x(0)=0$, $y(0)=\beta \approx 2$ kezdeti értékekből indítjuk ki, akkor azok — néhányszor 2π -periódusnyi össze-vissza bizonytalankodás után — négy-öt különböző alsó periodikus megoldáshoz tartva stabilizálódnak. A néhányszor 2π -periódusnyi össze-vissza bizonytalankodás *tranziens káoszra* utal, sőt az általában vett *káosz* legfontosabb jellegzetességét, a *kezdeti feltételektől való érzékeny függést* (hiszen eközben a $\beta \approx 2$ paramétert csak alig-alig, néhány ezrednyit változtattuk) is tetten értük.

Az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy a $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sorozat mindkét irányban végtelen L - N - R sorozat, ha $Q_k \in \{L, N, R\}$ minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén.

1.31. Tétel *Legyen tehát a $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tetszőleges, mindkét irányban végtelen L - N - R sorozat. Ekkor van olyan $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ kezdeti állapot, hogy az (1.31) egyenlet onnan induló $\Phi(\cdot, 0, (x_0, y_0)) = (x_{0,(x_0,y_0)}, y_{0,(x_0,y_0)})$ megoldása a $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ időintervallumban a felső egyensúlyi helyzeten*

$$\left. \begin{array}{l} \text{pontosan egyszer fordul át, és pedig balra} \\ \text{egyszer sem fordul át} \\ \text{pontosan egyszer fordul át, és pedig jobbra} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_k \in L \\ Q_k \in N \\ Q_k \in R \end{array} \right. \quad (1.32)$$

renciát: „Ma augusztus huszonegyediké van. Emlékezetes dátum ez a mi számunkra, nagyon emlékezetes ... Cauchy születésének napja.” A néhány másodpercnyi szünetben izzott a feszültség. Akkor kezdődött a bársonyos forradalom, az utcákon tüntetések voltak, a teremben néhány kigyúrt, nem-matematikuss ismeretlen. 1968 augusztus 21 Csehszlovákia szovjet megszállásának — a Varsói Szerződés Egyesített Fegyveres Erőit testvéri segítségnyújtásának — napja. (A Cauchy-ra való hivatkozás telitalálat. Cauchy éveket töltött Prágában a száműzött Bourbon francia király unokájának nevelőjeként. De ez már össz-európai történelem. Ha mások ellenében bizonyos forrásoknak jobban hinni lehet, akkor a vidéken meghúzódó Bolzano és a Hradzsinban élő arisztokrata Cauchy 1834-ben, egyetlen alkalommal találkoztak egymással.)

és $x_{0,(x_0,y_0)}(2k\pi) \neq 0$ ha $k \in \mathbb{Z}$. Más szóval az ingának léteznek olyan mozgásai, amelyek átfordulásai és nem-átfordulásai tetszőleges, előre megadott kombinatorikát követnek (és mindig, amikor a periódusidőt számoljuk, az inga helyzete nem függőleges).

Az előző tétel nem-megszámlálhatóan végtelen egymástól lényegesen különböző mozgás létezését jelenti. Bizonyítása *számítógéppel segített bizonyítás*.

Érdeemes megemlítenünk az (1.31) egyenlet két egyszerű, de ugyancsak jellegzetes tulajdonságát is:

- Az inga sebessége végig korlátos marad: $c > 20$ esetén az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq c\}$ vízszintes sáv csapdahalmaz.²⁴
- Az inga mozgásai aszimptotikus viselkedésben egy nulla-mértékű globális attraktorhoz tartanak.²⁵

A kezdeti feltételektől való érzékeny függés mellett minden kaotikus dinamikára az elképesztő kombinatorikus gazdagság is jellemző. A determinisztikus káosz harmadik alaptulajdonságát — szintén csak egy konkrét példa erejéig — a 3.2. Tétel fogalmazza meg.

²⁴A bizonyítás mindössze másfél sorból áll:

$$\begin{aligned} |y(t)| = c > 20 &\Rightarrow \frac{d}{dt}y^2(t) = 2y(t)(\dot{y}(t)) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}y^2(t) = 2y(t) \left(-\sin(x(t)) - \frac{1}{10}y(t) + \cos(t) \right) &\leq -\frac{1}{5}y^2(t) + 4|y(t)| = -\frac{1}{5}c^2 + 4c < 0. \end{aligned}$$

²⁵Ez a bizonyítás sem nehéz, de erre már nem tud rájönni az ember magától. Ami segít, az *Liouville tételének nem-autonóm differenciálegyenletekre történő kiterjesztése-átfogalmazása*: a $\Phi(t, 0, \cdot): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ megoldó-operátor exponenciálisan csökkenti a területet.

Az (1.31) egyenlet általánosításaként tekintsük az $\dot{x} = \underline{f}(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ differenciálegyenletet. Legyen $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ korlátos reguláris tartomány, $\partial\Omega_0$ peremmel és $\underline{\nu}$ kifelé mutató normális egységvektorral. Legyen továbbá $\Omega(t) = \Phi(t, 0, \Omega_0)$, $t \geq 0$. Az (1.14) azonosság levezetésének kicsiny módosítása a

$$\frac{d}{dt}\text{mesh}(\Omega(t)) = \int_{\Omega(t)} \text{div}_x \underline{f}(t, x) dx \tag{1.33}$$

formulához vezet. Esetünkben az (1.31) egyenlet alapján $\text{div}_x \underline{f}(t, x) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(-\sin(x) - \frac{1}{10}y + \cos(t))}{\partial y} = -\frac{1}{10}$, tehát

$$\frac{d}{dt}\text{mesh}(\Omega(t)) = -\frac{1}{10}\text{mesh}(\Omega(t)) \Rightarrow \text{mesh}(\Omega(t)) = e^{-\frac{t}{10}}\text{mesh}(\Omega_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{mesh}(\Omega(t)) = 0.$$

1.10. Összefoglalás — példák konkrét szám adatokkal

Az eddigiekben az alábbi feladatokat tekintettük át:

- LC-kör — rugó csillapítás és gerjesztés nélkül
 $\ddot{x} + x = 0$ (autonóm, homogén lineáris)
- RLC-kör — rugó csillapítással
 $\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + x = 0$ (autonóm, homogén lineáris)
- RLC-kör külső gerjesztéssel — rugó csillapítással és gerjesztéssel
 $\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + x = \cos(t)$ (nem-autonóm, inhomogén lineáris)
- inga csillapítás és gerjesztés nélkül
 $\ddot{x} + \sin(x) = 0$ (autonóm, nemlineáris)
- inga csillapítással
 $\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + \sin(x) = 0$ (autonóm, nemlineáris)
- inga csillapítással és gerjesztéssel
 $\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + \sin(x) = \cos(t)$ (nem-autonóm, nemlineáris)

Az első három egyenlet elektromos/mechanikai rezgőkört ír le, a második három egyenlet hajóhintát modellez.

Mind a hat egyenlet másodrendű — az $y = \dot{x}$ változó bevezetésével érdemes őket átírni két darab elsőrendű egyenletből álló rendszerre. Az autonóm esetekben a fázisportrét, a nem-autonóm esetekben pedig két-két megoldást ábrákkal szemléltetünk.

Az első három egyenlet általános megoldása könnyen felírható zárt alakban. A harmadik, az $\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + x = \cos(t)$ egyenleté (az inhomogenitásokról szóló, kettővel ezelőtti alfejezet példáinak mintájára),

$$\lambda^2 + \frac{1}{10}\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = -\frac{1}{20} \pm i\frac{\sqrt{399}}{20}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 10 \sin(t) + c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t),$$

$$y(t) = 10 \cos(t) + c_1 e^{\alpha t} (\alpha \cos(\beta t) - \beta \sin(\beta t)) + c_2 e^{\alpha t} (\beta \cos(\beta t) + \alpha \sin(\beta t)).$$

Valamennyi változatukban, a rugóegyenletek az ingaegyenletek origó (mint alsó egyensúlyi helyzet) körüli linearizáltjai. Az ingaegyenletek nem oldhatók meg zárt alakban. A legutolsó egyenlet kaotikus.

A csillapítás és gerjesztés nélküli esetekben érvényes az energiamegmaradás törvénye, az egyes mozgások nem hagyják el

$$\text{az } \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = \text{const} > 0 \quad \text{illetve az } \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos(x)) = \text{const} > 0$$

egyenletű energia-szintvonalakat. Ha külső gerjesztés nincs, de belső csillapítás igen, akkor a trajektóriák az egyes energia-szintvonalakat befelé metszik, és valamennyi mozgás aszimptotikusan meghal. A külső gerjesztés pótolja az energiaveszteségeket. Az RLC-kör/rugó esetében az origó helyett egy periodikus megoldás vonz magához mindent, az inga esetében pedig szinte valamennyi megoldás egy-egy, a valaha volt alsó egyensúlyi helyzet körül oszcilláló periodikus megoldáshoz tart. Ezeket az aszimptotikusan stabil periodikus pályákat csak az különbözteti meg egymástól, hogy az inga/hajóhinta — amíg ezek közül egynek a kicsiny környezetébe nem kerül — hány teljes körbefordulást tesz az egykori felső egyensúlyi helyzet körül. A körbefordulások gazdag kombinatorikája a megoldások kvalitatív sokféleségét mutatja. A kezdeti értékektől való érzékeny függés mellett ez a sokféleség, pontosabban rengeteg-féleség a kaosz legszembeütőbb tulajdonsága.

Az (1.9) egyenlet kapcsán röviden utaltunk numerikus vonatkozásokra is: a fázis-sík origója centrum — stabilitás vonzás nélkül —, de ugyanakkor (igazából éppen ezért: kritikus, „billenő” egyensúlyi helyzettel van dolgunk) az explicit és az implicit Euler módszer gyengén taszító illetve gyengén vonzó fókuszot sejtet. Az ilyen esetekben különösen igaz, hogy a számítógépes tapasztalat felülvizsgálatra, értelmezésre, kiegészítésre szorul. Nyeregponatok kimenő és bemenő trajektóriáinak számítógépes ábrázolásával is külön foglalkoztunk.

Minden eddigi megfontolásunk arra utal, hogy dinamikus rendszerek vizsgálatakor

- a műszaki-tudományos háttér
- a számítógépes numerika
- a kísérő matematikai analízis

egyszerre, egymást kiegészítve és kölcsönösen erősítve jelenik meg.

2. fejezet

Közönséges differenciálegyenlet és megoldó–operátor

2.1. A Picard–Lindelöf Tétel

Alapvető matematikai tény Picard és Lindelöf alábbi egzisztencia- és unicitástétele.

2.1. Tétel Globális változat *Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos függvény és legyenek $t_0 \in \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Tegyük fel, hogy*

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq L \cdot |x - \tilde{x}| \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (2.1)$$

ahol $L > 0$ alkalmas állandó¹. Ekkor az

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\}$$

kezdetiérték-feladatnak létezik, és pedig pontosan egy megoldása. Ez a megoldás a teljes számegyenesen értelmezett és annak minden pontjában folytonosan deriválható $x_{t_0, x_0}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvény, amelyre tehát $\dot{x}_{t_0, x_0}(t) = f(t, x_{t_0, x_0}(t))$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, a $t = t_0$ választással pedig $x_{t_0, x_0}(t_0) = x_0$.

Picard és Lindelöf tételének van lokális változata is (amely a fenti, globális változat formális következményeként is matematikailag levezethető).

2.2. Tétel Lokális változat *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz, és legyen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos függvény. Legyen továbbá $(t_0, x_0) \in \Omega$. Tegyük fel, hogy*

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq L \cdot |x - \tilde{x}| \quad \forall (t, x), (t, \tilde{x}) \in \Omega, \quad (2.2)$$

¹az f függvény második változója szerinti Lipschitz konstans. Maga a (2.1) egyenlőtlenség a globális Lipschitz feltétel teljesülését jelenti. Más szóval az f függvény a Picard–Lindelöf Tétel feltételei szerint második változójában eleget tesz a globális Lipschitz egyenlőtlenségnek.

ahol $L > 0$ alkalmas állandó². Ekkor az

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \right\}$$

kezdetiérték-feladatnak létezik, és pedig pontosan egy, tovább már nem folytatható, maximális $I_{t_0, x_0} \subset \mathbb{R}$ időintervallumon értelmezett $x_{t_0, x_0}(\cdot) : I_{t_0, x_0} \rightarrow \mathbb{R}^d$ megoldása. Ez a maximális I_{t_0, x_0} időintervallum szükségképpen egy, a $t_0 \in \mathbb{R}$ pontot tartalmazó nyílt, nem feltétlenül korlátos intervallum. Az $x_{t_0, x_0}(\cdot)$ megoldásfüggvény folytonosan deriválható, $\dot{x}_{t_0, x_0}(t) = f(t, x_{t_0, x_0}(t))$ minden $t \in I_{t_0, x_0}$ esetén, a $t = t_0$ választással pedig $x_{t_0, x_0}(t_0) = x_0$.

Egy tétel megértése nem azt jelenti, hogy azt be tudjuk bizonyítani, hanem azt, hogy

- példákat tudunk rá mondani,
ismerjük legegyszerűbb speciális eseteit
- le tudjuk rajzolni, szemléltetni tudjuk
- felfogjuk a benne szereplő feltételek értelmét/szerepét
- és ilymódon pozitív, rámutató érveket
tudunk felsorakoztatni a tétel igaz volta mellett

és végül, de nem utolsósorban,

- tudjuk, hogy mikor és mire használható, alkalmazható, általánosítható
és ismerjük a hozzá kapcsolódó numerikus/számítógépes eljárásokat

Nézzük egyenként. Példákat, szemléltetést már láttunk bőséggel és azzal is nagyjában-egészében tisztában vagyunk, mi a közönséges differenciálegyenletek illetve a velük kapcsolatos kezdetiérték-feladatok szerepe a természet- és műszaki tudományokban. Vegyük észre azt is, hogy amit korábban egyrétű fedésnek hívtunk, az nem más, mint az egzisztencia és az unicitás geometriai megfogalmazása.

Ami még hátra van, az a (2.1) és a (2.2) Lipschitz egyenlőtlenségek szerepének értelmezése valamint a megoldás tényleges kiszámításának kérdése. Egy mérnök vagy informatikus joggal mondhatja azt, hogy a konkrét feladat az ő területéről jön, amelyhez van elegendő intuíciója, továbbá

- a numerikus/számítógépes algoritmusok fekete dobozként is futtathatók
és neki csak a tényleges megoldás egy jó közelítésére van szüksége
— minek törődjön tehát az elmélettel;

²az f függvény második változója szerinti Lipschitz konstans az Ω halmazon. Az Ω halmazra gondolhatunk úgy, mint a $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ pont egy kicsiny környezetére, például egy $t_0 \in \mathbb{R}$ középpontú nyílt intervallum és egy $x_0 \in \mathbb{R}^d$ középpontú nyílt gömb szorzatára. Így maga a (2.2) egyenlőtlenség a lokális Lipschitz feltétel teljesülését jelenti, az f függvény pedig második változójában eleget tesz a lokális Lipschitz egyenlőtlenségnek.

- a Lipschitz feltétel pedig végképp érdektelen, hiszen a számára fontos összes esetben úgyis teljesül.

Teljesen igaza van, először, másodszor, és harmadszor is³. Amikor azonban nagyméretű számítógépes feladatot old meg, akkor még azok a programok is, amelyek a demonstrációs feladatokra jól működnek, időről időre lefulladhatnak. Ezeket a helyzeteket nem lehet másképpen kezelni, mint a numerikus algoritmus mélyebb megértésével: a numerikus algoritmusnak sok köze kell legyen a matematikai elmélethez — és ez akkor is igaz, ha mind a matematikai elmélet, mind a numerikus eljárás nagyban támaszkodik a mérnöki-alkalmazói intuícióra.

Egy jól működő numerikus eljárás konstrukciója nemritkán a mögöttes absztrakt tétel bizonyítását is jelenti. A Picard–Lindelöf Tétel legegyszerűbb, szokásos bizonyítása olyan függvénysorozat egymás utáni képletekkel felírt konstrukciója, amelynek — legalábbis egy t_0 körüli intervallumon — a pontos x_{t_0, x_0} megoldás a határértéke. Ráadásul a konvergencia egy mértani sorozat sebességével történik! Erre az úgynevezett szukcesszív approximációra azonban nem építhető rá semmilyen hatékony numerikus módszer. A diszkretizációs módszerek a hatékonyak. Közülük már a legegyszerűbb, az Euler féle töröttvonal módszer is elvezet az x_{t_0, x_0} pontos megoldás létezéséhez. A (lokális) egzisztencia már abból következik, hogy az $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték-feladatban szereplő $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvény folytonos: ez *Peano híres egzisztenciátétele*, amelynek szokásos bizonyítása ma is Euler féle töröttvonalak segítségével történik.

A lokális Lipschitz-feltétel hiánya esetén előfordulhat, hogy az unicitás sem teljesül.

2.3. Példa

$$\dot{x} = 3x^{2/3} \quad \text{és} \quad x(0) = 0$$

Ekkor $x_{0,0}(t) = 0$ és $x_{0,0}(t) = t^3$ egyaránt (az egész \mathbb{R} -en értelmezett) megoldás.

A globális Lipschitz-feltétel hiánya esetén előfordulhat, hogy a megoldás csak lokálisan értelmezett.

2.4. Példa

$$\dot{x} = x^2 \quad \text{és} \quad x(0) = 1$$

A (tovább nem folytatható) $x_{t_0, x_0} = x_{0,1}$ megoldás értelmezési tartománya $I_{t_0, x_0} = I_{0,1} = (-\infty, 1)$. A megoldás képlete $x_{0,1}(t) = \frac{1}{1-t}$.

³még akkor is, ha vannak olyan alkalmazások, amikor az $\dot{x} = f(t, x)$ egyenlet jobb oldalán nemhogy nem Lipschitzes, hanem egyenesen szakadásos függvény áll: ilyenek például az akadozó csúszás vagy a hiszterézis „átkapcsolásos” jelenségei. — Egy gyógyszer koncentrációjának változását az emberi szervezetben az $\dot{x} = -rx$ differenciálegyenlettel szokás modellezni, ahol $r > 0$ a felszívódási ráta. De milyen adagolással lehet biztosítani a közel-állandó koncentrációt, ha a gyógyító beavatkozás (nem infúzióval, vagy gyógyszer-tapasszal, hanem) injekciókkal vagy tablettákkal történik? Ez utóbbi feladatról is külön matematika tankönyvek szólnak ...

Természetesen meg tudjuk határozni az általános,

$$\dot{x} = x^2 \quad \text{és} \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

alakú kezdetiérték-feladat megoldását is. A szokásos számolás

$$\dot{x} = x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} dx = dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + c \Rightarrow x = -\frac{1}{t+c},$$

ahol a $c \in \mathbb{R}$ egyelőre még szabad konstans értéke a kezdeti feltételből adódik:

$$x_0 = -\frac{1}{t_0+c} \Rightarrow c = -t_0 - \frac{1}{x_0} \quad \text{és a végeredmény} \quad x(t) = -\frac{1}{t-t_0-\frac{1}{x_0}}.$$

Valóban ez a szokásos végeredmény⁴, de egy olyan „szükség helyzetben”, mint a jegyzetírás, el kell végezni a mögöttes diszkussziót is:

$$x_{t_0, x_0}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{t-t_0-\frac{1}{x_0}} & \text{ha } x_0 > 0 \text{ és akkor } t \in I_{t_0, x_0} = \left(-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}\right) \\ 0 & \text{ha } x_0 = 0 \text{ és akkor } t \in I_{t_0, x_0} = \mathbb{R} \\ -\frac{1}{t-t_0-\frac{1}{x_0}} & \text{ha } x_0 < 0 \text{ és akkor } t \in I_{t_0, x_0} = \left(t_0 + \frac{1}{x_0}, \infty\right) \end{cases}$$

A megoldandó egyenlet autonóm voltának megfelelően

$$x_{t_0, x_0}(t) = x_{0, x_0}(t - t_0) \quad \forall t_0, x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{és minden megengedett } t \in \mathbb{R} \text{ esetén,}$$

ami azt is mutatja, hogy a megoldásgörbékkel való fedés úgyis lehet egyrétű, hogy a megoldások egy részének értelmezési tartománya nem a teljes számegyenes.

Most a Lipschitz feltétel matematikai elemzése következik.

2.5. Megjegyzés A LIPSCHITZ-FELTÉTELRŐL

A szemléltetés a legkönnyebb ha a differenciálegyenlet autonóm és a dimenzió $d = 1$. A (2.1) és a (2.2) Lipschitz egyenlőtlenségek mindegyikét az $f(t, x) \equiv f(x)$ esetben átrendezve $\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|\tilde{x} - x|} \leq L$ adódik: azaz a szelők meredeksége a közös L korlát alatt van. Ha f deriválható függvény, akkor az $\tilde{x} \rightarrow x$ határátmenettel $|f'(x)| \leq L$ minden szóbjövő $x \in \mathbb{R}$ esetén. Az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow |x|$ abszolút-érték függvény Lipschitz tulajdonságú (a globális Lipschitz konstans $L = 1$), de az $x_0 = 0$ pontban nem deriválható. Ugyanakkor minden

⁴mint ahogyan az $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$ összefüggés is a primitív függvény meghatározásának eredménye — de csak az esetszétválasztások mögöttes diszkussziójával együtt! (a diszkusszió teljességét sem az $x \neq 0$ kikötés, sem az „óvatosabb” $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$ formula sem pótolja)

Lipschitz függvény (egyenletesen) folytonos is: az $\frac{|f(\tilde{x})-f(x)|}{|\tilde{x}-x|} \leq L$ egyenlőtlenség mutatja, hogy a folytonosság jól ismert (ismert?) definíciójában⁵ szereplő δ választható $\frac{\varepsilon}{L}$ -nek.

Továbbra is az autonóm esetről maradva, ha $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonosan deriválható függvény, akkor a Newton–Leibniz formula átparaméterezésével

$$f(\tilde{x}) - f(x) = \left[\int_0^1 f'(x + \vartheta(\tilde{x} - x)) d\vartheta \right] (\tilde{x} - x),$$

ahol a szögletes zárójelben egy mátrix, az x és az \tilde{x} pontokat összekötő szakasz pontjaiban vett derivált– más szóval Jacobi–mátrixok integrálátlaga áll. Így

$$\text{folytonosan deriválható} \Rightarrow \text{lokálisan Lipschitz} \Rightarrow \text{folytonos}$$

valamint, a folytonosan deriválható függvények körében,

$$\text{globálisan Lipschitz} \Leftrightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|f'(x)\| < \infty$$

és ekkor a globális Lipschitz konstans minimális értéke $L = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|f'(x)\|$.

Végezetül megemlítjük, hogy a Picard–Lindelöf Tétel mind globális, mind lokális változatában igaz marad akkor is, ha az f függvényre vonatkozó Lipschitz–feltételt (különböző, de technikailag meglehetősen körmönfont módokon) gyengítjük. A Lipschitz–feltételnél kevesebbet követel meg az

$$\langle f(t, x) - f(t, \tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle \leq \ell \cdot |x - \tilde{x}|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^d \quad (2.3)$$

úgynevezett egyoldali Lipschitz–feltétel, ahol $\ell \in \mathbb{R}$ alkalmas állandó, amelyet érdemes lesz külön is tárgyalnunk. Világos, hogy az $\ell = L$ választással (2.3) a (2.1) következménye.

Az egzisztencia és az unicitás mellett van egy harmadik szempont is, amely legalább annyira fontos, mint az előző kettő. Ez pedig a megoldás függése a feladat paramétereitől. A $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték–feladatnál maradva világos, hogy sem a

⁵ez egy kétszemélyes játszma: *Első Menet*: az „Ellenfél” megad egy pozitív ε -t. Ha erre tudok olyan pozitív δ -t mondani, hogy

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

akkor jöhet a *Második Menet*: az „Ellenfél” megad egy újabb, az előzőnél kisebb pozitív ε -t. Ha erre is tudok válaszolni ... akkor jöhet a *Harmadik Menet* ... és így tovább. Ha valamelyik menetben nem tudok egy (természetesen az éppen aktuális ε értékétől, az f függvénytől és általában a konkrét x_0 helytől is függő) alkalmas δ -val válaszolni, akkor vége a játéknak és az „Ellenfél” nyert. Ha azonban a menetek száma végtelen és az egymás utáni menetek mindegyikében van jó válaszom, tehát ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \text{hogy } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \text{ esetén, amelyre } |x - x_0| < \delta \text{ teljesül,}$$

akkor az f függvény az x_0 pontban folytonos, és én nyertem. A játszmát érdemes bemutatni egy kis rajzon is: *matematika szöveget kísérő minden ábrán érdemes tudni* — de itt a lényeghez tartozik: először a vízszintes sávokat! —, hogy az ábra egyes részei mely sorrendben készültek el.

kezdeti feltételeket, sem magát az f függvényt nem ismerjük, nem ismerhetjük pontosan (leggyakrabban azért, mert mérésből származnak). Hogyan hat ez a tény magára a megoldásra?

- Mi a hatása a kiindulási adatok hibájának az elméletileg pontos megoldásra?
- Mit mondhatunk a a számítógépes–numerikus közelítések okozta hibákról?

A két kérdést hibabecslések, egyenlőtlenségek formájában is meg fogjuk válaszolni. Pontosabban ebből a célból vezettük be Lipschitz-feltétel után a (2.3) egyenlőtlenséget is.

A kezdetiérték-feladat megoldásának egzisztenciáját és unicitását kimondó Picard–Lindelöf Tétel megfelel a determinizmus *azonos ok, azonos okozat* elvének. De nemcsak ezt foglalja magában, hanem a legalább annyira fontos *hasonló ok, hasonló okozat* elvnek is megfelel: a pontos megoldás folytonos, sőt (sokszorosan) deriválható módon függ a kezdeti feltételektől.

2.6. Tétel Picard–Lindelöf Tétel, Befejezés A 2.1. Tétel folytatásaként: A megoldás folytonosan függ a kezdeti időponttól és a kezdeti állapottól. Pontosabb megfogalmazásban, a

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad , \quad (t, t_0, x_0) \rightarrow \Phi(t, t_0, x_0) = x_{t_0, x_0}(t)$$

képlettel definiált függvény folytonos.

A kezdeti értékektől való függést illetően nem a folytonosság az utolsó szó, amit ki mondhatunk. Ha például az $\dot{x} = f(t, x)$ egyenlet jobb oldalán álló f függvény a C^k osztályba tartozik (azaz mindkét változójában egyszerre k -szor folytonosan deriválható), akkor az $x_{t_0, x_0}(\cdot)$ megoldásfüggvény a (t_0, x_0) paraméterekben és a t változóban egyszerre C^k , sőt a t változóban C^{k+1} . Itt k nemcsak tetszőleges pozitív egész szám lehet, hanem $k = \infty$, sőt $k = \omega$ is megengedett: C^∞ a végtelen sokszor deriválható, C^ω pedig az analitikus függvények osztályát jelenti. (Analitikusság alatt azt értjük, hogy a függvény (lokálisan, az értelmezési tartomány minden pontjának egy kicsiny környezetében) egyenlő saját Taylor sorával.)

A fentiek kivétel nélkül igazak a 2.2. Tétel folytatásaként is, lokális változatban: Egyedül az értelmezési tartományokra kell ügyelni. Továbbá igazak a megoldásnak az esetleges további paraméterektől való függésére is. Maga az f függvény is (megfelelően választott végtelen dimenziós terekben) tekinthető paraméternek.

Fontos megjegyeznünk, hogy — tetszőleges $k = 1, 2, 3, \dots; \infty, \omega$ esetén — az inverz- és implicit-függvény tételek mindegyike is ugyanígy igaz a C^k simasági osztályban.

2.7. Tétel Picard–Lindelöf Tétel, Ráadás A 2.1. Tétel folytatásaként: A 2.1. Tétel érvényességéhez (2.1) helyett elegendő feltennünk, hogy teljesül a (2.3) egyenlőtlenség.

Ez esetben⁶:

$$|\Phi(t, t_0, x_0) - \Phi(t, t_0, \tilde{x}_0)| \leq |x_0 - \tilde{x}_0| e^{\ell(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \quad \forall x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^d.$$

Bizonyítás. A bizonyítás szellemes, de jól érthető célirányos számolás. Jelöljön $x(t)$ a (t_0, x_0) ponton, $\tilde{x}(t)$ pedig a (t_0, \tilde{x}_0) ponton áthaladó megoldást a $[t_0, \infty)$ félegyenesen⁷

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)) \\ \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t)) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(t, x(t)) - f(t, \tilde{x}(t)).$$

Mindkét oldalt skaláris szorzatát véve $(x(t) - \tilde{x}(t))$ -vel, majd a feltételi egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}\tilde{x}(t), x(t) - \tilde{x}(t) \right\rangle &= \langle f(t, x(t)) - f(t, \tilde{x}(t)), x(t) - \tilde{x}(t) \rangle \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt}|x(t) - \tilde{x}(t)|^2 &\leq \ell|x(t) - \tilde{x}(t)|^2. \end{aligned}$$

Bevezetve a $\rho(s) = |x(s) - \tilde{x}(s)|^2$ jelölést, már könnyű a számolás⁸:

$$\rho(s) \geq 0 \quad \text{és} \quad \dot{\rho}(s) \leq 2\ell\rho(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}(s)}{\rho(s)} \leq 2\ell \quad \Rightarrow \quad \int_{t_0}^t \frac{\dot{\rho}(s)}{\rho(s)} ds \leq \int_{t_0}^t 2\ell ds$$

⁶A legtöbb alkalmazás megengedi, hogy az x_0 és az \tilde{x}_0 kezdeti állapotokhoz tartozó t_0 és $\tilde{t}_0 \approx t_0$ kezdeti időpontokat egymással azonosnak vegyük. A 2.7. Tétel egyébként könnyen kiterjeszthető ebbe az irányba:

$$\Phi(\tilde{t}_0, t_0, x_0) - x_0 = \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} f(s, x_{t_0, x_0}(s)) ds \quad \Rightarrow \quad |\Phi(\tilde{t}_0, t_0, x_0) - x_0| \leq M(\tilde{t}_0 - t_0) \quad \text{ha} \quad |f| \leq M \quad \text{és} \quad \tilde{t}_0 \geq t_0.$$

⁷Az óvatos megfogalmazás arra utal, hogy a megoldások egyértelműségét még nem tudhatjuk: létezésüket a 2.3. Példa előtt ismertetett Peano Tétel biztosítja. Igazából azt is bizonyítanunk kellene, hogy a lokális megoldások kiterjeszthetők a teljes $[t_0, \infty)$ félegyenesre: ez utóbbi a

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}(t), x(t) \rangle &= \langle f(t, x(t)), x(t) \rangle \leq \ell|x(t)|^2 + \langle f(t, 0), x(t) \rangle \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt}|x(t)|^2 &\leq |\ell| \cdot |x(t)|^2 + C_T|x(t)| \leq \left(|\ell| + \frac{C_T}{2} \right) |x(t)|^2 + \frac{C_T}{2} \end{aligned}$$

(hiszen $|a| \leq \frac{1}{2}(a^2 + 1) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ egyenlőtlenség alapján vezethető le, az egyre növekvő hosszúságú $[t_0, t_0 + T]$ intervallumokon. Itt $C_T > 0$ a T -től függő állandó, a levezetés pedig — csakúgy mint maga a tényleges bizonyítás: *mennyi változatban működik ugyanaz a módszer!!* — átosztást és logaritmikus integrálást igényel.

⁸A 0-val történő osztást a $\rho(\tau) = 0 \Rightarrow \rho(t) = 0 \quad \forall t \geq \tau$ tulajdonság előzetes bizonyításával kerülhetjük el, ami igazából nem más mint a teljes bizonyítás egy speciális esetének elővételezése:

$$\rho(s) \geq 0 \quad \text{és} \quad \dot{\rho}(s) \leq (2|\ell|)\rho(s) + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \rho(t) + \varepsilon \leq (\rho(\tau) + \varepsilon)e^{2|\ell|(t-\tau)} \quad \forall t \geq \tau \quad \forall \varepsilon > 0$$

ahol $\rho(\tau) = 0$ esetén a $\varepsilon \rightarrow 0^+$ határátmenettel $0 \leq \rho(t) \leq 0$ ha $t \geq \tau$.

$$\Rightarrow \ln(\rho(s)) \Big|_{t_0}^t \leq 2\ell(t-t_0) \Rightarrow \rho(t) \leq \rho(t_0)e^{2\ell(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0,$$

és pontosan ezt kellett igazolnunk. Az $x_0 = \tilde{x}_0$ speciális eset maga a $t \geq t_0$ unicitás. \square

Ha a kezdeti állapot nem egyszer s mindenkorra rögzített, akkor a Φ megoldó-operátor utolsó argumentumát x_0 helyett x -el jelöljük.

Az $f(t, x) \equiv f(x)$ autonóm esetben, mint az (1.10) idő-eltolási tulajdonság újrafogalmazása, érvényes az

$$\Phi(t, t_0, x) = \Phi(t-t_0, 0, x) \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

azonosság. Ezért az $\dot{x} = f(x)$ autonóm egyenletet a továbbiakban mindig az $x(0) = x_0$ kezdeti feltétellel látjuk el, azaz a dinamikát a $t_0 = 0$ kezdeti időpontból indítjuk. Így az autonóm esetben a megoldó-operátor változóinak számát eggyel csökkentve, azt a

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (t, x_0) \rightarrow \Phi(t, x_0) = x_{0, x_0}(t)$$

leképezésként definiáljuk. A megoldásokat ennek megfelelően nemcsak a $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ szorzattér $\{(t, x(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ alakú görbéként ábrázolhatjuk, hanem úgy is, mint az \mathbb{R}^d tér $\{x(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ alakú, a t idővel paraméterezett görbéit. Ez utóbbiak alkotják az $\dot{x} = f(x)$ autonóm egyenlet fázisportréját.

2.8. Definíció Legyen (X, d) metrikus tér. A $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ leképezés folytonos idejű dinamikus rendszer X -en, ha igazak rá

(i) Φ folytonos

(ii) $\Phi(0, x) = x \quad \forall x \in X$

(iii) $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t+s, x) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$

Az (ii) és (iii) axiómák egyszerűen az idő múlását fejezik ki az aktuális állapot megváltozásának tükrében. Zérus idő alatt nem változik semmi, $t+s$ idő pedig úgy telik el, hogy először t , utána pedig s idő. Az $s = -t, t \geq 0$ választással $x = \Phi(0, x) = \Phi(t-t, x) = \Phi(t, \Phi(-t, x)) \quad \forall x \in X$, tehát a $\Phi(t, \cdot) : X \rightarrow X$ t -időleképezés (angolul t -time map) az X metrikus térnek önmagára történő, kölcsönösen egyértelmű, oda-vissza folytonos leképezése, röviden az X -et önmagára vivő homeomorfizmus. (Folytonos idejű dinamikus rendszerekben a jövő és a múlt szerepe tehát matematikailag felcserélhető. A jelen állapot ebben az absztrakcióban a jövőt is és a múltat is egyértelműen meghatározza.⁹)

⁹Késleltetett egyenletek, például $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-r))$ vagy $\dot{x}(t) = \int_{t-r}^t g(x(s)) ds$ esetén a jövőt nemcsak a $t = t_0$ jelen, hanem az $s \in [t_0-r, t_0]$ közelmúlt határozza meg. Itt az $r > 0$ állandó a késleltetés mértéke, az annál régebbi állapotok már nincsenek hatással a jövő alakulására. Egyszerű matematikai példa az $\dot{x} = (b-d)x$ Malthus egyenlet $\dot{x}(t) = bx(t-r) - dx(t)$ változata: míg a halál minden korosztályban egyformán arathat (d mint death rate), szaporodni csak az r -nél idősebb egyedek képesek (b mint birth rate).

2.9. Példa Az $\dot{x} = f(x)$ autonóm differenciálegyenlet (amennyiben a 2.7. Tétel feltételei teljesülnek) Φ megoldó-operátora az $X = \mathbb{R}^d$ téren folytonos idejű dinamikus rendszert határoz meg. Ez a legelső és legfontosabb példa dinamikus rendszerre. A megoldó-operátor hely szerinti folytonosságát az

$$|\Phi(t, x_0) - \Phi(t, \tilde{x}_0)| \leq |x_0 - \tilde{x}_0| e^{\ell t} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^d \quad (2.4)$$

egyenlőtlenség fejezi ki.

Azokban az esetekben, amikor létezik a λ_{Ljap} Ljapunov exponens, akkor a (2.4) egyenlőtlenség jobb oldalán $e^{\ell t}$ helyébe lényegében $e^{\lambda_{Ljap} t}$ írható. Ez $\lambda_{Ljap} \leq \ell \leq L$ miatt a jobb oldal újabb érdemi csökkentését jelenti.

Az értelmezési tartományok szükséges korlátozása mellett mindezek igazak a 2.2. Tételnek megfelelő lokális megoldó-operátorra is. A gyakorlatban legtöbbször lokálisan értelmezett, lokális dinamikus rendszerekkel van dolgunk.

A teljesség kedvéért néhány sorban vázoljuk a Ljapunov exponens(ek) fogalmát. A $\lambda_{Ljap}(x_0; v)$ és a $\lambda_{Ljap}(x_0)$ pontonkénti Ljapunov exponens közeli trajektóriák viselkedését hasonlítja össze, a

$$\Phi(t, x_0 + v) - \Phi(t, x_0) \approx [\Phi'_x(t, x_0)]v \quad \text{formula } t \rightarrow \infty \text{ skálázása alapján.}$$

Itt $x_0, v \in \mathbb{R}^d$ rögzített vektorok, $|v| = 1$, Φ az $\dot{x} = f(x)$ autonóm egyenlet megoldó-operátora, és

$$\lambda_{Ljap}(x_0; v) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |[\Phi'_x(t, x_0)]v| \quad \text{és} \quad \lambda_{Ljap}(x_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi'_x(t, x_0)\|.$$

A meglepő tény az, hogy sok esetben a limes superior valójában limes, és $\lambda_{Ljap}(x_0)$ értéke 1-valószínűséggel független x_0 -tól. Éppen ezért lehetséges az immáron csak a dinamikára jellemző λ_{Ljap} mennyiség bevezetése. A $\lambda_{Ljap}(x_0; v)$ függése v -től is jól kéz-bentartott. A $\Phi'_x(t, x_0)$, $t \geq 0$ mátrixok *szinguláris-érték felbontása*¹⁰ alapján d különböző valós számot, d (általában egymástól) különböző Ljapunov exponenst lehet definiálni. A

¹⁰Egy $d \times d$ méretű négyzetes A mátrix szinguláris-érték felbontása

$$A = WDV^T, \quad \text{ahol}$$

$$D = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d), \quad V = \text{col}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d), \quad W = \text{col}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_d),$$

$$\{\alpha_k\}_{k=1}^d \text{ valós számok, } \{\mathbf{v}_k\}_{k=1}^d \text{ és } \{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^d \text{ ortonormáltak vektorrendszerek,}$$

$$A^T A \mathbf{v}_k = \alpha_k \mathbf{v}_k, \quad A \mathbf{v}_k = \alpha_k \mathbf{w}_k, \quad A A^T \mathbf{w}_k = \alpha_k \mathbf{w}_k, \quad A^T \mathbf{w}_k = \mathbf{v}_k.$$

Világos, hogy ez a főtengelytétel nem-szimmetrikus, négyzetes mátrixokra történő általánosítása. (Van tovább is: $d_1 \times d_2$ méretű mátrixok szinguláris-érték felbontása például a *főkomponens-analízisben* használatos.)

legelső, a maximális Ljapunov exponens a $\Phi'_x(t, x_0)$, $t \geq 0$ mátrixok $\|\Phi'_x(t, x_0)\|$ normája alapján is definiálható. A továbbiakban ezt az utat követjük és Ljapunov exponens alatt mindig a λ_{Ljap} maximális Ljapunov exponenst értjük.

Legyen most $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^d$ a 2.43. Definíció szerinti kompakt attraktor, $A(M)$ vonzási tartománnyal. Tegyük fel továbbá, hogy az M halmaz *tisztességesen kaotikus*¹¹. Ekkor majdnem minden $x_0 \in A(M)$ esetén $\lambda_{Ljap}(x_0)$ nemcsak limes superioraként, hanem limesként is létezik, továbbá független az $x_0 \in A(M)$ konkrét megválasztásától: az ilyen értelemben közös $\lambda_{Ljap}(x_0) = \lambda_{Ljap} > 0$ számot az M kaotikus attraktorhoz tartozó (maximális) Ljapunov exponensnek nevezzük.

¹¹ezt az elnevezést csak házi használatra vezetjük be — olyan tulajdonságról van szó, amelyet pontosan lehet definiálni, de teljesülését szinte egyetlen ($d > 1$ dimenziós, nem-mesterségesen kreált) példán sem lehet ellenőrizni. Fizikusok és mérnökök anélkül számolnak Ljapunov exponenst, hogy annak létezését bizonyítanák. Ha a vonatkozó szimulációk hosszú idő után is egy nullánál nagyobb szám fölötti értékeket adnak, akkor a kaotikusságot úgymond sikerült kimutatniuk, és a kérdéses nullánál nagyobb szám nagysága a káosz erejét jelzi. Ebben az értelemben a maximális Ljapunov exponens, λ_{Ljap} a káosz erejét méri, a *káosz kvantitatív indikátora*. Más káosz-indikátorok is vannak, a fraktálok finomszerkezetének mérésére szolgáló boxdimenzió mellett a maximális Ljapunov exponens a legelterjedtebb közülük. Minden fraktál „megfagyott káosz”-nak tekinthető: a boxdimenzióval kapcsolatban pedig az a lényeges, hogy ne egész számnak bizonyuljék. A káosz-indikátorokkal kapcsolatos és folyóiratcikkekben dokumentált számítógépes mérések száma néhány ezerre tehető, nagy többségük idősorokat használ kiindulási adatként.

2.2. A dinamikus rendszerek típusai. Példák

Magától értetődő, hogy a 2.8. Definíció (i)–(ii)–(iii) axiómáinak mindegyike értelmes marad akkor, ha a bennük szereplő \mathbb{R} helyére \mathbb{T} kerül, ahol \mathbb{T} az $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, \mathbb{Z} , \mathbb{N} , $h\mathbb{Z}$ és a $h\mathbb{N}$ ($h > 0$ rögzített) bármelyike lehet. Ezekben az esetekben azt mondjuk, hogy $\Phi: \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ rendre *folytonos idejű semidynamikus rendszer*, *diszkrét (idejű) dinamikus rendszer*, *diszkrét (idejű) semidynamikus rendszer*, és $h > 0$ időlépésű *diszkrét dinamikus illetve semidynamikus rendszer*. A különböző lehetőségeket a következő definíció foglalja egységbe.

2.10. Definíció Legyen (X, d) metrikus tér és legyen \mathbb{T} az \mathbb{R} legalább kételemű, zárt, additív rész-félcsoportja. A $\Phi: \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ leképezés \mathbb{T} idejű dinamikus rendszer X -en, ha igazak rá

(i) Φ folytonos

(ii) $\Phi(0, x) = x \quad \forall x \in X$

(iii) $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t+s, x) \quad \forall t, s \in \mathbb{T} \quad \forall x \in X$.

Most egy jellegzetes példasorozat következik. Az első két példában Φ a megoldó-operátor, melynek paramétertől való függését külön nem jelöljük.

2.11. Példa Késleltetett egyenlet, $0 < \mu$ paraméterrel:

$$\dot{x} = -\mu(e^{x(t-1)} - 1), \quad x|_{[-1,0]} = \phi \in C = C([-1,0], \mathbb{R}), \quad t \geq 0.$$

$$\Phi(t, \phi): \mathbb{R}^+ \times C \rightarrow C, \quad (\Phi(t, \phi))(s) = x_{0,\phi}(t-s) \quad \text{ha } s \in [-1,0].$$

(A megoldásokat persze nem a C tér absztrakt elemeiként kell szemléltetni, hanem mint $[-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \rightarrow x_{0,\phi}(t)$ függvényeket.)

Ez az egyenlet először a prímszámok eloszlásának elméletében merült fel, de mivel az $x(t) = \log(u(t)) \Leftrightarrow u(t-1) = e^{x(t-1)}$ helyettesítés után az $\dot{u} = \mu u(t)(1 - u(t-1))$ alakra egyszerűsödik, úgy is interpretálható, mint egy erőforráskorlátos Malthus egyenlet a C tér $\{u \in C \mid u(s) > 0 \quad \forall s \in [-1,0]\}$ részhalmazán. Elsőként megadott formájában Wright-, másodikként megadott formájában Hutchinson–egyenlet néven ismeretes. A kritikus parameter $\mu = \frac{\pi}{2}$, amikor is Hopf–bifurkáció történik: a Wright egyenlet $x_0 \equiv 0$ illetve a Hutchinson egyenlet $u_0 \equiv 1$ egyensúlyi helyzetének $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$ paraméterekre érvényes aszimptotikus stabilitása egy onnan lefűződő $\Gamma(\mu)$, $\frac{\pi}{2} < \mu < \infty$ periodikus pálya aszimptotikus stabilitására tevődik át. (A $\mu \rightarrow \infty$ határátmenetben ezek a periodikus pályák — a numerikus megoldások mint $[-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket rajzolják ki őket — lassú és gyors szakaszokból álló aszimptotikusan stabil relaxációs oszcillációkként viselkednek.)

Az egyensúlyi helyzet aszimptotikus stabilitása a numerikus tapasztalatok szerint globális, ha $0 < \mu < \frac{\pi}{2} = 1.570796\dots$. A globális aszimptotikus stabilitás $0 < \mu \leq 1.5$ esetre vonatkozó hagyományos bizonyítását a $1.5 \leq \mu \leq 1.5706$ paraméterekre érvényes számítógéppel segített bizonyítás (computer-assisted proof) követte. A legnehezebb, nem egészen két tízezrednyi paraméter-tartomány még hátra van.

2.12. Példa *Reakció–diffúzió egyenlet homogén Dirichlet peremfeltétellel, $\mu \in \mathbb{R}$ paraméterrel:*

$$\left. \begin{array}{l} u_t' = u_{xx}'' + \mu u - u^3 \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{array} \right\}, \quad u(0, \cdot) = g \in H_0^1 = H_0^1([0, \pi], \mathbb{R}), \quad t \geq 0, \quad x \in [0, \pi].$$

$$\Phi(t, g) : \mathbb{R}^+ \times H_0^1 \rightarrow H_0^1, \quad (\Phi(t, g))(x) = u_{0,g}(t, x) \quad \text{ha } x \in [0, \pi].$$

Ez a híres Chafee–Infante egyenlet, amely reakció–diffúzió egyenletek körében az egyik „állatorvosi ló” szerepét játssza. Erről a konkrét egyenletről kivételesen szinte mindent tudunk, beleértve a globális attraktor szerkezetének ($u(t, x) \equiv v(x) \forall t$ egyensúlyi helyzetek $\Leftrightarrow v''(x) + \mu v(x) - v^3(x) = 0$ & $v(0) = v(\pi) = 0$ és az ezeket összekötő trajektóriák etc.) és valamennyi bifurkációjának teljes ismeretét. Jóllehet a megoldások a $t > 0$ időtartományra már C^∞ függvényekké válnak, az amúgy roppant nehéz és a $-u^3$ nemlinearitás konkrét megválasztásától nagyon erősen függő matematikai analízis döntő része egy speciális Hilbert-térben, a

$$H_0^1[0, \pi] = \left\{ g \sim \sum_k c_k \sin(kx) \in L_2[0, \pi] \mid \sum_k k^2 c_k^2 < \infty \right\}$$

térben történik.¹² (Önmagában ez utóbbin olyan nagyon nem kell csodálkoznunk, hiszen már az $u(t,0) = u(t,\pi) = 0$ peremérték- és az $u(0,\cdot) = g$ kezdetiérték-feltétellel ellátott egydimenziós $u_t' = u_{xx}''$ ($t \geq 0, x \in [0,\pi]$) diffúzióegyenlet tárgyalása is Hilbert-teret teret igényel: a g kezdeti állapotot érdemes az $L_2[0,\pi]$ térből venni.)

2.13. Példa Véges gráf csúcspontjain értelmezett diszkrét idejű, $[0,1]$ -értékű dinamika:

$$\mathcal{F}: [0,1]^N \rightarrow [0,1]^N, \quad (\mathcal{F}\mathbf{x})_i = F\left(\frac{1}{d_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x_j\right), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

A jelölések magyarázata: adott egy G gráf, csúcspontjai $V(G) = \{1, 2, \dots, N\}$, izolált csúcsok és hurokélek nincsenek, az i -edik csúcs fokszáma $d_i > 0$, az i -edik csúccsal szomszédos csúcsok halmaza $\mathcal{N}_i, i = 1, 2, \dots, N$, az éleknek nincs külön irányítása. Adott továbbá egy $F: [0,1] \rightarrow [0,1]$ folytonos függvény. Az állapottér a

$$[0,1]^N = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_i \in [0,1], \quad i = 1, 2, \dots, N\}$$

halmaz. (Maga a G gráf közvetlenül nem szerepel a fenti képletek egyikében sem.) A kiindulási állapot egy

$$\mathbf{x}_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{N,0}) \in [0,1]^N$$

vektor (a $[0,1]^N$ állapottér egy eleme, amely a $t = 0$ időponthoz tartozik).

A dinamikát, amely a \mathcal{F} leképezés egymás utáni végrehajtása a $t = 1, 2, \dots$ időpontokban, meg lehet adni egy rekurziós képlettel is:

$$x_{i,t+1} = F\left(\frac{1}{d_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x_{j,t}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

¹²Az analízisben fontos szerepet játszik a LaSalle elv és a

$$V: H_0^1[0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad V(u) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (u_x')^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^\pi (u^2 - \mu)^2 dx$$

Ljapunov függvény, amely a megoldások mentén legalábbis nem növekszik. Tanulságosak a részletszámítások is — az egyes lépések jogosságát a Newton–Leibniz féle differenciál-és integrál-calculus Szoboljev (általánosított L_2) terekre történő kiterjesztése garantálja —:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^\pi (u_x')^2 dx \right) &= \int_0^\pi u_x' u_{xt}'' dx = \int_0^\pi u_x' u_{tx}'' dx = [u_x' u_t']_0^\pi - \int_0^\pi u_{xx}'' u_t' dx, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4} \int_0^\pi (u^2 - \mu)^2 dx \right) &= \int_0^\pi (u^2 - \mu) u u_t' dx = - \int_0^\pi (\mu u - u^3) u_t' dx, \end{aligned}$$

majd a két eredményt összeadva, s az egyenletet is visszahelyettesítve,

$$\frac{d}{dt} V(u(t)) = - \int_0^\pi (u_t')^2 dx, \quad \text{hiszen } u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \Rightarrow u_x'(t,0) = u_x'(t,\pi) = 0 \quad \forall t > 0.$$

A Chafee–Infante egyenlet végső elemzésben olyan közönséges differenciálegyenlet, amely a $H_0^1[0,\pi]$ Hilbert téren értelmezett.

Ez az *adócsalás* Simonovits András féle *ágens-alapú modellje*, ahol $x_{i,t}$ az i -edik adózó által a t -edik évben az adóhivatalnak bevallott jövedelmet jelenti ($i = 1, 2, \dots, N$, $t = 0, 1, 2, \dots$). A modell azzal az egyszerűsítő feltevessel él, hogy minden adófizető jövedelme minden évben pontosan 1. (Az 1-re történő normálás nem jelenti a matematikai általánosság megszorítását.) Az adófizetők — *feltéve, de meg nem engedve* a modell szerint — nem vallják be teljes jövedelmüket: a feltételezés szerint mindenki úgy csal a rákövetkező évben, hogy a saját ismerősei által bevallott jövedelmek átlagát veszi alapul¹³. Az F függvény itt nem részletezett két paramétere az adókulcs (egykulcsos adóról van szó) és az adómorál (ez egy közgazdasági heurisztikával definiált valós szám). — A modellből matematikailag levezethető, hogy az adókulcs felemelése egy olyan országban, ahol alacsony az adómorál, a befizetett adó csökkenésével járhat. Ezzel együtt a modell ezer sebből vérzik. Annyi minden mást is figyelembe lehetett volna venni. Ráadásul az adóhivatal nem megfigyelni szeretné ezt a folyamatot. Célja a közbeavatkozás. De hogy ezt miként tegye, arra nézve még az egyszerű, „magukra hagyott” modellek is adnak bizonyos támpontokat.

A következő három példa sejtautomatákat mutat be. Az általuk meghatározott dinamikát az egyenes egység-intervallum illetve a sík egységnégyzet rácса hordozza. Ez a szokásos szemléltetés. De úgy is felfoghatjuk a dolgot, hogy a sejtautomaták dinamikáját speciális gráfok hordozzák. A rácsmezők egy gráf csúcsai. Két csúcs között akkor van él, ha a nekik megfelelő rácsmezők szomszédosak. (A szomszédosági relációt természetesen külön kell definiálni. Hányan vannak/legyenek a szomszédok és milyen irányban helyezkednek/helyezkedjenek el egymástól — a modellezni kívánt jelenség természetétől függően ugyan, de mégis van bizonyos szabadságunk ebben a kérdésben. Világos, hogy a térben és időben homogén modelleket kell elsőként vizsgálni. A homogenitás eltolási szimmetriákat jelent: a dinamika szabályai minden egyes sejtre nézve, minden időpillanatban ugyanazok.) Látni fogjuk, hogy a gráfos szemléltetésben a sejtautomaták alapszerkezete mennyire hasonlít az adócsalás most ismertett modelljéhez.

2.14. Példa *Egydimenziós, véges rácson értelmezett kétértékű automata:*

$$\mathcal{F} : \{0, 1\}^N \rightarrow \{0, 1\}^N, \quad (\mathcal{F}\mathbf{x})_i = F(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

A jelölések magyarázata: a G gráf legyen most a $V(G) = \{1, 2, \dots, N\}$ csúcsokat ebben a sorrendben összekötő út, amelyhez minden egyes csúcsban egy-egy hurokél is illeszkedik

13

$$\frac{1}{d_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} x_{j,t} \quad \text{ebben az interpretációban nem más, mint}$$

az i -edik adózó „szomszédai”, bizalmas ismerősei által a t -edik évben az adóhivatalnak bevallott jövedelmek számtani közepe. A kérdés az, hogy az idő múlásával homogenizálódik és stabilizálódik-e ez a dinamika. A válasz igenlő: ebben a modellben (a G gráfra és az F leképezésre tett természetes feltevések esetén) aszimptotikusan mindenki egyformán fog csalni: az \mathcal{F} leképezés $\mathbf{x}^* = (x^*, x^*, \dots, x^*) \in (0, 1)^N$ fixpontja globálisan aszimptotikusan stabil, ahol x^* az $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvény nemtriviális, $0 < x^* < 1$ fixpontja.

(a belső csúcsoknak két, a két szélső csúcsnak egy-egy valódi szomszédja van), az éleknek nincs külön irányítása. Adott továbbá egy $F : \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ leképezés. Az állapottér a

$$\{0, 1\}^N = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, N\}$$

halmaz, amelyet azonosíthatunk az N hosszúságú 0–1 sorozatok terével. A kiindulási állapot egy

$$\mathbf{x}_0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{N,0}) \in \{0, 1\}^N$$

N hosszúságú 0–1 sorozat (a $\{0, 1\}^N$ állapottér egy eleme, amely a $t = 0$ időponthoz tartozik).

A dinamikát, amely a \mathcal{F} leképezés egymás utáni végrehajtása a $t = 1, 2, \dots$ időpontokban, meg lehet adni egy rekurziós képlettel is:

$$x_{i,t+1} = F(x_{i-1,t}, x_{i,t}, x_{i+1,t}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Ahhoz, hogy mindez értelmes legyen, peremfeltételeket is meg kell adnunk. A szokásos peremfeltételek:

- $x_0 = x_L^*$ és $x_{N+1} = x_R^* \Leftrightarrow x_{0,t} = x_L^*$ és $x_{N+1,t} = x_R^*, t = 0, 1, 2, \dots$
- $x_0 = x_1$ és $x_{N+1} = x_N \Leftrightarrow x_{0,t} = x_{1,t}$ és $x_{N+1,t} = x_{N,t}, t = 0, 1, 2, \dots$
- $x_0 = x_N$ és $x_{N+1} = x_1 \Leftrightarrow x_{0,t} = x_{N,t}$ és $x_{N+1,t} = x_{1,t}, t = 0, 1, 2, \dots$

A peremfeltételek elnevezése rendre Dirichlet (ahol $x_L^*, x_R^* \in \{0, 1\}$ rögzített — az alsó indexek a left és a right szavak kezdőbetűi), Neumann, illetve periodikus (ez utóbbi annak felel meg, hogy a G gráf nem út, hanem kör, amikor is a változókat ciklikusan azonosítjuk egymással).

Ez Wolfram véges automatája. Az automatának 2^N , $N \geq 3$ állapota van. A dinamika az F leképezés megválasztásától függ. Erre $2^{2^3} = 256$ lehetőség van¹⁴, ennek megfelelően beszélünk 256 Wolfram féle szabályról, és 0-tól 255-ig sorszámozzuk őket. A sorszámából maga a szabály visszaállítható. Az

$$\left. \begin{aligned} F(0,0,0) = a_0, & \quad F(0,0,1) = a_1, & \quad F(0,1,0) = a_2, & \quad F(0,1,1) = a_3 \\ F(1,0,0) = a_4, & \quad F(1,0,1) = a_5, & \quad F(1,1,0) = a_6, & \quad F(1,1,1) = a_7 \end{aligned} \right\}$$

szabály sorszáma

$$\text{SORSZÁM}(F) = \sum_{k=0}^7 a_k 2^k, \quad \text{ahol } a_k \in \{0, 1\}, \quad k = 0, 1, \dots, 7.$$

¹⁴általában is, ha X $K \geq 1$, Y pedig $L \geq 1$ elemszámú véges halmaz, akkor a páronként különböző $F : X \times X \times \dots \times X$ (M -tényezős szorzat) $\rightarrow Y$ leképezések száma $L^{(K^M)}$

A 110-es sorszámú szabály esetén (a $110 = 64 + 32 + 8 + 4 + 2$ kettes számrendszerbeli felbontásnak megfelelően)

$$\left. \begin{array}{l} F(0,0,0) = 0, \quad F(0,0,1) = 1, \quad F(0,1,0) = 1, \quad F(0,1,1) = 1 \\ F(1,0,0) = 0, \quad F(1,0,1) = 1, \quad F(1,1,0) = 1, \quad F(1,1,1) = 0 \end{array} \right\}$$

2.15. Példa *Egydimenziós, mindkét irányban végtelen rácson értelmezett kétértékű automata:*

$$x_{i,t+1} = F(x_{i-1,t}, x_{i,t}, x_{i+1,t}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Most csak a rekurziós képletet adjuk meg, és két kis megjegyzést teszünk. Az állapottér a mindkét irányban végtelen 0–1 sorozatok

$$\{\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} \mid x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in \mathbb{Z}\}$$

tere, a kiindulási állapot pedig egy adott, mindkét irányban végtelen

$$\{\mathbf{x}_0 = \{x_{i,0}\}_{i=-\infty}^{\infty} \mid x_{i,0} \in \{0, 1\}, \quad i \in \mathbb{Z}\}$$

0–1 sorozat. Azt is mondhatjuk, \mathbf{x}_0 a kezdeti feltétel. Peremfeltételekről itt és most nem beszélhetünk.

Ez *Wolfram automatája*, az állapotok és viselkedések elképesztő gazdagságával. A leghíresebb szabály a 110-es sorszámú, amikor is az automata — és ez matematikailag bizonyított — *Turing-gépként* működik.

A számítógépes tapasztalat és minden matematikai heurisztika arra utal, hogy a 30-as sorszámú szabály *pszeudorandom generátort* valósít meg. Ez úgy értendő, hogy az $x_{i,0} = 1$ ha $i = 0$ és $x_{i,0} = 0$ ha $i \neq 0$ kezdeti állapot által generált $x_{0,t}$, $t = 0, 1, 2, \dots$ sorozat pszeudo-véletlen.

A következő példa Conway *Game of Life* automatája, amelyet most a dinamikus rendszerek matematikai formalizmus-nyelvén írunk le. Az informatikus vagy bionikus Olvasó persze gondolhat az „*a (síkbeli végtelen) négyzetrács egy mezőjén a következő pillanatban pontosan akkor van élő sejt, ha ott ebben a pillanatban élő sejt van, kettő vagy három élő szomszédval, vagy ha ott ebben a pillanatban halott sejt van, pontosan három élő szomszédval*” szöveges szabályra is. De arra is kell gondolnia, hogy a *szöveges szabály „lefordítása” egy programnyelvre* mindenképpen igényel valamiféle formalizmust. Programozástechnikailag a kettős indexek halmazának „végesítése” és egymás utáni felsorolása többféleképpen is megoldható. Már az (i, j) mező nyolc szomszédjának sorrendbe állítása is önkényes s erre akkor is szükség van, ha maga a dinamika nem függ ettől a sorrendtől. Ami a releváns kettős indexek számbevételét illeti, legjobb egy dinamikus, állandóan változó felsorolás — azokra a mezőkre, amelyeknek az adott pillanatban nincs élő szomszédja, nem kell figyelünk.

2.16. Példa *Síkbeli, végtelen rácson értelmezett kétértékű automata:*

$$\mathcal{F} : \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}, \quad (\mathcal{F}(\mathbf{x}))_{i,j}$$

$$= F(x_{i,j}; x_{i-1,j+1}, x_{i,j+1}, x_{i+1,j+1}, x_{i+1,j}, x_{i+1,j-1}, x_{i,j-1}, x_{i-1,j-1}, x_{i-1,j}), \quad (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

A jelölések magyarázata: a G gráf legyen most a $V(G) = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ csúcsokat önmagukkal és a nyolcas szélrózsa irányjaiban természetes szomszédjaikkal összekötő élhálózat (a (k, ℓ) csúcs az (i, j) csúcs természetes szomszédja ebben a modellben, ha $|k - i|, |l - j| \leq 1$, de $(k, \ell) \neq (i, j)$, ahol $i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}$). Az éleknek nincs külön irányítása. Adott továbbá egy $F : \{0, 1\} \times \{0, 1\}^8 \rightarrow \{0, 1\}$ leképezés. Az állapottér a mindkét irányban végtelen kétindexű 0–1 sorozatok

$$\{\mathbf{x} = \{x_{i,j}\}_{i,j=-\infty}^{\infty} \mid x_{i,j} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in \mathbb{Z}\}$$

tere, a kiindulási állapot pedig egy adott, mindkét irányban végtelen kétindexű

$$\{\mathbf{x}_0 = \{x_{i,j,0}\}_{i,j=-\infty}^{\infty} \mid x_{i,j,0} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in \mathbb{Z}\}$$

0–1 sorozat. Azt is mondhatjuk, \mathbf{x}_0 a kezdeti feltétel. Peremfeltételekről itt és most nem beszélünk (de világos, hogy minden végtelen modellnek vannak véges változatai ...).

A dinamikát, amely az $\mathcal{F} = \mathcal{F}_C$ leképezés egymás utáni végrehajtása a $t = 1, 2, \dots$ időpontokban, meg lehet adni egy rekurziós képlettel is, amely azonban már nem férne el egy sorban. Szerencsére nincs is szükség rá, sőt Conway $F = F_C$ leképezését — amely az elvben lehetséges $2^{(2^9)} = 2^{512}$ leképezés egyike csupán — sem adjuk meg közvetlenül.

Jelölje az (i, j) cella (a nyolcas szélrózsa irányjaiba vett) természetes szomszédjainak halmazát

$$\mathcal{N}_{i,j}^* = \{(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |k - i|, |l - j| \leq 1, \text{ de } (k, \ell) \neq (i, j)\}, \quad (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Vegyük észre, hogy a hurokélek miatt $\mathcal{N}_{i,j} = \{(i, j)\} \cup \mathcal{N}_{i,j}^*$. Vezessük be a

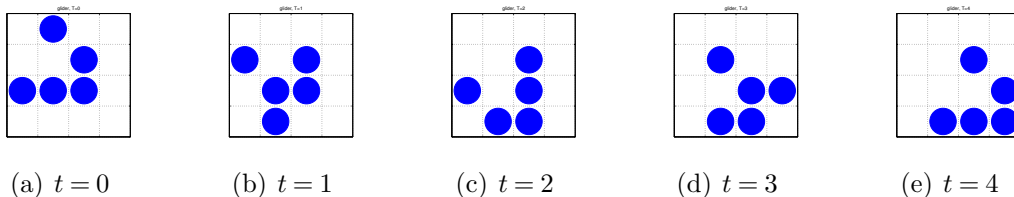
$$\varphi_C : \{0, 1\} \times \{0, 1, 2, \dots, 8\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \varphi_C(p; r) = \begin{cases} 1 & \text{ha } (p; r) \in \{(1; 2), (1; 3), (0; 3)\} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

leképezést, majd legyen végezetül

$$(\mathcal{F}(\mathbf{x}))_{i,j} = \varphi_C(x_{i,j}; \#\{(k, \ell) \in \mathcal{N}_{i,j}^* \mid x_{k,\ell} = 1\}), \quad (i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Ez Conway életjáték automatája.¹⁵ A $\varphi_C(1; r) = 0$ ha $0 \leq r \leq 1$ vagy $4 \leq r \leq 8$ tulajdonság szokásos interpretációja *izoláció vagy (lokális) túlnépesedés* \Rightarrow *pusztulás*. Új élő

¹⁵Figyeljük meg, hogy Conway életjátékában egy cella soronkövetkező állapota — csakúgy mint a Wolfram-féle sejtautomatákban — az adott cella aktuális állapotától is függ. (A gráfos reprezentációban a nem-függés vagy függés kérdése a hurokélek hiányán vagy meglétén múlik. Az adócsalás modelljét annak hurokél-mentes változatában ismertettük.)



2.1. ábra. Délkeleti irányba mozgó sikló (glider) Conway életjáték automatájában

sejt születését a $\varphi_C(0; r) = 1 \Leftrightarrow r = 3$ tulajdonság írja le. A Conway automata szinte áttekinthetetlenül bonyolult dinamikát eredményez: az „életjelenségek” miriádja található meg benne, már a legegyszerűbb kezdeti állapotok esetén is. Önhasonlóságok, periodikus kilövellések, a legvadabb és váratlan, gyönyörű mintázatok. Egyelőre nyitott kérdés, hogy van-e olyan kiindulási állapot benne, amely idővel — egy bizonyos időpontra — önmagát több példányban is le tudja másolni és pedig oly módon, hogy ez az önmásolási folyamat végtelenül folytatható. Amennyire tudom, erre a kérdésre egyelőre egyetlen automatában sem találtak olyan igenlő választ, amely a biológusokat minden szempontból kielégítené. Pedig ez felelne meg az élőlények legszembetűnőbb tulajdonságának, a szaporodásnak.

Egyszerű alakzatok formális másolására már az

$$x_{i,j,t+1} = \sum \{x_{k,\ell,t} \mid |k-i| + |\ell-j| \leq 1\} \pmod{2}, \quad i, j \in \mathbb{Z}, t = 0, 1, 2, \dots$$

paritás-szabály is alkalmas. Ha például az $x_{i,j,0} = 1$ ha $(i, j) = (0, 0)$ és 0 ha $(i, j) \neq (0, 0)$ kezdeti értékből indulunk, akkor minden negyedik lépésben egyre több és több észak, kelet, dél és nyugat felé vándorló ponthoz jutunk. Mindezzel együtt a biológusok nincsenek megelégedve ezzel a példával még akkor sem, ha ugyanez a dinamika nagyon sokféle kiindulási konfigurációt képes észak, kelet, dél és nyugat felé vándorló utódaiban periodikusan reprodukálni. A paritás-szabály egydimenziós, mindkét irányban végtelen rácson értelmezett kétértékű automaták körében Wolfram 150-es sorszámú szabályának felel meg, amely az $x_{i,0} = 1$ ha $i = 0$ és 0 ha $i \neq 0$ kezdeti értékből indulva egyre növekvő hosszúságú fekete-fehér, kettő-hatvány ritmusú rácsmintához vezet.

Természetesen Conway életjáték automatájának is vannak sztochasztikus változatai, amelyek úgymond a mutációkat is beépítik az eredeti modellbe. Hasonló a helyzet a gráfokon értelmezett összes *hálózati dinamikával*. Maguk a gráfok is változhatnak az időben etc. etc. ... A biomatematika járványterjedési modelljei, a választási szociológia véleményterjedési modelljei, sőt az internet mint dinamikus rendszer kutatása különösen is divatosak. A jelenlegi közfelfogás szerint a tényleges kapcsolati struktúrákat az Albert-Barabási *skálafüggetlen* és a Strogatz-Watts *kisvilág típusú véletlen gráfok* jól közelítik.

A számítástudományi-informatikai alkalmazások szempontjából fontos megemlítenünk, hogy a logikai kapuk Conway életjátékában viszonylag könnyen realizálhatók. Ez az első lépés abba az irányba, hogy Conway automatája logikai gépként is funkcionáljon.

Befejezésül a *neurális hálózatok* egyik olyan általános alapmodelljét ismertetjük, amelyben a csatolási mátrix közvetlenül is megjelenik. Speciális szerkezetű közönséges differenciálegyenlet-rendszerről van szó, $N \times N$ méretű W mátrix-szal (amely nem kell feltétlenül szimmetrikus, lehet súlyozott is, sőt negatív elemeket is tartalmazhat). Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aktivációs vagy transzfer függvény szokásos alakja $f(x) = \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, amely szigorúan monoton növekvő és az $x \rightarrow \pm\infty$ határátmeneteknél szaturálódik.

2.17. Példa *Véges gráf csúcspontjain értelmezett folytonos idejű dinamika:*

$$\dot{x} = -x + Wf(x) \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}_i = -x_i + \sum_{j=1}^N w_{ij}f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

A dinamikus rendszer most egy közönséges autonóm differenciálegyenlet megoldó-operátora.

Egy fontos matematikai tényt külön is megemlítenünk. A

$$V(x) = -\frac{1}{2}y^T W y + \sum_{i=1}^N \int^{y_i} f^{-1}(s) ds, \quad y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

képlet Ljapunov függvényt határoz meg.¹⁶ Ezután a LaSalle elv alkalmazása következhet. A W csatolási mátrixot — amint arra celluláris neurális dinamika tanulmányainkból vagy akár a Hopfield hálók elméletéből emlékezhetünk (emlékszünk(!?)) — az egyes konkrét célfeladatoknak megfelelően lehet/kell választani.

A magukra hagyott cellákon érvényes $\dot{x}_i = -x_i$ differenciálegyenlet helyén elvben bármely más, akár többdimenziós közönséges differenciálegyenlet is szerepelhet. Itt x_i az i -edik cella belső állapota, $y_i = f(x_i)$ az i -edik cella outputja. Ha $x_i \in \mathbb{R}^d$ és az i -edik cella belső állapot-egyenlete $\dot{x}_i = b(x_i)$, akkor $b, f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. A nagyméretű, egyforma elemekből felépülő hálózatok vizsgálata mind a villamosmérnöki-informatikai tudományok, mind az idegtudományok részére alapvetően fontos feladat. A csatolás szó ezekben az összefüggésekben elsődlegesen nem matematikai szakkifejezés: az idegsejtek, illetve az elemi áramkörök (az egyes idegsejteket is elemi áramkörökkel modellezzük) közötti reális biológiai-fizikai összeköttetéseket jelent. A *csatolások topológiája versus szinkronizációs mintázatok* kérdéskör mindkét területen az érdeklődés homlokerében áll.

A példák sorát az az explicit Euler módszer diszkretizációs operátorával zárjuk.

¹⁶Valóban, az összetett függvény deriválási szabálya szerint, kihasználva a mátrix szimmetriáját, végezhetül a differenciálegyenletbe történő visszahelyettesítéssel:

$$\frac{d}{dt}V(x(t))\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2}(\dot{y}^T W y + y^T W \dot{y}) + \sum_{j=1}^N \dot{y}_j x_j = \dot{y}^T (-W y + x) = -\dot{y}^T \dot{x} = -\sum_{j=1}^N f'(x_j)(\dot{x}_j)^2 \leq 0.$$

(A Newton–Leibniz formulát is használtuk közben, éspedig a $\frac{d}{dx} \left(\int^{a(x)} \varphi(s) ds \right) = \varphi(a(x))a'(x)$ alakban.) Menet közben a $V'_{x_i} = -\dot{y}_i = -f'(x_i)\dot{x}_i$ azonosságot is megkaptuk.

2.18. Példa *Diszkrétizáció, mint $0 < h \leq h_0$ időlépésű diszkrét dinamika:*

$$\phi_E : [0, h_0] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (h, x) \rightarrow \phi_E(h, x) = x + hf(x).$$

A jelölések magyarázata: $\dot{x} = f(x)$ adott autonóm közönséges differenciálegyenlet, $0 < h_0$ a maximális megengedett lépésköz.

Rögzített $h > 0$ -ra $\phi_E(h, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ az explicit Euler módszer h lépésközű operátora: a matematikai absztrakció szempontjából ez utóbbit szokás magával az (állandó lépésközű) Euler módszerrel azonosítani. A töröttvonal-képzés utólagos, az eljárás lényegétől független interpoláció. A diszkrétizált dinamika a $\phi(h, \cdot)$ leképezés iterálásából áll, a trajektóriák a töréspontok

$$x_k = \phi^k(h, x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_{k+1} = \phi(h, x_k) = x_k + hf(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sorozatai.

Ha az $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ kezdetiérték-feladatot az időben visszafelé szeretnénk megoldani, akkor (és a kettő pontosan ugyanarra az eredményre vezet) az $\dot{x} = -f(x)$, $x(0) = x_0$ kezdetiérték-feladatot kell megoldanunk helyette, immár az időben előre haladva.

A pontos és a közelítő megoldások összehasonlítása szempontjából lényeges, hogy rögzített $h > 0$ -ra $\phi_E(h, \cdot)$ és $\Phi(h, \cdot)$ egyaránt $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezések. Érdekes megemlítenünk, hogy $0 < h_0 \ll 1$ esetén nemcsak $\Phi(h, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, hanem $\phi_E(h, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ is kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Érdeemes összefoglalni az $\dot{x} = f(t, x)$ nem-autonóm differenciálegyenlet Φ megoldó-operátorainak legfontosabb tulajdonságait is:

- (i)' (a rend kedvéért megismételve) $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos
- (ii)' $\Phi(t_0, t_0, x) = x \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
- (iii)' $\Phi(t, s, \Phi(s, t_0, x)) = \Phi(t, t_0, x) \quad \forall t, s, t_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X$

Az $\dot{x} = f(t, x)$ nem-autonóm differenciálegyenlet esetében az explicit Euler diszkrétizációs operátort az

$$\phi_E : [0, h_0] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (h, t, x) \rightarrow \phi_E(h, t, x) = x + hf(t, x)$$

képlet, a $\phi_I : [0, h_0] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ implicit Euler diszkrétizációs operátort pedig az (elegendően kicsiny h lépésköz esetén egyértelműen megoldható) $X = x + hf(t+h, X)$ egyenlet értelmezi.

Összhangban a 2.2. Tétel lokális jellegével, a megoldó-operátor és a dinamikus rendszer általános fogalmát is lehet lokálisan, a teljes téridő-tartomány egy részhalmazán értelmezni. Ugyanez igaz bármely közelítő eljárásra is. Nem szabad zavart okozzon, hogy a Φ és a ϕ_E (a pontos és közelítő megoldó-operátorok) a kontextustól függően két- vagy háromváltozós függvények egyaránt lehetnek.

De éppen ideje, hogy szelídebb vizekre evezzünk.

2.3. Folytonos függés amitől csak lehet

»Ezt a mérnökök hangsúlyozzák, mert nekik mindig meg kell oldani az egyenleteiket, a matematikusoknak csak ritkán«.

Visszatérünk a 2.6. Tétel előtt már felvázolt kérdéskörhöz. Sokak szerint a most következő fogalomalkotás a legfontosabb az egész alkalmazott analízisben:

2.19. Definíció *A matematikai analízis egy feladata* korrekt kitűzésű (well-posed), ha

- van megoldása
- pontosan egy megoldása van
- és ez a megoldás folytonosan függ a feladat összes paraméterétől¹⁷

— egzisztencia, unicitás, folytonos függés.

A legfontosabb korrekt kitűzésű feladatokat, feladattípusokat az alábbi táblázat tartalmazza:

FELADAT	MEGOLDÁS	A FELADAT NEVE és a KORREKT KITŰZÖTTSÉG FELTÉTELE
$Ax = b$	$x = A^{-1}b$	Lineáris Algebrai Egyenletrendszer $\det(A) \neq 0$
$y = f(x)$	$x = x(y)$ és $x_0 = x(y_0)$	(Lokális) Inverz Függvény Feladat $f \in C^1$, $f(x_0) = y_0$, $\det(f'(x_0)) \neq 0$
$f(x, y) = 0$	$y = y(x)$ és $y_0 = y(x_0)$	(Lokális) Implicit Függvény Feladat $f \in C^1$, $f(x_0, y_0) = 0$, $\det(f'_y(x_0, y_0)) \neq 0$
$\dot{x} = f(t, x)$	$x(t) = x_{t_0, x_0}(t)$	Kezdetiérték Feladat (Globális változata) $f \in C^0$, (2.1) vagy (2.3)

A lineáris algebrai egyenletrendszert leszámítva a másik három feladat korrekt kitűzöttsége mögött a kontrakciós elv, más néven a *Banach féle fixpont-tétel* áll. (A következő harmincvalahány sor szó szerinti átvétel saját, *Parciális differenciálegyenletek összehasonlító tárgyalásban* műegyetemi e-book jegyzetemből.)

2.20. Definíció *Legyen* (X, d) *metrikus tér. Az* $f: X \rightarrow X$ *leképezés* kontrakció *a* $0 \leq q < 1$ *kontrakciós állandóval, ha*

$$d(f(x), f(\tilde{x})) \leq q \cdot d(x, \tilde{x}) \quad \text{minden } x, \tilde{x} \in X \text{ esetén.}$$

¹⁷Mi is egy feladat legfontosabb paramétere? *Maga a feladat!* – „Mindent kidobtunk már?” – „Nem! Van még tízezer frank aranyban.” És a súlyos zsák máris a tengerbe hullott. – „Mi maradt még kidobnivaló?” – „Semmi.” – „De igen ... A gondola!” – „Kapaszkodjunk a hálóba! Tengerbe a gondolával!” ... és a léggömb, tartós süllyedés után, most egyszerre kétezer láb magasba szökkent. (Verne Gyula, Rejtelmes sziget, 1874)

Amint azt a $\delta = \frac{\varepsilon}{q}$ választás mutatja, minden kontrakció automatikusan folytonos.

2.21. Tétel Egzisztencia, unicitás, iterációs közelítő módszer konvergenciabecsléssel
 Legyen $f: X \rightarrow X$ kontrakció az (X, d) teljes metrikus téren (például egy $(B, \|\cdot\|_B)$ Banach tér zárt részhalmazán, amelyet a normából származtatott $d(x, \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|_B$ metrikával látunk el).

Ekkor az $x = f(x)$ egyenletnek pontosan egy, x^* -al jelölt megoldása van, továbbá tetszőleges $x_0 \in X$ pontból indulva, az $x_{k+1} = f(x_k)$, $k \in \mathbb{N}$ iterációs sorozat x^* -hoz tart,

$$d(x_k, x^*) \leq \frac{q^k}{1-q} d(x_0, x_1) \quad , \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.5)$$

konvergencia-becsléssel.

2.22. Következmény (A kontrakciós fixponttétel folytatása: folytonos függés) Legyenek (X, d) teljes metrikus tér, $f, \tilde{f}: X \rightarrow X$ kontrakciók a $q < 1$ konstanssal, rendre x^* és \tilde{x}^* fixpontokkal. Tegyük fel, hogy

$$d(f(x), \tilde{f}(x)) \leq \varepsilon \quad \text{minden } x \in X \text{ esetén.}$$

Ekkor

$$d(x^*, \tilde{x}^*) \leq \frac{\varepsilon}{1-q}.$$

Bizonyítás. A háromszögegyenlőtlenséget, majd a kontrakció definícióját alkalmazva

$$d(x^*, \tilde{x}^*) = d(f(x^*), \tilde{f}(\tilde{x}^*)) \leq d(f(x^*), f(\tilde{x}^*)) + d(f(\tilde{x}^*), \tilde{f}(\tilde{x}^*))$$

$$\Rightarrow d(x^*, \tilde{x}^*) \leq q \cdot d(x^*, \tilde{x}^*) + \varepsilon,$$

amelyből az egyszerű átrendezés és $d(x^*, \tilde{x}^*)$ átosztás utáni kifejezése pontosan azt adja, amit bizonyítani akartunk. Q.E.D.¹⁸ □

A parciális differenciálegyenletek fájdalmasan hiányoznak a fenti táblázatból. A parciális egyenletek körében csak bizonyos feladattípusoknak (lineáris elliptikus, lineáris

¹⁸A matematikusok nagyon büszkék erre a három betűre: *quod erat demonstrandum*, szó szerint „ami bizonyítandó volt”. Nagy kár, hogy a régi Műegyetemen használatos Q.E.F. és Q.E.I. — *quod erat faciendum* és *quod erat inveniendum* (facere = tenni, csinálni — venire = jönni → invenció) — rövidítések kimentek a divatból. Mintha a klasszikus okosság egyedül a „valamit bebizonyítani” képessége lenne. Figyelemreméltó, hogy a német markánsan megkülönbözteti az elméleti *wissen* tudást és a gyakorlati *können* képességet: a magyar fordítás mindkét esetben a „tudni”. Arisztotelész szerint ami az elmélet *theoria* és a gyakorlat *praxis* között van, az költészet *poesis* (Vittorio Hösle, *Praktische Philosophie in der modernen Welt*, C.H.Beck Verlag, München 1992). Gyönyörűen mondja az angol, *clever with his/her fingers*. A matematikus mestersége is — ugyanúgy mint az asztalosé, az esztergályosé, a virágkötőé vagy a gyógytornászé — jelentős részben kézügyesség dolga.

parabolikus, lineáris hiperbolikus) van átfogó elmélete. A nemlineáris parciális egyenletek körében szinte már az egyes példaosztályoknak is külön elméletük van, amelyekhez — általános elvek ide vagy oda — más és más, speciális numerikus megoldási módszerek tartoznak. A korrekt kitűzöttség sokféleképpen teljesülhet, leginkább L_2 jellegű függvényterekben. Szerencsére sokszor elegendő csak speciális megoldásokat (utazó hullámok, radiálisan szimmetrikus megoldások etc.) keresnünk. A nem-matematikai vagy nem-teljesen matematikai intuíció alapvető fontosságú. A természet meg szokta oldani a saját egyenleteit.

A 2.3. Példa előtt említett Peano féle egzisztenciátétel szokásos bizonyítása azt is kiadja, hogy közösleges differenciálegyenletek esetében a „folytonos függés” már az „egzisztencia plusz unicitás” tulajdonságból is következik.

2.23. Megjegyzés *Időről időre mérnökként is, matematikusként is találkozunk nem-korrekt kitűzésű feladatokkal. Ezek fontos feladatok, de itt és most nem foglalkozunk velük.*

A kiindulási helyzetet nem tudjuk sem pontosan mérni, sem pontosan beállítani. A legtöbb esetben magát a megoldandó egyenletet sem ismerjük pontosan, hiszen a benne szereplő konstansok is mérésből származnak. Fontos tehát, hogy közeli egyenletek megoldása (véges idő alatt) közel maradjon és az is, hogy konkrét becslést tudjunk adni erre a közelségre.

Differenciálegyenletekről lévén szó, a valódi f függvény és a valódi x_0 kezdeti állapot helyett pusztán azok g és y_0 közelítéseit tudjuk meghatározni. Ugyanakkor tisztában vagyunk azzal, hogy a mérések során legfeljebb mekkora hibát követhettünk el.

2.24. Tétel *Tekintsük az*

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} \quad \text{és az} \quad \left. \begin{array}{l} \dot{y} = g(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right\}$$

kezdetiérték-feladatokat, ahol az f a g függvények eleget tesznek a 2.1. Tétel feltételeinek. A megoldások legyenek $x(t) = x_{t_0, x_0}(t)$ és $y(t) = y_{t_0, y_0}(t)$.

Legyenek $\Delta, T, \varepsilon > 0$ olyan állandók, amelyekre

$$|x_0 - y_0| \leq \Delta,$$

$$|f(t, z) - g(t, z)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad \forall z \in \mathbb{R}^d.$$

Ekkor

$$|x(t) - y(t)| \leq (\Delta + \varepsilon T)e^{LT} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Bizonyítás. A bizonyítás szellemes, ugyanakkor viszonylag egyszerű számolás. Az

$$\int_a^b h'(s) ds = h(b) - h(a) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\int_a^t h'(s) ds \right) = h'(t)$$

Newton–Leibniz formula alapján a differenciálegyenletekről integrálegyenletekre áttérve:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t g(s, y(s)) ds \end{aligned} \right\} -$$

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_{t_0}^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s)) + f(s, y(s)) - g(s, y(s))) ds,$$

majd ebből (2.1) és a másik két feltételi egyenlőtlenségek felhasználásával

$$|x(t) - y(t)| \leq \Delta + \int_{t_0}^t (L|x(s) - y(s)| + \varepsilon) ds \leq \Delta + L \int_{t_0}^t |x(s) - y(s)| ds + \varepsilon T$$

adódik. Bevezetve a $\rho(t) = |x(t) - y(t)|$, $t \in [t_0, t_0 + T]$ jelölést, az eddigi végeredmény:

$$\rho(t) \leq \Delta + \varepsilon T + L \int_{t_0}^t \rho(s) ds. \quad (2.6)$$

Most jön az igazi ötlet. Átosztva a jobb oldallal, majd $\frac{L}{L}$ -el bővítve azt látjuk, hogy a bal oldalon a számlálóban a nevező deriváltja áll:

$$\frac{1}{L} \frac{L\rho(t)}{\Delta + \varepsilon T + L \int_{t_0}^t \rho(s) ds} \leq 1.$$

Felidézve az $\int \frac{h'}{h} = \ln(h)$ (ha $h > 0$) azonosságot és mindkét oldalt t szerint a t_0 és a $t_0 + T$ határok között integrálva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \ln \left(\Delta + \varepsilon T + L \int_{t_0}^t \rho(s) ds \right) \Big|_{t_0}^{t_0+T} &\leq \int_{t_0}^{t_0+T} 1 dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{L} \ln \frac{\Delta + \varepsilon T + L \int_{t_0}^{t_0+T} \rho(s) ds}{\Delta + \varepsilon T} &\leq T \\ \Leftrightarrow \Delta + \varepsilon T + L \int_{t_0}^{t_0+T} \rho(s) ds &\leq (\Delta + \varepsilon T) e^{LT}. \end{aligned}$$

Most újra leírjuk a már bizonyított (2.6) egyenlőtlenséget

$$|x(t) - y(t)| \leq \rho(t) \leq \Delta + \varepsilon T + L \int_{t_0}^t \rho(s) ds,$$

amelynek jobb oldalán az integrálás felső határát ($\rho(s) \geq 0$ miatt) t -ről $t_0 + T$ -ra növelhetjük. Csodák csodája, így pontosan az eggyel korábbi egyenlőtlenség bal oldala adódik. Tehát

$$|x(t) - y(t)| \leq \Delta + \varepsilon T + L \int_{t_0}^{t_0+T} \rho(s) ds \leq (\Delta + \varepsilon T) e^{LT} \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T],$$

amit bizonyítani akartunk. □

2.25. Megjegyzés A bizonyítás második részét önálló kijelentés formájában is meg szokták fogalmazni. Ez a nevezetes Gronwall Lemma:

$$0 \leq \rho(t) \leq C + L \int_0^t \rho(s) ds \quad \forall t \in [0, T] \quad \Rightarrow \quad \rho(t) \leq Ce^{Lt} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Itt $T > 0$, $\rho: [0, T] \rightarrow [0, T]$ folytonos függvény, $C, L \geq 0$ pedig konstansok.

A teljes általánosság szintjén az előző Tételben igazolt egyenlőtlenség érdemben nem javítható. (Ugyanez igaz a Gronwall lemmára is.)

2.26. Példa Tekintsük az $\dot{x} = Lx$, $x_0 = 0$ és az $\dot{y} = Ly$, $y_0 = \Delta$ kezdetiérték-feladatokat. Ekkor $x(t) = 0$ és $y(t) = \Delta e^{Lt}$ (valamint $t_0 = 0$, $\varepsilon = 0$).

Hasonlóképpen, tekintsük az $\dot{x} = 0$, $x_0 = 0$ és az $\dot{y} = \varepsilon$, $y_0 = \Delta$ kezdetiérték-feladatokat. Ekkor $x(t) = 0$ és $y(t) = \Delta + \varepsilon t$ (valamint $t_0 = 0$, $L = 0$).

Most áttérünk az ugyanabból a kezdeti értékből indított pontos és diszkretizált megoldás közelségének vizsgálatára.

Az egyszerűség kedvéért mostantól kezdve az $\dot{x} = f(x)$ autonóm esetre szorítkozunk, de rögtön az általános p -edrendű egylépéses módszerekkel kezdünk. Továbbra is feltesszük, hogy az f függvény eleget tesz a (2.3) vagy legalább a (2.1) egyenlőtlenségnek.

2.27. Definíció Legyen $p > 0$ egész szám és $h_0 > 0$. A $\phi: [0, h_0] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés p -edrendű egylépéses diszkretizációs operátor az $\dot{x} = f(x)$ egyenletre, ha alkalmas $K = K(f) > 0$ konstanssal

$$|\Phi(h, x) - \phi(h, x)| \leq Kh^{p+1} \quad \forall h \in [0, h_0] \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

A diszkretizációs operátor iterálása a módszer maga:

$$x_k = \phi^k(h, x_0) \quad \Leftrightarrow \quad x_{k+1} = \phi(h, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Természetesen azzal a feltevéssel élünk, hogy az f függvény x körüli lokális viselkedése és a h lépésköz ismeretében $\phi(h, x)$ ténylegesen és hatékonyan kiszámítható.

Az elsőrendű módszereket leszámítva a számítógép a diszkretizált megoldást ténylegesen meghatározó véges x_0, x_1, \dots, x_N pontsorozatot nem töröttvonallal, hanem egymáshoz simán csatlakozó polinomdarabkákból álló ún. Bézier-spline-okkal kapcsolja össze: így a számítógép képernyőjén egy, a pontos megoldást (reményeink szerint jól) közelítő görbe jelenik meg.

Felső becslés a közelítés hibájára N lépés után:

2.28. Tétel *Tetszőleges p -edrendű egylépéses módszerre, a $[0, T]$ intervallumot N egyenlő részre osztva, a $h = \frac{T}{N}$ választással:*

$$|\phi^k(h, x) - \Phi(kh, x)| \leq \frac{K}{L} e^{LT} h^p \quad \forall h \in (0, h_0] \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Itt L a (2.3) egyenlőtlenségbeli ℓ állandót is jelölheti, amennyiben ez utóbbi is nagyobb mint nulla.

Bizonyítás. Jelölje $H_k = |x_k - \Phi(kh, x_0)|$ a közelítő és a pontos megoldás hibáját k lépés után. A 'legyező-ábra' indukciós „globális hiba a $(k+1)$ -ik lépés után” \leq „lokális hiba a $(k+1)$ -ik lépésben” + „a k -adik globális hiba felnagyódása h idő alatt” elve szerint, a háromszög- majd a (2.4) egyenlőtlenséget használva:

$$\begin{aligned} H_{k+1} &= |x_{k+1} - \Phi((k+1)h, x_0)| \leq |x_{k+1} - \Phi(h, x_k)| + |\Phi(h, x_k) - \Phi((k+1)h, x_0)| \\ &= |\phi(h, x_k) - \Phi(h, x_k)| + |\Phi(h, x_k) - \Phi(h, \Phi(kh, x_0))| \leq Kh^{p+1} + e^{Lh} |x_k - \Phi(kh, x_0)|, \end{aligned}$$

azaz $H_{k+1} \leq Kh^{p+1} + e^{Lh} H_k$. Kaptunk tehát egy rekurziót a hibára:

$$H_{k+1} \leq \alpha H_k + \beta, \quad k = 0, 1, \dots, N \quad \text{ahol} \quad H_0 = 0, \quad \alpha = e^{Lh}, \quad \beta = Kh^{p+1}$$

Ez ugyanaz az előírás, mint ami a véges mértani sor összegét definiálja. Ezért

$$\begin{aligned} H_k &\leq H_N \leq \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1} \beta = \frac{e^{LNh} - 1}{e^{Lh} - 1} Kh^{p+1} \\ \Rightarrow H_k &\leq \frac{e^{LNh}}{1 + Lh + \frac{1}{2}(Lh)^2 + \dots - 1} Kh^{p+1} \leq \frac{K}{L} e^{LT} h^p, \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad \square \end{aligned}$$

Összefoglaljuk a lényegét. A közönséges differenciálegyenletek pontos megoldása — amennyiben véges hosszúságú időintervallumra vonatkozik — a kezdeti kicsiny mérési hibákat nem tudja túlságosan felnövesztetni. Ugyanez igaz (amennyiben a diszkrétizációs lépésközt elegendően kicsinynek választhatjuk) a numerikus-közelítő megoldásokra is. A hibánövekedés általában az idő exponenciális függvénye. A digitális számítógépekben elkerülhetetlen számábrázolási és kerekítési hibák külön megfontolásokat igényelnek.

2.4. Közönséges differenciálegyenletek diszkretizációi

Talán meglepő, hogy a diszkretizációk részletes tárgyalását egy szélsőérték-feladattal kezdjük. Legyen a feladat

$$F(x) \rightarrow \min \quad \text{ahol } F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{adott } C^2 \text{ függvény.}$$

A globális minimum létezését az

$$F(x) \rightarrow \infty \quad \text{ha } |x| \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

feltétellel szokás garantálni.

Mintha egy felületre esne az eső, kövessük a legördülő cseppek útját, azaz vizsgáljuk az

$$\dot{x} = -F'(x) \quad \text{más jelöléssel az } \dot{x} = -(\text{grad}F(x))^T, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (2.9)$$

differenciálegyenletet, egy $x(0) = x_0$ kezdeti feltétellel. Mivel lokálisan így mindig a legerősebb lejtés irányába megyünk, azt reméljük, aszimptotikusan minimumhelyhez jutunk. Ha a (2.9) egyenletre az explicit Euler módszert változó lépésközzel alkalmazzuk, a jólismert gradiens módszert kapjuk:

$$x_1 = x_0 - h_0 F'(x_0), \quad x_2 = x_1 - h_1 F'(x_1), \quad \dots, \quad x_{n+1} = x_n - h_n F'(x_n), \quad \dots$$

Az egymás utáni $h_n > 0$ lépésközöket optimumkereséssel, az

$$f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \rightarrow f_n(h) = F(x_n - hF'(x_n))$$

egyváltozós, „gradiens-menti” $f_n(h) \rightarrow \min$ szélsőérték-feladatok megoldása révén kaphatjuk meg. Ez az eljárás szép lassan a minimumhelyek egyikéhez szokott konvergálni (Vegyük észre, hogy a (2.9) egyenletre nézve F egyúttal Ljapunov függvény is. Ha menet közben történetesen $F'(x_n) = 0$ adódik valamely n -re, akkor nyeregpontra, vagy minimumhelyre érkeztünk.) Az igazi — és teljes általánosságban kezelhetetlenül nehéz — problémát persze az jelenti, hogyan kezeljük a lokális minimumhelyeket: valamiféle heurisztikával időről időre „ki kell ugranunk” a lokális „gödrökből”.¹⁹ Az abszolút

¹⁹Az elmélet csak az erősen konvex esetre teljes. (Az $F: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 függvény erősen konvex, ha az $F''(x)$ Hesse-mátrix minden $x \in \mathbb{R}^d$ esetén pozitív definit.) Ha a (2.8) feltétel is teljesül, akkor egyetlen minimumhely létezik, és a gradiens-módszer konvergens. A részletes elemzés azonban kimutatja, hogy a $v_n \in \mathbb{R}^d$ úgynevezett keresési irányok abszolút természetesnek tűnő $v_n = -F'(x_n)$ választása összességében alaposan lelassítja a konvergenciát: a mohóság megbosszulja magát. Ami be szokott válni, az a kicsivel általánosabb alakú

$$x_1 = x_0 - h_0 v_0, \quad x_2 = x_1 - h_1 v_1, \quad \dots, \quad x_{n+1} = x_n - h_n v_n, \quad \dots$$

módszer, ahol a $\{v_n\}_n$ sorozat megválasztása a hagyományos gradiens-módszer és egy ortogonalizációs jellegű eljárás kombinációja.

minimumhely meghatározása már a $d = 1$ esetben is lehet roppant nehéz: ez a helyzet többek között Wilkinson²⁰ „spiky” polinomjainak esetében.

Mindezt azért bocsájtottuk előre, hogy könnyebb legyen elfogadni, miért igényel a számítógépes gyakorlat az általános alakú $\dot{x} = f(x)$ és $\dot{x} = f(t, x)$ differenciálegyenletek megoldásához is hibrid–heurisztikus módszereket. Ha a számolások „élesben” mennek, akkor az alkalmazott diszkretizációs módszer kiválasztása erősen függ a feladat típusától, és szinte elengedhetetlen a változó lépésköz használata. A MATLAB beépített programjai is (heurisztikus, „ha nagy a kanyar, lassíts” [azaz vedd kisebbre a lépésközt] jellegű lokális optimalizálási elvek alapján) automatikusan változtatják a lépésközt.

Kevésbé éles számításokban elegendő a diszkretizáció lépésközét állandónak venni. Az egyes módszereket is állandó lépésköz–választással mutatjuk be.

1.) *Explicit Euler módszer:* (immár többedszer)

Az $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ kezdetiérték–problémánál maradva az $x(t)$ pályagörbe $x(0)$ pontbeli érintőegyenese az

$$x(0) + t\dot{x}(0) = x_0 + tf(x_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

paraméteres alakban adható meg. Egy kis ideig, mondjuk a $t \in [0, h]$ időintervallumon, a pályagörbét közelíthetjük az érintővel. Az eljárás a $[h, 2h]$ időintervallumon, most már a $x_1 = x_0 + hf(x_0)$ pontból indulva, megismételhető. Így a $t_k = kh$ időpontokhoz és az

$$x(kh) = \Phi(kh, x_0) \quad \text{pontokat közelítő} \quad x_0 \quad \text{és} \quad x_{k+1} = x_k + hf(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

rekurzióhoz, pontosabban az $\{x_k = \phi_E^k(x_0)\}_{k=0}^\infty$ pontokat sorrendben összekötő szakasz-sorozathoz, az úgynevezett Euler–féle töröttvonalhoz jutunk. Az érintő egyenes a pályagörbét másodrendben közelíti, tehát a lokális hibabecslés minden egyes x_k töréspontban

$$|\Phi(h, x_k) - \phi_E(h, x_k)| \leq Kh^2, \quad \text{ahol a } K \text{ konstans független a } h\text{-tól és az } x_k\text{-tól.}$$

A lokális hibák együttes felnagyítódása (error amplification) a 2.28. Tétel bizonyításában leírt egyszerű lineáris rekurzió szerint történik. A $[0, T]$ intervallumot N egyenlő részre osztva (a $h = \frac{T}{N}$ lépésköz–választással) a globális hiba $e^{LT}h$ nagyságrendű (általános p -edrendű eljárásnál pedig $e^{LT}h^p$).

Az eljárás $h \rightarrow 0$ melletti konvergenciáját legegyszerűbb az $\dot{x} = x$, $x(0) = 1$ kezdetiérték–feladaton bemutatni. A $[0, T]$ intervallumot ismételtelen N egyenlő részre osztva, tehát a $h = \frac{T}{N}$ választással

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + h, \quad x_2 = (1 + h) + h(1 + h), \quad \dots, \quad x_N = (1 + h)^N \rightarrow e^T \quad N \rightarrow \infty$$

esetén, ami az $x(t) = e^t$ pontos megoldás $T = Nh$ -ban felvett értéke.

2.) *Implicit Euler módszer:* (rekurzív és operátoros alakban is)

²⁰Speaking for myself I regard it as the most traumatic experience in my career as a numerical analyst.

2.29. Definíció Az $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ kezdetiérték-feladat $h \in (0, h_0]$ lépésközzel vett implicit Euler közelítő megoldása az

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots$$

rekurzió által meghatározott $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$ töröttvonal. Implicit Euler módszer alatt magát az $X = x + hf(X)$ formula által meghatározott $X = \phi_I(h, x)$ eljárást értjük. Az explicit Euler módszerhez hasonlóan az implicit Euler módszer is elsőrendű, azaz

$$|\Phi(h, x_k) - \phi_I(h, x_k)| \leq Kh^2, \quad \text{ahol a } K \text{ konstans független a } h\text{-tól és az } x_k\text{-től. (2.10)}$$

Az implicit Euler módszer végrehajtása az x utáni X töréspont (vagy ha úgy tetszik, az x_k utáni x_{k+1} töréspont) kiszámítását igényli. Az $X = x + hf(X)$ egyenletből X helyett ténylegesen csak az

$$X_0 = x, \quad X_1 = x + hf(X_0), \quad X_2 = x + hf(X_1), \quad \dots, \quad X_{n+1} = x + hf(X_n), \quad \dots$$

iteráció-sorozat értékeit tudjuk meghatározni. Szerencsére az X_0, X_1, X_2, \dots sorozat az

$$|X_n - \phi_I(h, x)| \leq \text{const} \cdot h^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

hibabecsléssel konvergál az $X = x + hf(X)$ egyenlet $X = \phi_I(h, x)$ pontos megoldásához, így az x utáni X töréspont $\phi_I(h, x)$ helyett egyszerűen X_5 -nek vehető, és az absztrakt (2.10) egyenlőtlenség helyett a lényegében ugyanolyan jó, de már a tényleges számolásokra érvényes

$$|\Phi(h, x) - X_5| \leq |\Phi(h, x) - \phi_I(h, x)| + |\phi_I(h, x) - X_5| \leq Kh^2 + \text{const} \cdot h^6$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

2.30. Megjegyzés A MÖGÖTTES MATEMATIKA A KONTRAKCIÓS ELV

Az implicit Euler módszer definíciója csak akkor lehet értelmes, ha az $X = x + hf(X)$ egyenlet (elegendően kicsiny h esetén) az X ismeretlenre megoldható, éspedig egyértelműen oldható meg. Ez valóban így van, sőt $0 < h \ll 1$ esetén az $X = x + hf(X)$ egyenlet jobb oldala az \mathbb{R}^d téren kontrakciót határoz meg: a

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{h,x} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad X \rightarrow x + hf(X)$$

leképezés kontrakció, hiszen a Lipschitz feltétel miatt igaz rá az

$$|\mathcal{K}(X) - \mathcal{K}(\tilde{X})| = h|f(X) - f(\tilde{X})| \leq hL|X - \tilde{X}| \quad \forall h \in (0, h_0] \quad \forall X, \tilde{X} \in \mathbb{R}^d$$

egyenlőtlenség, ahol $hL=q < 1$ (elegendően kicsiny h_0 például a $h_0 = \frac{1}{2hL}$ választás esetén). A (2.11) hibabecslés a kontrakatív leképezések fixpont-iterációira²¹ vonatkozó általános (2.5) konvergencia-becslés következménye, amely most az

$$|X_{n+1} - X^*| \leq |X_1 - X_0| \frac{q^n}{1-q}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

alakot ölti, az $X^* = \phi_I(h, X)$, $|X_1 - X_0| \leq Kh^2$ szereposztással.

Mindaz, amit az implicit Euler módszerről elmondtunk, ugyanúgy érvényes implicit Runge–Kutta módszerekre is: a mögöttes matematika a kontrakciós fixponttételen alapul. A b_i , $i = 1, 2, \dots, r$ és az a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, r$ konstansok megválasztása nehéz kombinatorikus feladat, amelyben a numerikus integrálás formulái sokat segítenek. A sokezer Runge–Kutta módszer közül mindössze egy-két tucatot használunk, amelyek a célfeladatok kvantitatív és kvalitatív tulajdonságaihoz vannak hozzáillesztve.

3.) Runge–Kutta módszercsalád: (a 2.27. Definíció mintájára)

2.31. Definíció Az $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ kezdetiérték-feladat $h \in (0, h_0]$ lépésközzel vett r alappontú p -edrendű Runge–Kutta diszkretizációs operátora minden olyan $\phi_{RK}: [0, h_0] \times \mathbb{R}^d, x \rightarrow X = \phi_{RK}(h, x)$ leképezés, amelyre az f függvénytől és magától a módszertől is függő $K = K(f) > 0$ konstanssal teljesül az

$$|\Phi(h, x) - \phi_{RK}(h, x)| \leq Kh^{p+1} \quad \forall h \in [0, h_0] \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

egyenlőtlenség, s amelyet az

$$X = x + h \sum_{i=1}^r b_i z_i, \quad \text{ahol } z_i = f \left(x + h \sum_{j=1}^r a_{ij} z_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

összefüggések szerint a b_i , $i = 1, 2, \dots, r$ és az a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, r$ alkalmasan megválasztott valós számok határoznak meg. A Runge–Kutta módszercsalád a hétköznapi gyakorlatban használt egylépéses módszerek szinte mindegyikét tartalmazza.

Egy Runge–Kutta módszer pontosan akkor explicit²² ha $a_{ij} = 0 \quad \forall j \geq i, i, j = 1, 2, \dots, r$.

²¹Bárhonnan is indítjuk az $X_{n+1} = \mathcal{K}(X_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ iterációt, az a (teljes metrikus téren értelmezett) \mathcal{K} kontrakatív leképezés egyetlen, X^* -al jelölt fixpontjához, az $X = \mathcal{K}(X)$ egyenlet egyetlen X^* megoldásához konvergál.

²²az elnevezés arra utal, hogy a (z_1, z_2, \dots, z_r) vektor a koordinátánkénti természetes sorrendben az

$$z_i = f \left(x + h \sum_{j=1}^r a_{ij} z_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

egyenletrendszer által explicit meghatározott. Az általános esetben ezt az egyenletrendszert (amelynek jobb oldala $0 < h \ll 1$ esetén az $\mathbb{R}^{rd} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d$ (r -tényezős) szorzattéren kontrakciót határoz meg) az implicit Euler módszer mintájára iterációval kell megoldanunk

2.32. Példa A.) Mindkét Euler módszer (speciálisan választott) elsőrendű Runge–Kutta módszer.

B.) Az $X = x + h(\theta f(x) + (1 - \theta)f(X)) \Rightarrow \phi_\theta(h, x)$ formula által meghatározott módszer a $\theta = \frac{1}{2}$ esetben másodrendű, minden más esetben elsőrendű. (Feltesszük, hogy $0 \leq \theta \leq 1$.)

A bizonyítás roppant tanulságos, és rávilágít a magasabbrendű módszerek titkára.

$$\Phi(0, x) = x, \quad \Phi'_h(h, x) = f(\Phi(h, x)) \Rightarrow \Phi'_h(0, x) = f(x),$$

$$\Phi''_{hh}(h, x) = f'(\Phi(h, x)) \cdot \Phi'_h(h, x) \Rightarrow \Phi''_{hh}(0, x) = [f'(x)]f(x).$$

A 2.27. Definíció egy legalább p -edrendű módszertől pontosan azt követeli meg, hogy

$$\Phi(0, x) = \phi(0, x), \quad \Phi'_h(0, x) = \phi'_h(0, x), \quad \dots, \quad \Phi_h^{(p)}(0, x) = \phi_h^{(p)}(0, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

legyen: mindez a Taylor polinomok együtthatói összehasonlításának következménye (amely p függvényében exponenciálisan növekvő számú és típusú összeadandó páronkénti egyezését igényli — az összes Runge–Kutta módszer meghatározásához kombinatorikus robbanás kellene átvergődnünk: ennek megfelelően nagy p -kre csak néhány speciális Runge–Kutta családot ismerünk.)

A pontos megoldás h szerinti nulladik, első, és második deriváltját a $(0, x)$ pontban szerencsére könnyű volt kiszámítanunk. Ugyanezt tehetjük-tesszük a diszkrétizált megoldásra is, implicit deriválásokkal.

$$\phi(h, x) = x + h(\theta f(x) + (1 - \theta)f(\phi(h, x))) \Rightarrow \phi(0, x) = x,$$

$$\phi'_h(h, x) = (\theta f(x) + (1 - \theta)f(\phi(h, x))) + h(1 - \theta)[f'(\phi(h, x))]\phi'_h(h, x)$$

$$\Rightarrow \phi'_h(0, x) = f(x) \quad \text{és} \quad \phi''_{hh}(h, x) = 2(1 - \theta)[f'(\phi(h, x))]\phi'_h(h, x)$$

$$+ h((1 - \theta)[f''(\phi(h, x))](\phi'_h(h, x), \phi'_h(h, x)) + [f'(\phi(h, x))]\phi''_{hh}(h, x))$$

$$\Rightarrow \phi''_{hh}(0, x) = 2(1 - \theta)[f'(x)]f(x) \quad (\text{ahol } [\cdot] \text{ lineáris/bilineáris operátor})$$

és készen is vagyunk. Mindezek igazak az $X = x + hf(\theta x + (1 - \theta)X)$ módszer családra is. Vegyük észre, hogy $\theta = 0$ az implicit, $\theta = 1$ az explicit Euler módszer.

C.) Leggyakrabban a negyedrendű explicit Runge–Kutta módszert használjuk, ahol $p = r = 4$ és

$$b_1 = b_4 = \frac{1}{6}, \quad b_2 = b_3 = \frac{1}{3}, \quad a_{21} = a_{32} = \frac{1}{2}, \quad a_{43} = 1 \quad (\text{a többi zérus}).$$

D.) A MATLAB ODE45 módszere egy negyed- és egy ötödrendű explicit Runge–Kutta módszer Dormand–Prince féle (egylépéses, explicit, 7-alappontú) kombinációja.

Ha az ODE45 túlon túl lassúnak bizonyul, akkor a MATLAB álmoskönyv szerint másodikként az ODE15s módszerrel kell megpróbálkozni. Az ODE15s *változó rendű több-lépéses módszer* (amikor is a soronkövetkező x_{n+1} ($n = 0, 1, 2, \dots$) értéket az m — ahol $1 \leq m \leq 5$ — számú korábbi $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n+1-m}$ értékből ($n+1-m \geq 0$) az

$$x_{n+1} + a_{m,m-1}x_n + a_{m,m-2}x_{n-1} + \dots + a_{m,1}x_{n+2-m} + a_{m,0}x_{n+1-m} = hb_{m,m}f(x_{n+1})$$

implicit összefüggés alapján kell meghatározni (backward difference formulas — $m = 1$, $a_{1,0} = -1$, $b_{1,1} = 1$ esetén az implicit Euler módszert kapjuk vissza), amelynek belső interpolációs és extrapolációs *heurisztikai nem nyilvánosak* és az sem kizárt, hogy időről időre finomítják őket. Világos, hogy állandó h lépésköz esetén x_{n+1} a $\Phi((n+1)h, x_0)$ értékét közelíti. Ha a lépésközök rendre h_k , $k = 1, 2, \dots$, akkor x_{n+1} a $\Phi(h_1 + \dots + h_{n+1}, x_0)$ értékét közelíti. Az ODE15s módszerrel ellentétben az ODE45 módszer *nyilvános forráskódú*.

Egyelőre nem értjük, mi szükség van nem-explicit módszerekre? A kérdés logikus, hiszen az érintőegyenest-darabka által meghatározott explicit Euler módszer helyett vehetnénk az érintőparabola-darabka által meghatározott általánosabb módszert is, amely természetesen másodrendű módszer etc. ad infinitum.

A válasz az, hogy már az explicit Euler módszer sem mindig szerencsés választás — létezik olyan, egészen gyakorlatias szempont, amely az implicit Euler módszert az explicit Euler módszer fölé rendeli. Az implicit Euler módszer előnye az, hogy — ellentétben az explicit Euler módszerrel — aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzetek közelében még nagy lépésköz esetén is jól viselkedik.

2.33. Megjegyzés DISZKRETIZÁCIÓ STABIL EGYENSÚLYI HELYZETEK KÖRNYEZETÉBEN NAGY LÉPÉSKÖZZEL

Alkalmazzuk mind az explicit, mind az implicit Euler módszert az

$$\dot{x} = -ax \quad \text{és} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$$

kezdetiérték-feladatra, ahol $a \gg 1$ paraméter. A pontos megoldás $x(t) = e^{-at}x_0$, és persze $x(t) \rightarrow 0$ ha $t \rightarrow \infty$. Könnyen adódik, hogy $n = 0, 1, 2, \dots$ esetén

$$x_1 = x_0 + h(-ax_0) = (1 - ah)x_0, \dots \Rightarrow x_n = \phi_E^n(h, x_0) = (1 - ah)^n x_0,$$

$$x_1 = x_0 + h(-ax_1) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{1 + ha}x_0, \dots \Rightarrow x_n = \phi_I^n(h, x_0) = \frac{1}{(1 + ha)^n}x_0.$$

Tehát $\phi_I^n(h, x_0) \rightarrow 0$ minden $h > 0$ esetén. Ezzel szemben $n \rightarrow \infty$ mellett $\phi_E^n(h, x_0) \rightarrow 0$ pontosan akkor ha $0 < h < \frac{2}{a}$ (tehát minél nagyobb az a , azaz minél gyorsabban konvergál a pontos megoldás a 0-hoz, az explicit Euler módszer annál jobban követeli meg a megengedett maximális lépésköz csökkentését (!!)). Ez fehéren-feketen azt jelenti, hogy az explicit Euler módszer, mint nem célszerűen sőt itt és most helytelenül megválasztott numerikus eljárás még roppant kicsiny lépésköz esetén is — egészen pontosan amikor $1 - ah < -1$ — egyre növekvő oszcillációkat okozhat. És mindezt éppen akkor (!!), amikor a valódi dinamika aszimptotikus stabilitása minden korábbinál erősebbé válik.

Magasabb dimenzióban ugyanez a kapcsolat az $\dot{x} = -Ax$ és $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$ kezdetiérték-feladat pontos és diszkretizált megoldásai között:

$$\Phi(t, x_0) = e^{-At}x_0, \quad \phi_E^n(h, x_0) = (I - Ah)^n x_0, \quad \phi_I^n(h, x_0) = (I + Ah)^{-n} x_0,$$

$$\text{és az } a \text{ szerepét játszó sajátértékek } e^{-\lambda_j t}, (1 - \lambda_j h)^n, (1 + h\lambda_j)^{-n}.$$

Számítógépes implementációkban (persze ez beállítás kérdése is) — a *MATLAB* összes ODE kódja ilyen — a lépésköz nem állandó, hanem lépésről lépésre változik. Az *adaptív lépésköz-szabályozás* a következő heurisztikus megfontoláson alapul: „Ha az aktuálisan számolt megoldás éppen erősen kezd görbülni, akkor az eddigi lépésközt felezni, ha pedig éppen gyengén kezd görbülni, akkor duplázni kell. Ha nagyjából ugyanúgy görbül mint korábban, akkor nem kell változtatni rajta.” Az ODE45 esetében a számolás maga egy negyedrendű Runge–Kutta módszerrel történik, de a görbülés aktuális tendenciáját egy beágyazott ötödrendű Runge–Kutta módszer két egymásutáni, az előző lépésköz felével történő alkalmazása határozza meg.

A lépésközt már csak azért sem szabad mindig kicsinek illetve túlságosan kicsinek választani, mert akkor az adott $[0, T]$ intervallum befutásához szükséges lépések száma túlonként megnő. Ez pedig a kerekítési és számábrázolási hibák „worst-case” eseteiben²³ (amikor is a \pm kerekítési hibák mindig ugyanabba az irányba rontanak az eredményen) nagyjából a lépésszámmal, tehát az $\frac{T}{h}$ -val arányos megnövekedéséhez vezet. Így, ismét csak a „worst-case” esetben, a 2.28. Tétel alapján

$$\text{az összhiba nagyságrendje a } [0, T] \text{ intervallumon } \leq \tau \frac{T}{h} + e^{LT} h^p,$$

ahol τ a számábrázolási–kerekítési hibák lépésenkénti maximuma. Ez Scylla és Charybdis kettős fenyegetése (a hatfejű tengeri szörny és az örvény között kell elhajózni: a lépésköz nem lehet sem túl nagy, sem túl kicsi) — pozitív megfogalmazásban, a „trade-off” szükséges és lehetséges volta.

A számítógépes gyakorlatban a sokezer Runge–Kutta módszerből egy tucat az, amit ténylegesen használunk. (És ugyanannyi többlelépéses módszert.) A módszer helyes megválasztása a célfeladat függvénye. Kis túlzással azt mondhatjuk, *minden egyes feladatnak-feladattípusnak megvan a saját numerikus módszere* és talán egy szép napon a saját számítógép-architektúrája is meglesz. Vannak olyan Runge–Kutta eljárások (nem is túlságosan bonyolultak), amelyek a fizika legkülönfélébb megmaradó mennyiségeit (pld. impulzus–momentum) legalábbis elvben pontosan megőrzik. Sajnos az energiával nem ez a helyzet. Olyan módszer, amelyik csak kicsit is általános egyenletosztályokra *pontosan* megőrizné az energiát, nem létezik.

²³A statisztikai hiba-analízis módszerei az összhiba lényegesen kisebb, de nem garantált (és csak nagy valószínűséggel igaz) felső becsléseihez vezetnek.

2.5. Árnyékok és szellemek a numerikában

2.5.1. Elemi példák valódi és hamis periodikus megoldásokra

A most következő megfontolások az 1.4. Példa és az 1.5. Példa folytatásai. Továbbra is a $d=2$ körszimmetrikus esetről maradva kimutatjuk, hogy kritikus, „billenékeny” dinamika esetén a diszkretizáció kicsiny lépésközzel sem biztos, hogy jól adja vissza a periodikus megoldásokat. Mindez a (numerikus) Hopf bifurkáció fogalmát is előkészíti.

Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases} \quad (2.12)$$

rendszer a síkon, ahol $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter. Az eredeti differenciálegyenlet-rendszer a polárkoordinátákra történő áttérésnél két, egymástól független differenciálegyenletre esik szét. A megoldások viselkedése is a polárkoordinátás alakból érthető meg, sőt maga a fázisportré is könnyen felrajzolható a forgási szimmetria miatt. Egyedül arra kell figyelni, hogy mi történik az origótól vett távolsággal, azaz az \dot{r} előjelével. Ha $\dot{r} > 0$, akkor az origótól vett távolság nő, ha $\dot{r} < 0$, akkor csökken.

Mindez akkor is igaz, ha (2.12) helyett a nála általánosabb

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y + x f(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \dot{y} &= -x + y f(\sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{r} = r f(r) \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases} \quad (2.13)$$

differenciálegyenlet-rendszert vizsgáljuk, ahol $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Az $f(r) = 0$ egyenlet $r = r_0 > 0$ gyökei periodikus pályákat jelentenek — egészen pontosan azt, hogy az origó centrumú és az r_0 sugarú körvonal periodikus pálya: a periodikus megoldás paraméteres egyenletrendszere pedig (ha a $t_0 = 0$ időponthoz éppen a körvonalnak az x tengely pozitív felével való metszéspontját rendeljük hozzá):

$$\left. \begin{aligned} p(t) &= r_0 \\ \varphi(t) &= -t \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = r_0 \cos(t) \\ y(t) = -r_0 \sin(t) \end{cases}$$

Az $r f(r) = 0$ egyenlet triviális $r_0 = 0$ gyöke az origónak, mint egyensúlyi helyzetnek felel meg.

Az f függvény $r_0 > 0$ körüli viselkedése az r_0 sugarú kör mint periodikus pálya vonzási és taszítási tulajdonságait is meghatározza:

$$\left. \begin{aligned} r_0 - \eta_0 < r < r_0 &\Rightarrow f(r) > 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{r} = r f(r) > 0) \\ r_0 < r < r_0 + \eta_0 &\Rightarrow f(r) < 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{r} = r f(r) < 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{vonzás és stabilitás,}$$

$$\left. \begin{aligned} r_0 - \eta_0 < r < r_0 &\Rightarrow f(r) < 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{r} = r f(r) < 0) \\ r_0 < r < r_0 + \eta_0 &\Rightarrow f(r) > 0 \quad (\Leftrightarrow \dot{r} = r f(r) > 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{taszítás és instabilitás.}$$

A teljesség kedvéért vázoljuk a polárkoordinátás alakra való áttérés menetét. A jólismert

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\varphi) \end{array} \right\} \text{transzformációs szabályt az} \quad \left. \begin{array}{l} x(t) = r(t) \cos(\varphi(t)) \\ y(t) = r(t) \sin(\varphi(t)) \end{array} \right\}$$

formában a megoldás, mint egy differenciálegyenlet-rendszerből adódó paraméteres görbe minden pontjára egyszerre alkalmazva,

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = y + x f(r) \\ \dot{y} = -x + y f(r) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} \cos(\varphi) - r \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = r \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) f(r) \\ \dot{r} \sin(\varphi) + r \cos(\varphi) \cdot \dot{\varphi} = -r \cos(\varphi) + r \sin(\varphi) f(r) \end{array} \right.$$

adódik. Itt az első egyenletet $\cos(\varphi)$ -vel, a másodikat $\sin(\varphi)$ -vel szorozzuk és a kapott eredményeket összeadjuk. (Ezek a számolási lépések felelnek meg az egyenletrendszer belső szimmetriáinak is.) Az eredmény $\dot{r} = r f(r)$. A $\dot{\varphi} = -1$ egyenletet visszahelyettesítéssel kapjuk.

Most visszatérünk az $f(r) = \mu - r^2$ speciális esethez. Az esetszétválasztásokat tehát a $\mu r - r^3 = r(\mu - r^2)$ kifejezés előjele határozza meg.

- ha $\mu \leq 0$, akkor $r(\mu - r^2) < 0$ minden $r > 0$ mellett. Az összes megoldás $t \rightarrow \infty$ esetén egymáshoz is egyre közeledve a koordinátarendszer középpontjához tart: tehát az origó globálisan aszimptotikusan stabil.
- ha $\mu < 0$, akkor $r(\mu - r^2) > 0$ minden $0 < r = r_0 = \sqrt{\mu}$ esetén és $r(\mu - r^2) < 0$ minden $r > r_0 = \sqrt{\mu}$ esetén: az origó taszít, és az összes többi megoldást az $r(\mu - r^2) = 0$ egyenlet $r_0 = \sqrt{\mu}$ gyökének megfelelő periodikus pálya vonzza.

Most alkalmazzuk az explicit Euler módszert a (2.12) egyenletre:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \mu x_k + y_k - x_k(x_k^2 + y_k^2) \\ -x_k + \mu y_k - y_k(x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A forgási szimmetriának megfelelően, direkt kapcsolatot keresünk $R^2 = X^2 + Y^2$ és $r^2 = x^2 + y^2$ között. Négyzetre emelés és összeadás után

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= ((1 + h\mu)x + h(y - xr^2))^2 + ((1 + h\mu)y + h(-x - yr^2))^2, \\ R^2 &= (1 + h\mu)^2 r^2 + 2h(1 + h\mu)(xy - x^2 r^2 - xy - y^2 r^2) + h^2(y^2 + x^2 r^4 + x^2 + y^2 r^4), \\ R^2 &= (1 + h\mu)^2 r^2 - 2h(1 + h\mu)r^4 + h^2(r^2 + r^6) \end{aligned} \tag{2.14}$$

adódik. A (2.12) egyenlet explicit Euler módszer által indukált diszkrétizált dinamikájában az $R = r$ egyenlet pontosan olyan szerepet játszik, mint az $\mu r - r^3 = 0$ egyenlet a folytonos idejű dinamikában. Mivel most $R = r \Leftrightarrow R^2 = r^2$, az

$$r^2 = (1 + h\mu)^2 r^2 - 2h(1 + h\mu)r^4 + h^2(r^2 + r^6)$$

egyenlet $r = r_0(h) > 0$ gyökei a sík invariáns köreinek felelnek meg, olyan (origó centrumú, $r_0(h)$ sugarú) köröknek, amelyeket a $\phi_E(h, \cdot): \binom{x}{y} \rightarrow \binom{X}{Y}$ leképezés változatlanul hagy. Az egyszerűsítések után az r^2 változóra a

$$hr^4 - 2(1 + h\mu)r^2 + 2\mu + h\mu^2 + h = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amelynek gyökei (az $(1+a)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^k$, $|a| < 1$ binomiális sorfejtés első tagjait is felhasználva)

$$(r_0^2(h))_{1,2} = \frac{1 + h\mu \pm \sqrt{1 - h^2}}{h} = \frac{1 + h\mu \pm (1 - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{8}h^4 + \dots)}{h}$$

$$\Leftrightarrow (r_0(h))_1 = \sqrt{\frac{2}{h} + \mu + \dots} \quad \text{és} \quad (r_0(h))_2 = \sqrt{\mu + \frac{1}{2}h + \dots}$$

Az első gyök olyan, az explicit Euler módszer $\phi_E(h, \cdot): \binom{x}{y} \rightarrow \binom{X}{Y}$ diszkrétizációs lépésére nézve olyan (a végtelen távoli pontból, mint idealizált egyensúlyi helyzetből lefűződő) invariáns körnek felel meg, amelyet nem lehet kapcsolatba hozni a (2.12) differenciálegyenlet-rendszer egyetlen periodikus megoldásával sem: ez tehát *szellem*, nem pedig *árnyék* (hiszen csak a számítógép produkálta, a valóságban nem létezik: szokás *parazita* (spurious) megoldásnak is nevezni). A második gyök *árnyék*, hiszen $\phi_E(h, \cdot) \sqrt{\mu + \frac{1}{2}h + \dots} \approx \sqrt{\mu}$ sugarú invariáns köre „mögött ott áll” a (2.12) differenciálegyenlet-rendszer megoldó-operátorának egy valóságosan létező és amúgy pontosan $\sqrt{\mu}$ sugarú periodikus megoldása. Azt látjuk tehát, hogy a (2.12) egyenlet numerikus megoldásában a h lépésköz mint diszkrétizációs paraméter összeolvad az eredeti μ paraméterrel: a periodikus pálya nem a $\mu > \mu_{crit} = 0$ értékekre jelenik meg, hanem a $\mu > \mu_{numcrit, explEuler} = -\frac{1}{2}h$ (illetve a $\mu > \mu_{numcrit, implEuler} = \frac{1}{2}h$) értékekre. Ezzel együtt a paraméterezett egyenletcsalád egészének viselkedése a diszkrétizáció során nem változik: az origó a paraméter növekedésével — egy, a $\mu_{crit} = 0$ paraméterértékhez közeli (de a numerikus módszer megválasztásától függő) $\mu_{numcrit}$ paraméterértéknél — elveszti stabilitását, a stabilitás egy invariáns körvonalra tevődik át.

Másodjára a (2.13) egyenletet vizsgáljuk. Az explicit Euler módszer most (2.14) helyett az

$$R^2 = r^2 + 2hr^2 f(r) + h^2(r^2 + r^2 f^2(r)) \quad (2.15)$$

összefüggésre vezet. Tehát $R = r \Leftrightarrow hf^2(r) + 2f(r) + h = 0$ és $f(r)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - h^2}}{h}$. Kicsiny h értékekre ismét a binomiális sorfejtés szerint (ha a „szellem”-körökre nem vagyunk

kíváncsiak) az

$$f(r) = -\frac{1}{2}h + \dots$$

egyenletet kapjuk. Azt reméljük, hogy az $f(r) = 0$ egyenlet minden r_0 megoldásának megfelel az $f(r) = -\frac{1}{2}h$ egyenlet egy megoldása, legalábbis ha $0 < h \ll 1$. Ha $f'(r_0) \neq 0$ (azaz amikor az f függvény grafikonja az r_0 pontban szög alatt metszi a vízszintes tengelyt), akkor valóban ez a helyzet. Az eredeti dinamika esetén periodikus megoldásainak a (kicsiny lépésközzel) diszkrétizált dinamikában valóban van „árnyéka”, egy $r_0(h)$ sugarú invariáns kör, amikor is $r_0(h)$ közel van r_0 -hoz. Ha azonban r_0 körül az f függvény $f(r) = (r - r_0)^2$ alakú, akkor az $f(r) = -\frac{1}{2}h$ egyenletnek nincsen r_0 -hoz közeli megoldása. A diszkrétizációban az eredeti dinamika r_0 sugarú periodikus pályája egyszerűen elveszett. Ez kemény. Sőt van még rosszabb is. Ha az explicit Euler módszer helyett az implicit Euler módszerrel diszkrétizálunk²⁴, akkor a kérdéses r_0 sugarú periodikus pályának két különböző árnyéka van, az $f(r) = \frac{1}{2}h$ egyenlet kettő darab r_0 -hoz közeli megoldásának megfelelő invariáns körök.

De azt is kell látnunk, hogy az elvesző/megduplázódó periodikus pálya vonzási tulajdonságai degeneráltak voltak: belülről vonzott, kifelé taszított (hiszen r_0 egy kis környezetében $\dot{r} = r(r - r_0)^2 > 0$ ha $r \neq r_0$).

2.5.2. Kerekítési/számábrázolási hibák: strukturált következmény

Azt gondolná az ember, hogy numerikus hibák mindig zaj jellegűek. Vannak esetek, amikor ez nem így van, amikor a számábrázolási és kerekítési hibák hihetőnek tűnő, de teljességgel hamis struktúrához vezetnek. Közülük talán a leghíresebb az a példa, amelyet Trefethen bálnájaként szoktak emlegetni. A *Trefethen bálna* a növekvő méretű Trefethen mátrixok sajátértékei által meghatározott rajzolat a komplex síkon. A Trefethen mátrixok komplex elemű sávmátrixok, ahol a főátlóban csupa zérus áll. A nemzérus elemek a főátló melletti 4-4 mellékátlóban helyezkednek el: a főátló feletti négy mellékátlóban rendre 1,

²⁴az implicit Euler módszer (2.15) helyett az $r^2 = R^2 - 2hR^2 f(R) + h^2(R^2 + R^2 f^2(R))$

$$\text{és így az } R = r \Rightarrow hf^2(r) + 2f(r) + h = 0 \Rightarrow (f(r))_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - h^2}}{h}$$

összefüggésekre vezet

i , $3+2i$ és -1 , a főátló alatti négy mellékátlóban pedig rendre 10 , $3+i$, 4 és i áll.

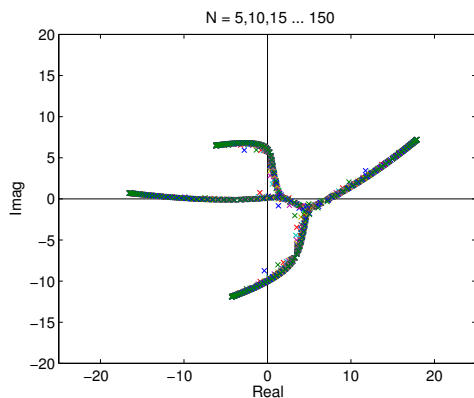
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i & 3+2i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & i & 3+2i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3+i & 10 & 0 & 1 & i & 3+2i & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3+i & 10 & 0 & 1 & i & 3+2i & -1 & 0 & 0 \\ i & 4 & 3+i & 10 & 0 & 1 & i & 3+2i & -1 & 0 \\ 0 & i & 4 & 3+i & 10 & 0 & 1 & i & 3+2i & -1 \\ 0 & 0 & i & 4 & 3+i & 10 & 0 & 1 & i & 3+2i \\ 0 & 0 & 0 & i & 4 & 3+i & 10 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 4 & 3+i & 10 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 4 & 3+i & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

A 10×10 méretű T_{10} Trefethen mátrix mintájára a $\{T_n\}_{n=9}^{\infty}$ Trefethen mátrixok mind-egyikét könnyű elképzelnünk. A számítógépes MATLAB szimulációk **még tizenöt éve is azt mutatták**, hogy a T_n mátrix sajátértékeinek n pontból álló $\sigma(T_n)$ halmaza növekvő n mellett (elenyészően kevés számú zavaró sajátértéket leszámítva) egyre jobb és jobb közelítéssel egy, az

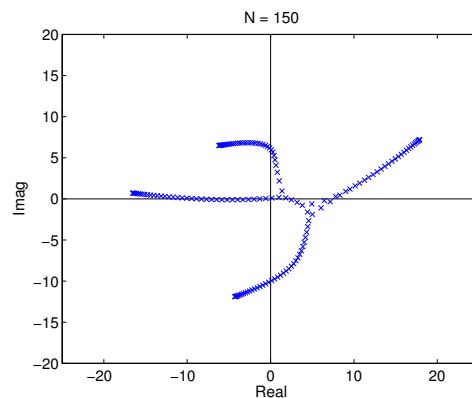
$$\{x+iy \in \mathbb{C} \mid -10 < x < 15, -15 < y < 15\}$$

téglalap jó részét körülhatároló egyszerű zárt görbéhez tartott (praktikusan valamennyi $300 \leq n \leq 500$ értékre megegyezett vele), amely bálnaként gyerekkönyv-illusztrációnak is bevált volna. A vidám behemót balról jobbra úszott, fejét a vízből magasán kiemelve, kétágú farokuszonyát éppen csapásra lendítve. Moby Dick lett volna, a Fehér Bálna, Herman Melville gyerekek számára átírt (hogy a történetnek jó vége legyen) remekművének lapjairól? A MATLAB **legfrissebb változata sokat módosult a tizenöt évvel korábbihoz képest**. A bálna feje még szépen megvan, de a farka már csökevényes: a negatív valós részű sajátértékek pontosságát illetően nagyobb a a MATLAB erősödése/javulása, mint a pozitív valós részű sajátértékekre.

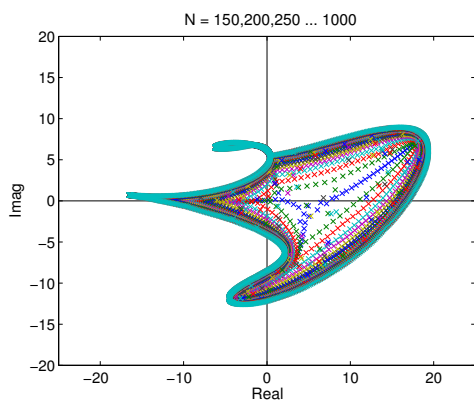
2.34. Megjegyzés Trefethen bálnája egyáltalán nem létezik. A sajátértékek $\sigma(T_n)$ halmazainak tényleges — matematikailag bizonyított — $n \rightarrow \infty$ határhelyzete enyhén görbített éllel síkba-rajzolt, hat csúcspontú fa-gráf. A 2.2. Ábra (a) és (b) részén a kérdéses fa-gráf a bálna stilizált csontvázaként jól megfigyelhető. Jóllehet a 2.2. Ábra (d) részének „legkülső”, az $n = 4000$ értékhez tartozó bálna-rajzolata (amelynek elkészítése húsz percig tartott) erősen függ a mögöttes sajátérték-kereső számítógépes program finom részleteitől (belső tolerancia-beállítások, az egyes változók bit hosszúsága etc.), a virtuálisan létező bálna is bizonyos értelemben stabil. Az absztrakt matematika pontosan meg tudja indokolni a bálna mint szellem létezését. A részletes indoklás A. Böttcher és B. Silbermann Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices (Springer, Berlin, 1998) könyvének mintegy felét teszi ki.



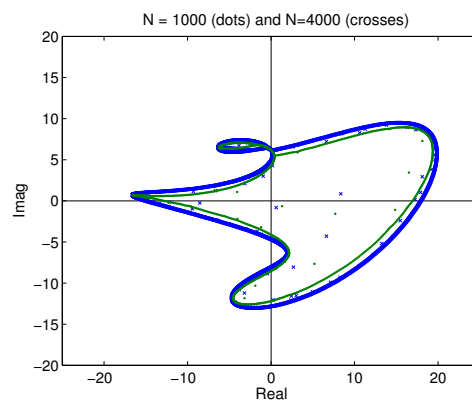
(a) $n = 5$ -től ötösével $n = 150$ -ig



(b) $n = 150$



(c) $n = 150$ -től ötvenesével $n = 1000$ -ig



(d) $n = 1000$ és $n = 4000$

2.2. ábra. Trefethen bálnája a MATLAB 2013-as verziója szerinti állapotban. A tizenöt évvel ezelőtti Trefethen bálna bekerült a numerikus csodalények „Vörös Könyvébe”: reprodukciójához a MATLAB tizenöt évvel korábbi változata szükséges. Emlékeztetünk a 2.34. Megjegyzés előtti bekezdés végére. Az egyes részábrák aláírásában n a megfelelő Trefethen mátrixok rendjét jelenti

A számítógép által kreált hamis/parazita (spurious) megoldások léte már a hatvanas években is komolyan foglalkoztatta a hazai mérnök-kutatókat, jelesen az építőmérnök Hegedűs Istvánt és a villamosmérnök Roska Tamást (és bizonyára másokat is). Ha az egyes változók különböző bit hosszúságúak, akkor „kevesebb a hamis attraktor” — ez az építőmérnök Domokos Gábor és a matematikus Szász Domokos egy viszonylag friss, közös eredménye. Érdeemes megemlítenünk Haller György és Stépán Gábor gépészmérnökök egy korábbi dolgozatát is, a diszkrétizációs közelítések által okozott mikrokaosz témakörében.

2.5.3. Intervallumos programozás

A hiba-analízisnek természetesen létezik statisztikai elmélete. Ez a jegyzet nem tér ki a hibák sztochasztikus zajként történő kezelésére, csupán implicit módon ismertet worst-case típusú becsléseket, amikor számítógéppel segített bizonyításokról beszél. Minden számítógépes programnak van olyan változata, amely nem pontszerű számokkal, hanem intervallumokkal dolgozik. Az intervallumok határpontjai a számítógép elektronikája által pontosan reprezentálható (diadikus racionális) számok. Ha a bemenő adatok $x \in [1,2]$ és $y \in [3,4]$, akkor az alapműveletek eredményei

$$x \in [1,2] \text{ és } y \in [3,4] \Rightarrow \begin{cases} x+y \in [4,6] \\ x-y \in [-3, -1] \\ xy \in [3,8] \\ \frac{x}{y} \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}], \end{cases}$$

ahol a $\frac{2}{3}$ szám az IEEE szabvány szerinti kifelé kerekítéssel, mint nála picivel nagyobb diadikus racionális szám nyer ábrázolást. Az alapműveletekhez hasonlóan az elemi függvényeknek is vannak intervallumos változatai: ha $[x] \subset \mathbb{R}$ intervallum, akkor $\text{SIN}([x])$ a

$$z \in [x] \Rightarrow \sin(z) \in \text{SIN}([x]) \quad \forall z$$

feltételnek megfelelő intervallum. És így tovább ... minden, valós számokkal dolgozó programnak létezik intervallumos változata. A futási idő hossza nagyjából ötvenszeresére nő meg ezáltal. Cserébe viszont garantáltan pontos eredményt kapunk, intervallumos formában, a tényleges eredményre biztosan igaz alsó és felső becslésekkel. Az intervallumos programozás a *számítógéppel segített bizonyítások az analízisben* (computer-assisted proofs in analysis) alapmódszere: a kifejtett káosz létezésének matematikai bizonyítására máig sincsen hatékonyabb módszer ennél. (Léteznek olyan globális bifurkációk, amelyek hirtelen, ugrásszerűen vezetnek káoszhoz: a Chua-kör matematikai modelljének kaotikusságát ezekre a „káoszba taszító” paraméterekre így bizonyították.) A szokásos káosz-indikátorok pld. a λ_{Ljap} maximális Ljapunov-exponens pozitív volta a konkrét esetekben csak valószínűsíteni tudja a káosz létezését.²⁵

Számítógéppel segített bizonyítások természetesen az algebrában és a kombinatorikában (például a négyszínsejtésre adott Appel-Haken bizonyítás) is léteznek. Ezek a bizonyítások az egész értékű programozás és számábrázolás keretén belül maradnak.

²⁵Ha egy feladat (nem egész típusú számokkal történő) számítógépi számításokat igényel, akkor a teljes matematikai szigorúsághoz az összhiba worst-case analízisére van szükség: az intervallumos programozás ezt a feladatot is a számítógépre bízta. Számos mérnöki feladat is van, amelyben a lehetséges maximális hiba nagyságát pontosan kell ismerni: repülőgépgyártás (R.E. Moore, aki az első intervallumos programot írta, a Boeing gyár mérnöke volt — nem tévesztendő össze G.E. Moore-ral, aki az Intel alapítójának egyike, és akiről a Moore törvényt elnevezték), atomenergetikai ipar, petrolkémiai ipar — a különösen veszélyes üzemek és gyártmányok világa.

Ebben a tág összefüggésrendszerben szeretnénk megemlíteni az NP-teljes optimalizációs algoritmusok valószínűségszámítási elméletét, ahol a tipikus eredmény a következő: az n kiindulási adatmennyiség (valamilyen eloszlás szerinti) $100 - \varepsilon$ százalékában az algoritmus $p_{\delta,\varepsilon}(n)$ (polinom) lépésben a δ hibahatárral eléri az optimumot. Azt azonban, hogy egy konkrét kiindulási adat- n -esre az algoritmus hogyan viselkedik (adott esetben exponenciálisan hosszú is lehet), azt általában nem tudhatjuk. A lineáris programozás szimplex algoritmusával ugyanez a helyzet.

A nagyméretű, konkrét feladatok jól bevisznek minket a málnásba.

2.5.4. Jóslási időhorizont és Ljapunov exponens

Ha a λ_{Ljap} Ljapunov exponens pozitív, akkor az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet közeli trajektóriái — nemcsak a (2.4) felső becslésben, hanem a valóságban is — egymástól exponenciális gyorsasággal távolodhatnak. Mindez a kiindulási adatok $\Delta > 0$ hibájánál sokkal jobban korlátozza kiszámíthatóságot. Ha a $[0, T]$ időintervallum $T > 0$ végpontjában legfeljebb $\varepsilon > 0$ hibát engedünk meg, akkor a

$$\Delta e^{\lambda_{Ljap} T} \approx \varepsilon \quad \Rightarrow \quad T \approx \frac{1}{\lambda_{Ljap}} \ln\left(\frac{\varepsilon}{\Delta}\right)$$

összefüggésnél jobbat nem kaphatunk. Ez a *jóslási időhorizont*, amin túl minden szimulációs eredmény jó eséllyel már csak szellem.

Ha például — Strogatz példája a *Nonlinear dynamics and chaos* (Perseus Books, Cambridge, MA) könyvből — $\varepsilon = 10^{-3}$ és $\Delta = 10^{-7}$, akkor $T \approx \frac{1}{\lambda_{Ljap}} 4 \ln(10)$. Ha most a kezdeti értékeket valami csoda folytán $\Delta = 10^{-7}$ helyett $\Delta = 10^{-13}$ hibával sikerül meghatározunk, akkor $T \approx \frac{1}{\lambda_{Ljap}} 10 \ln(10)$. A Ljapunov exponens tényleges értéke ide vagy oda, azt látjuk, hogy a kezdeti állapotra vonatkozó mérési hibahatár egymilliomodrészre történő, $10^{-7} \rightarrow 10^{-13}$ megváltoztatása a jóslási időhorizontot mindössze két és félszeresére növeli.

Többek között ezért lehetetlen, hogy a várható időjárást 4–5 nappal hosszabb távlatban valaha is (belátható időn belül) nagy biztonsággal meg lehessen jóslni.

2.5.5. Az árnyékolási (shadowing) lemma

Az eddigi óvatosságra intő megjegyzések után most egy megnyugtató eredményt ismeretünk.

Legyen $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^d$ a 2.43. Definíció szerinti kompakt attraktora az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenletnek, $A(M)$ vonzási tartománnyal. Tegyük fel továbbá, hogy az M halmaz tisztességesen kaotikus — a maximális Ljapunov exponens fogalmát is ebben a kontextusban vezettük be.

Legyen x_0 az $A(M)$ egy tetszőleges, számítógépünk aritmetikájában ábrázolható pontja, és tekintsünk azt az \mathbb{R}^d -beli $x_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots$ pontsorozatot, amelyet a számítógép az $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ kezdetiérték-probléma közelítő megoldásaként produkál. Az alkalmazott ϕ diszkretizációs módszer a számítógépen adaptív lépésköz-szabályozással fut, mi csak a maximális h_0 lépésközt írhatjuk elő. Amit ténylegesen kapunk, az az $\tilde{x}_0 = x_0$,

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{\phi}(\mu, h_{k+1}, \tilde{x}_k) \quad \text{pontsorozat, } k = 0, 1, 2, \dots$$

ahol μ a számábrázolás aktuális pontossága (working precision), h_1, h_2, \dots pedig a lépésközök sorozata.

Ekkor igaz a következő állítás (amelyet csak azért nem fogalmazunk meg tételként, mert a tisztességes kaotikusság feltételeit abszolút biztonsággal szinte soha nem lehet ellenőrizni): Tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $\mu^* > 0$, $h^* > 0$ és olyan $x^* \in \mathbb{R}^d$, továbbá olyan $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ időpont-sorozat, hogy $0 < \mu \leq \mu^*$ és $0 < h_0 \leq h^*$ mellett

$$t_k < t_{k+1} < t_k + 2h_0 \quad \text{és} \quad |\tilde{x}_k - \Phi(t_k, x^*)| < \varepsilon, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Nem a szemünk káprázik, valóban ez a helyzet. A számítógép olyan közelítő megoldást produkál, amely előre adott $\varepsilon > 0$ hibával megegyezik egy valódi, pontos megoldással. Csakhogy ez a valódi, pontos megoldás nem az $x(0) = x_0$ kezdeti értékből indul ki, hanem egy ahhoz közeli x^* kezdeti értékből, amely mentén — éppen úgy, mint a topologikus ekvivalencia fogalmát bevezető 2.63. Definícióban — az időt át kell paraméterezni. Világos módon t_k ($k > 0$) és $\sum_1^k h_j$ a pontos, illetve a közelítő dinamikában eltelt időt mérik. A teljes eredmény azt jelenti, hogy a tisztességesen kaotikus esetben minden egyes konkrétan kiszámolt trajektória árnyék, nem pedig szellem.

Mindez arra utal, hogy a káosznak vannak számunkra előnyös, a gyakorlatban felhasználható tulajdonságai is. Közülük az úgynevezett *káosz kontroll* lehetősége a legfontosabb. Pontosan a kezdeti feltételektől való érzékeny függés miatt (és mert a periodikus megoldások egy tisztességes kaotikus attraktoron belül sűrű halmazt alkotnak) van mód arra, hogy leheletfinom, adaptív, a dinamikát nem-autonómmá tevő beavatkozásokkal a rendszert kivezessük a káoszból és egy számunkra sokkal kedvezőbb periodikus állapotba vigyük. Az eljárás jól bevált a Naprendszer távoli bolygói felé küldött űrszondák irányításában, s egy szép napon valószínűleg a szívritmus-szabályozó készülékek működésében is — a biológia által engedett határokon belül — teljes biztonsággal lesz használható.

2.6. A dinamika Bolzano–Weierstrass típusú tételei

Az ebben az az alfejezetben felsorolt fogalmak és tételek sűrűsége első pillantásra ugyan csak bosszantó. Időt kell rájuk szánni, le kell rajzolni őket. Megéri!!

A fázisportré-elemzés, a nem- vagy nem-teljesen lokális fázisportré meghatározás alapvető szempontjairól van szó.

Kivétel nélkül minden egyes itt következő tétel mögött tettenérhetők Bolzano és Weierstrass tételei, valamint a *determináns mint* előjeles *térfogat* megfeleltetés, amelyekre — ha meghitt viszonyban nem is vagyunk velük — mégiscsak illik emlékeznie kinek-kinek, saját képességei is elszántsága szerint. A sorozatokról szóló Bolzano és Weierstrass tételekben az indexeket most az idő múlása definiálja (a torlódási pontok halmazának az omega-határhalmaz fogalma felel meg: a korlátos mozgásoknak kell hogy célhalmazuk legyen!), a folytonos függvényekről szóló Bolzano és Weierstrass tétel pedig most az idő függvényeként meghatározott trajektóriákra kell alkalmazni vagy magára a megoldó-operátorra (egyszerre több trajektóriára, trajektóriák egész családjára). A stabilitás és a vonzás a végtelen távoli időpontban értelmezett folytonossági és konvergencia-tulajdonságok. A csapdahalmazról szóló tétel őseként — sikerül felismerünk benne a Cantor féle metszettételt?

A Brouwer féle fixponttétellel más a helyzet: jóllehet végső elemzésben ez is Bolzano típusú tétel²⁶, de más, kombinatorikus és algebrai forrásai is vannak és összességében legalább egy emelettel nehezebb, mint az alfejezet többi tétele.

2.35. Definíció *Az $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pont egyensúlyi helyzete az $\dot{x} = f(x)$ autonóm differenciálegyenletnek, ha $f(x_0) = 0$. Az egyensúlyi helyzet kifejezést használjuk a $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ megoldó-operátorra, sőt tetszőleges folytonos idejű dinamikára nézve is. Az (X, d) metrikus tér egy x_0 pontja a $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ folytonos idejű dinamikus rendszer egyensúlyi helyzete, ha $\Phi(t, x_0) = x_0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén. Ha az idő diszkrét, akkor az egyensúlyi helyzet kifejezés nem használatos. Helyette azt mondjuk, hogy $x^* \in X$ az $F : X \rightarrow X$ leképezés fixpontja, ha $x^* = F(x^*)$.*

2.36. Definíció *A periodikus pont elnevezést egyszerre használjuk folytonos és diszkrét idejű dinamikus rendszerek esetén. A $p_0 \in X$ pont periodikus pontja a $\Phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ dinamikus rendszernek és $\tau_0 \in \mathbb{T}$, $\tau_0 > 0$ a minimális periódus ideje, ha $\Phi(\tau_0, p_0) = p_0$ és minden $\tau \in \mathbb{T}$, $0 < \tau < \tau_0$ esetén $\Phi(\tau, p_0) \neq p_0$. A minimális periódus egész számú többszörösei maguk is periódusidők. A periodikus ponton átmenő trajektória alatt a*

$$\Gamma = \{ \Phi(t, p_0) \in X \mid t \in \mathbb{T} \} = \{ \Phi(t, p_0) \in X \mid t \in \mathbb{T}, 0 \leq t \leq \tau_0 \}$$

halmazt értjük, amelynek rövid neve periodikus pálya. Periodikus pálya minden pontja maga is periodikus pont. Ha $X = \mathbb{R}^d$ és a dinamikus rendszer az $\dot{x} = f(x)$ autonóm

²⁶Érthető az „intervallum folytonos képe intervallum” és az „összefüggő halmaz folytonos képe összefüggő” tételek általánosításaként

differenciálegyenlet megoldó-operátora, akkor a $p(t) = \Phi(t, p_0)$ képlettel definiált $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvény periodikus megoldás. Ez utóbbit szokás az

$$\dot{p} = f(p) \quad \text{és} \quad p(\tau_0) = p(0) \quad \Leftrightarrow \quad p(t + \tau_0) = p(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

képletekkel is definiálni. A $\tau_0 > 0$ állandó itt is a minimális periódusidőt jelenti.

2.37. Definíció Legyen (X, d) metrikus tér. A $H \subset X$ halmaz a $\Phi: \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ dinamikus rendszerre nézve invariáns, ha tetszőleges $x \in H$ esetén $\Phi(t, x) \in H \quad \forall t \in \mathbb{T}$. A $H \subset X$ halmaz pozitíven invariáns, ha tetszőleges $x \in H$ esetén $\Phi(t, x) \in H \quad \forall t \in \mathbb{T}^+$.

Egyetlen pontból álló invariáns halmaz kizárólag egyensúlyi helyzet vagy fixpont lehet, attól függően, hogy az idő folytonos vagy diszkrét. (Érdemes visszalapozni a 2.10. Definíció előtti diszkusszióhoz.)

2.38. Definíció Az $x \in X$ ponton átmenő trajektória alatt a

$$\gamma(x) = \{ \Phi(t, x) \in X \mid t \in \mathbb{T} \}$$

halmazt értjük. Az $x \in X$ pontból induló pozitív féltrajektória a

$$\gamma^+(x) = \{ \Phi(t, x) \in X \mid t \in \mathbb{T}^+ \}$$

halmaz. Az $x \in X$ pont omega-határhalmaza az

$$\omega(x) = \{ y \in X \mid \text{van olyan } \{t_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{T} \text{ sorozat, hogy } t_n \rightarrow \infty \text{ és } \Phi(t_n, x) \rightarrow y \}$$

halmaz. A $\gamma^-(x)$ negatív féltrajektória és az $\alpha(x)$ alfa-határhalmaz definíciója a fentiekkel analóg módon történik. (Történik ...? Aki az eddigieket kellő figyelemmel olvasta, képes rá. Tegye is meg.)

Az omega-határhalmazokra vonatkozó tételek közül először a híres-nevezetes Poincaré-Bendixson tételt mondjuk ki, amely az utána következő két másik tétellel együtt alapvető fontosságú az \mathbb{R}^2 síkon értelmezett autonóm differenciálegyenletek fázisportréinak vizsgálatában.

2.39. Tétel Legyen $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos idejű dinamikus rendszer és legyen az $x \in \mathbb{R}^2$ pont $\gamma^+(x)$ pozitív féltrajektóriája korlátos halmaz. Tegyük fel még, hogy a $\gamma^+(x)$ pozitív féltrajektória lezárta legfeljebb véges sok egyensúlyi helyzetet tartalmaz. Ekkor az alábbi három eset egyike és pontosan egyike teljesül:

- $\omega(x)$ egyensúlyi helyzet: $\omega(x) = \{x_0\}$
- $\omega(x)$ periodikus pálya: $\omega(x) = \Gamma$

- $\omega(x)$ heteroklinikus kör: $\omega(x) = \{x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{N+1} = x_1\}$,
azaz egyensúlyi helyzetekből és az őket összekötő trajektóriákból álló irányított kör²⁷

2.40. Tétel Legyen $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos idejű dinamikus rendszer, és legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ periodikus pálya. Ekkor Γ a síkot két összefüggő részre bontja és Γ belseje tartalmaz egyensúlyi helyzetet.

Az előző két tétel együttes alkalmazása az $\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0$, $\mu > 0$ alakú Van der Pol egyenletre szinte azonnal kiadja egy legbelső és egy legkülső periodikus megoldás létezését. Valóban, a nemlineáris ellenállás (amint azt az (1.16) és az (1.4) egyenletek $b = -\mu(1-x^2)\dot{x}$ összehasonlítása azonnal mutatja) az $|x| < 1$ esetben energiát visz a rendszerbe és csillapító hatása csak $|x| > 1$ esetén érvényesül. Az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ síkbeli kordináták nyelvén ez azt jelenti, hogy a fázisportrén mind a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ egyensúlyi helyzet, mind a végtelen távoli pont taszít. Mivel az origón kívül más egyensúlyi helyzet nem létezik, az origó mint alfa-határhalmaztól induló trajektóriák egy közös Γ_{lb} , a végtelen távoli ponttól induló trajektóriák pedig egy közös Γ_{lk} periodikus megoldáshoz tartanak, ahol $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{int}(\Gamma_{lb})$ és $\Gamma_{lb} \subset \text{int}(\Gamma_{lk})$. Az 1.3. Tétel bizonyításának legnehezebb része — amint azt közvetlenül utána már jeleztük — a periodikus megoldás $\Gamma_{lb} = \Gamma_{lk}$ unicitásának kimutatása.

2.41. Tétel Tekintsük az $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$ autonóm differenciálegyenletet, ahol $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények. Legyen továbbá $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt görbe és tegyük fel, hogy a γ görbe egyik belső pontjában sem lesz az $f'_x + g'_y$ divergencia zérus, azaz a divergencia előjele a γ görbe $\text{int}(\gamma)$ belsejében vagy mindenütt pozitív vagy mindenütt negatív. Ekkor a $\gamma \cup \text{int}(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$ halmaz nem tartalmazhat periodikus megoldást.²⁸

²⁷amely természetesen önátmetzés nélküli, de lehet például nyolcas' alakú (amelyet a $\gamma^+(x)$ pozitív féltrajektória a nyolcas' által meghatározott külső, nem korlátos tartományban maradván végtelen sokszor jár körül, miközben egyre közelebb és közelebb kerül hozzá. Ez esetben a két belső, korlátos tartomány mindegyike — a nyolcas' szemei', összhangban a következő állítással — tartalmaz egyensúlyi helyzetet.) Az $N=0$ eset is lehetséges, ekkor heteroklinikus kör helyett homoklinikus kört mondunk, amely egyetlen egyensúlyi helyzetből és egy onnan induló és oda visszatérő hurokél-trajektóriából áll.

²⁸Ha létezne $\Gamma \subset \gamma \cup \text{int}(\gamma)$ periodikus megoldás, akkor a $V(0) = \Gamma \cup \text{int}(\Gamma)$ választással egyrészt $V(t) = V(0) \forall t$ az invariancia, másrészt $\frac{d}{dt} \text{mesh}(V(t)) = \int_{V(t)} (f'_x + g'_y) dx dy$ (1.14) miatt, ami a $0 \neq 0$ ellentmondás. Tehát az indirekt $\exists \Gamma$ feltétel nem teljesülhet.

Egyszerű alkalmazásként tekintsük az $\dot{x} = -5x + 4y + x^2$, $\dot{y} = 5x + 3y - 2xy$ rendszert, amelynek $f'_x + g'_y = -5 + 2x + 3 - 2x = -2 < 0$ szerint nem lehet periodikus megoldása. A jobb oldalakat nullával egyenlővé téve, az első egyenletből: $y = \frac{5x-x^2}{4}$, s ebből $35x - 13x^2 + 2x^3 = 0$, amelynek egyetlen valós gyöke $x = 0$, s így $y = 0$. Tehát az origón kívül nincsen más egyensúlyi helyzet. Maga az origó nyeregpont,

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -7 \text{ sajátértékekkel és az } \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ sajátvektorokkal.}$$

A 2.39. Tétel szerint a négy szeparatrix, a két kijövő és a két bemenő trajektória az origót, mint nyeregpontot a végtelen távoli ponttal kötik össze.

2.42. Tétel Legyen $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos idejű dinamikus rendszer. Ha egy $x \in \mathbb{R}^d$ pont $\gamma^+(x)$ pozitív féltrajektóriája korlátos, akkor

- $\omega(x)$ nem-üres, kompakt halmaz
- $\omega(x)$ invariáns halmaz
- $\omega(x)$ összefüggő halmaz
- $t \rightarrow \infty$ esetén $d(\Phi(t, x), \omega(x)) \rightarrow 0$

Általában is, ha $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ folytonos idejű dinamikus rendszer az (X, d) metrikus téren és a $\gamma^+(x)$ pozitív féltrajektória lezárta kompakt halmaz, akkor az $\omega(x)$ omega-határhalmazra a most elmondottak igazak.

2.43. Definíció Legyen (X, d) metrikus tér és legyen az $\emptyset \neq M \subset X$ kompakt halmaz invariáns a $\Phi : \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ dinamikus rendszerre nézve. Az M halmaz stabil, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ hogy } \forall t \in \mathbb{T}, t \geq 0 \text{ és } x \in \mathcal{B}(M, \delta) \text{ esetén } \Phi(t, x) \in \mathcal{B}(M, \varepsilon).$$

Az M halmaz vonzó, ha

$$\exists \eta_0 > 0 \text{ hogy } \forall x \in \mathcal{B}(M, \eta_0) \text{ esetén } d(\Phi(t, x), M) \rightarrow 0^+ \text{ ha } t \rightarrow \infty.$$

Az M (továbbra is nem-üres kompakt invariáns) halmaz aszimptotikusan stabil vagy más néven attraktor, ha egyszerre stabil és vonzó. A (szükségképpen nyílt)

$$A(M) = \{x \in X \mid d(\Phi(t, x), M) \rightarrow 0^+ \text{ ha } t \rightarrow \infty\}$$

halmaz az M attraktor vonzási tartománya, más néven az M attraktor medencéje.²⁹ Az $A(M) = X$ esetben az attraktor globális.

Az $X = \mathbb{R}^d$, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $M = \{x_0\}$ speciális eset különösen fontos.

²⁹Adósak vagyunk még a $d(\Phi(t, x), M)$, valamint a $\mathcal{B}(M, \delta)$, $\mathcal{B}(M, \varepsilon)$, $\mathcal{B}(M, \eta_0)$ jelölések magyarázatával. Az $x \in X$ pont és a $\emptyset \neq M \subset X$ halmaz távolsága a legközelebbi ponttól mért távolság:

$$d(x, M) = \min\{d(x, m) \mid m \in M\}$$

(ha M nem kompakt, akkor a legközelebbi pont általában nem létezik, és a minimum helyébe infimum irandó). Az M halmaz $\varepsilon > 0$ sugarú nyílt környezete, vagy más megfogalmazásban az M középpontú $\varepsilon > 0$ sugarú nyílt gömb

$$\mathcal{B}(M, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, M) < \varepsilon\}$$

— a ball szó (innen a \mathcal{B} kezdőbetű) az angol matematikai nyelvben a tömör gömböt jelenti, míg a sphere jelentése gömbhéj, a disc pedig korongot, lineáris altérben elhelyezkedő tömör gömböt jelent.

2.44. Definíció Legyen az $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pont egyensúlyi helyzete a $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ dinamikus rendszernek. Az x_0 egyensúlyi helyzet stabil, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ hogy } \forall t \in \mathbb{R}, t \geq 0 \text{ és } |x - x_0| < \delta \text{ esetén } |\Phi(t, x) - x_0| < \varepsilon.$$

Az x_0 egyensúlyi helyzet vonzó, ha

$$\exists \eta_0 > 0 \text{ hogy } \forall x \in \mathbb{R}^d, |x - x_0| < \eta_0 \text{ esetén } |\Phi(t, x) - x_0| \rightarrow 0^+ \text{ ha } t \rightarrow \infty.$$

Az x_0 egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil vagy más néven attraktor, ha egyszerre stabil és vonzó. A (szükségképpen nyílt)

$$A(x_0) = \{x \in X \mid |\Phi(t, x) - x_0| \rightarrow 0^+ \text{ ha } t \rightarrow \infty\}$$

halmaz az x_0 egyensúlyi helyzet vonzási tartománya, más néven az x_0 egy pontból álló attraktor medencéje. Az $A(x_0) = \mathbb{R}^d$ esetben az x_0 egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabil. A stabilitás tagadása az instabilitás. A $t \rightarrow -\infty$ vonzás neve taszítás. Taszító egyensúlyi helyzet taszítási (repulzívítási) tartományát $R(x_0)$ jelöli, magát a definíciót az Olvasóra bízjuk.

A stabilitás definíciójában a $\forall t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ követelmény a legfontosabb. A

$$\forall \varepsilon > 0 \forall T > 0 \exists \delta > 0 \text{ hogy } \forall t \in [0, T] \text{ és } |x - x_0| < \delta \text{ esetén } |\Phi(t, x) - x_0| < \varepsilon$$

tulajdonság, mint a Φ dinamikus rendszer folytonosságának következménye, automatikusan teljesül, még az $\dot{x} = x$ egyenlet exponenciálisan taszító $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzetére is.

A stabilitás témájának a tankönyvek többsége külön fejezetet szentel. Mi is ezt tesszük — érdemes előrelapozni a *Matrjosa–babányi dióhéj: Ljapunov függvények* végére —, de magát a fogalmat annak naív s minden mérnök számára ösztönösen is világos tartalma miatt már a jegyzet elejétől kezdve nagy–bátran használni mertük. Az a tény azonban, hogy a stabilitás és a vonzás mindegyike lehetséges a másik nélkül, annak idején számomra is a meglepetés erejével hatott.

2.45. Példa (stabilitás \nRightarrow vonzás) A legegyszerűbb példa az (ohmikus ellenállás nélküli) L – C kör, illetve a súrlódás nélküli rugó (1.9) egyensúlyi állapota. A matematikusok az ilyen típusú, periodikus pályákkal körbevett egyensúlyi helyzeteket centrumnak hívják.

2.46. Példa (vonzás \nRightarrow stabilitás) A klasszikus példa a polárkoordinátás alakban megadott (amelyet a (2.32) formula majd továbbfejleszt)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{r} = r(1 - r) \\ \dot{\varphi} = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{array} \right\} \text{ egyenletrendszer } r = 1, \varphi = 0 \text{ egyensúlyi helyzete,}$$

amely az origó kivételével a teljes sík minden pontját aszimptotikusan magához vonzza. Vonzás stabilitás nélkül csak akkor lehetséges, ha ez a vonzás — szorítkozzunk bár a kérdéses egyensúlyi helyzet bármilyen kis környezetére is — az időben nem egyenletes.

A fázisportré nem-lokális, az egyensúlyi helyzetektől távoli részeinek ábrázolása szempontjából a fejezet legutolsó tétele a legfontosabb. A benne szereplő K halmaz neve *csapdahalmaz*, amelyet általában Ljapunov felületek határolnak.

2.47. Tétel *Legyen $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos idejű dinamikus rendszer. Legyen továbbá $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz, és tegyük fel, hogy $\Phi(t, \partial K) \subset \text{int}(K)$ minden $t > 0$ esetén. Ekkor az egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszeteiként előálló*

$$M = \bigcap \{ \Phi(t, K) \mid t \geq 0 \}$$

halmaz a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- M nem-üres, kompakt halmaz
- M invariáns halmaz
- M összefüggő halmaz
- M attraktor és $K \subset A(M)$
- ha K konvex is, akkor M tartalmaz egyensúlyi helyzetet

Általában is, ha $\Phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ folytonos idejű dinamikus rendszer az (X, d) metrikus téren és a $\gamma^+(x)$ pozitív féltrajektória lezártja kompakt halmaz, akkor az $\omega(x)$ omega-határhalmazra a most elmondottak — a K konvexitásával kapcsolatos félmondat kivételével — igazak.

A most ismertetett eredményekhez sorolható a *LaSalle elv* is, amelyet 2.58. Tételként fogalmazunk majd meg.

A 2.40. Tétel mögött a Jordan görbetétel és a Brouwer féle fixponttétel áll. Ugyancsak a Brouwer féle fixponttétel az oka a 2.47. Tétel K konvexitásával kapcsolatos részének: Ha $K \subset \mathbb{R}^d$ nem-üres, korlátos, konvex és zárt halmaz, akkor minden $f: K \rightarrow K$ folytonos leképezésnek létezik fixpontja. A Brouwer féle fixponttétel nem állít unicitást, és sajnos nem konstruktív: nem lehet rá közvetlen numerikus módszert alapozni.



(a) Globális attraktor és a Sevillai Katedrális homlokzata



(b) „..., mindeneket magamhoz vonzok.” (Jn. 12,32)

2.3. ábra. Omnia traham ad me ipsum

2.7. Linearizálás egyensúlyi helyzetek körül

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a kérdéses egyensúlyi helyzet, ami körül linearizálni szeretnénk, $x_0 = 0$. Legyen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ C^1 függvény. Így

$$f(x) = Ax + a(x), \quad \text{ahol } A = f'(0) \text{ és } a(x) = f(x) - Ax.$$

Magától értetődik, hogy $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ is C^1 függvény, melyre $a(0) = 0$ és $a'(0) = f'(0) - A = 0$. Itt $a(0) = 0$ természetesen \mathbb{R}^d -beli vektor, $a'(0) = 0$ pedig a $d \times d$ méretű, csupa nulla elemből mátrix. Jóllehet a 0 különböző terek — jelesen \mathbb{R}^d , $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ (és akkor a $0 \in \mathbb{R}$ kezdeti időpontot még nem is említettük) — nulla-elemét jelenti, a kontextus megakadályozza, hogy azokat bármikor is összekeverjük egymással.

Tekintsük tehát az

$$(N) \quad \dot{x} = Ax + a(x)$$

nemlineáris egyenletet, és annak origó körüli linearizáltját, az

$$(L) \quad \dot{x} = Ax$$

lineáris egyenletet. Az (L) lineáris egyenletről lényegében mindent tudunk, ha sajátértékeit és sajátvektorait ismerjük. Tetszőleges $x(0) = x_0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása $x_{0,x_0}(t) = e^{At}x_0$, sőt ezt a megoldást a $t \rightarrow e^{At}$ mátrix-függvénnyel együtt ki is tudjuk számolni. Az (N) nemlineáris egyenlet megoldásait nem lehet zárt alakban meghatározni. De nem is kell, hiszen azokat az (L) lineáris egyenlet megoldásai *kvalitatíve és kvantitatíve* jól közelítik. Természetesen csak lokálisan, az origó egy kicsiny környezetében, és csak akkor, ha az A mátrix $\lambda_k = \lambda_k(A)$ sajátértékeire teljesül a

$$\operatorname{Re} \lambda_k(A) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (2.16)$$

feltétel. Ekkor a lokális fázisportrék is azonosnak tekinthetők, sőt ez az azonosítás a numerikus fázisportrékra is kiterjeszthető.

2.48. Tétel Grobman–Hartman Lemma: formális, technikai változat *A linearizált (L) és az eredeti nemlineáris (N) egyenlet megoldását $e^{At}x$ és $\Phi(t, x)$ jelöli. Az eredeti nemlineáris egyenlet $0 \leq h \leq h_0$ lépésközzel vett tetszőleges $p \geq 1$ -edrendű Runge–Kutta diszkretizációs operátora — ugyancsak összhangban az eddigiekkel — legyen $\phi(h, x)$.*

Ekkor a $0 \in \mathbb{R}^d$ egyensúlyi helyzetnek van olyan $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt környezete, és olyan

$$\mathcal{H} : U \rightarrow \mathcal{H}(U) \subset \mathbb{R}^d \quad \text{homeomorfizmus, hogy } \mathcal{H}(0) = 0 \text{ és}$$

$$\mathcal{H}(\Phi(t, x)) = e^{At}\mathcal{H}(x) \quad \text{minden olyan } t \geq 0 \text{ és } x \in \mathbb{R}^d$$

esetén, melyekre még $\Phi([0, t], x) \subset U$ is teljesül. A kommutatív diagramok nyelvén:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\Phi(t, \cdot)} & \mathcal{U} \\ \mathcal{H} \downarrow & & \downarrow \mathcal{H} \\ \mathcal{H}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{e^{At}} & \mathcal{H}(\mathcal{U}) \end{array} \quad \text{minden megengedett } t \in \mathbb{R} \text{ esetén.}$$

Továbbá, van olyan maximális $0 < h_0 \ll 1$ lépésköz és olyan

$\mathcal{H}_h : U \rightarrow \mathcal{H}_h(U) \subset \mathbb{R}^d$ homeomorfizmus, hogy $\mathcal{H}_h(0) = 0$ és

$\mathcal{H}_h(\Phi(h, x)) = \phi(h, \mathcal{H}_h(x))$ minden olyan $h \in [0, h_0]$, $k \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{R}^d$ esetén, amelyekre még $x, \phi(h, x), \dots, \phi^k(h, x) \subset U$ is teljesül:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\Phi(h, \cdot)} & \mathcal{U} \\ \mathcal{H}_h \downarrow & & \downarrow \mathcal{H}_h \\ \mathcal{H}_h(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\phi(h, \cdot)} & \mathcal{H}_h(\mathcal{U}) \end{array} \quad \text{minden } 0 < h \ll 1 \text{ esetén.}$$

A \mathcal{H} és a \mathcal{H}_h homeomorfizmusok úgy is megválaszthatók, hogy az $x_0 = 0$ pontban deriválhatók legyenek és $\mathcal{H}'(0) = I$ és $(\mathcal{H}_h)'(0) = 0$ is igaz legyen. Igaz továbbá a

$$|\mathcal{H}_h(x) - x| \leq \text{const} \cdot h^p \quad \forall x \in U, \forall h \in [0, h_0]$$

egyenlőtlenség is.

Ez egy kifejezetten nehéz tétel, amelynek teljes bizonyítása csak mintegy 25 évvel ezelőtt fejeződött be. (Ami a bizonyítást igazán nehezé teszi, az az a tény, hogy kritikus rezonanciák esetén a \mathcal{H} és a \mathcal{H}_h homeomorfizmusok [amelyek egyébként soha nem egyértelműek] nem választhatók meg úgy, hogy az $x_0 = 0$ pontban egy kis környezetének minden pontjában deriválhatók legyenek.) Magával az eredménnyel nem most találkozunk először, 1.29. Tétel néven már szerepelt: roppant szemléletes, és alapjaiban már Poincaré is ismerte vagy százhusz esztendeje.

Az általános nyereg-szerkezet mibenlétére a folytatás jobban rávilágít:

2.49. Tétel Tekintsük az $\mathbb{R}^d = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z} = \mathbb{R}^{d_u} \times \mathbb{R}^{d_s}$ felbontást³⁰ és az

$$(N) \quad \dot{x} = Ax + a(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{y} = By + b(y, z) \\ \dot{z} = Cz + c(y, z) \end{cases}$$

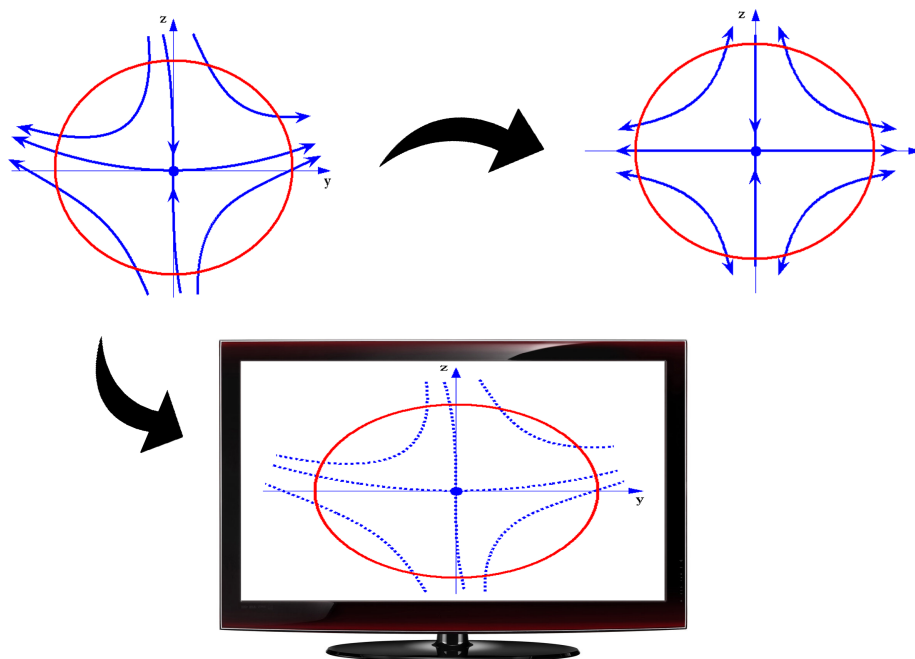
³⁰A tétel megfogalmazása mögött természetesen van egy lineáris algebrai, pontosabban egy mátrixok blokk-diagonális felbontásaira vonatkozó előzmény, mely szerint

$$\mathbb{R}^d = \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}, \quad \mathbb{R}^d \ni x = (y, z) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}, \quad A = \text{diag}(B, C), \quad \mathbb{R}^d \ni Ax = (By, Cz) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Z},$$

ahol az \mathcal{Y} instabil és a \mathcal{Z} stabil alterek \mathbb{R}^{d_u} -val illetve \mathbb{R}^{d_s} -sel azonosíthatók. A (2.16) feltételnek megfelelően

$$d = d_u + d_s, \quad \text{ahol } d_u = \#\{1 \leq k \leq d \mid \text{Re } \lambda_k(A) > 0\}, \quad d_s = \#\{1 \leq k \leq d \mid \text{Re } \lambda_k(A) < 0\}.$$

Ebben az értelemben kell felfognunk a soronkövetkező példát előkészítő lineáris koordináta-transzformációt is. Az eredeti instabil irány versus stabil irány (a $d > 2$ esetben instabil altér versus



2.4. ábra. Linearizálás és diszkretizálás nyeregpont körül: a Grobman–Hartman Lemma két változata

nemlineáris, illetve annak origó körüli linearizáltját, az

$$(L) \quad \dot{x} = Ax \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

lineáris differenciálegyenleteket.

Az origó instabil halmazát az (N) egyenletre nézve

$$\mathcal{M}^u(0) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid t \rightarrow -\infty \text{ esetén } \Phi(t, x) \rightarrow 0\} \quad (2.17)$$

definiálja. A $\mathcal{M}^u(0)$ halmaz beágyazott részsokaság-struktúrát hordoz, ezért instabil sokaságnak nevezik. Lokálisan, az origó kis környezetében $\mathcal{M}^u(0)$ jól-koordinátázott függvény-grafikon,

$$\mathcal{M}_{loc}^u(0) = \text{graph}(u), \quad \mathcal{Y} \xrightarrow{u} \mathcal{Z} \quad C^1 \text{ függvény, melyre } u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

stabil altér) direkt-összeg felbontás természetesen „ferdén álló és ferdeszögű”.

Az instabil–stabil blokk-diagonális mátrix-felbontások finomításai kijelölik a további, gyengébben/erősebben instabil illetve stabil invariáns altérfelbontásokat, a hozzájuk tartozó invariáns sokaságokkal együtt. Ha a (2.16) feltétel nem teljesül, akkor a kritikus, $Re \lambda_k(A) = 0$ (illetve a $|Re \lambda_k(A)| \ll \varepsilon$) tulajdonságú sajátértékek által kijelölt *centrális altér*, illetve az ehhez tartozó *centrális sokaság* szerepe — különösen a bifurkációk szempontjából — kulcsfontosságú.

Az origó instabil halmaza az (L) egyenletre nézve maga a $z=0$ egyenletű \mathcal{Y} instabil altér. Az instabil sokaság az origóban érinti az instabil alteret.

A diszkrétizált $\mathcal{M}_h^u(0)$ instabil sokaság³¹ az origó kis környezetében

$$\mathcal{M}_{h,loc}^u(0) = \text{graph}(u_h), \quad \mathcal{Y} \xrightarrow{u_h} \mathcal{Z} \quad C^1 \text{ függvény, melyre } u_h(0) = 0, \quad (u_h)'(0) = 0$$

alakú. Igaz továbbá a

$$|u_h(y) - u(y)| \leq \text{const} \cdot h^p \quad \forall |y| \ll 1, \quad \forall h \in [0, h_0], \quad h_0 \ll 1$$

egyenlőtlenség is.

Hasonló kijelentéseket tehetünk a stabil altér, stabil halmaz \Leftrightarrow stabil sokaság kapcsolatáról.

Két konkrét példát is mutatunk, amelyek jól mutatják az előző tételben megfogalmazott általános törvényszerűségeket. Az (1.23) rendszerrel ellentétben egyikük sem természetes, hanem gondosan megkonstruált, „kreált” példa, amikor is az instabil/stabil invariáns sokaságok egyszerű képletekkel leírható függvények grafikonjainak bizonyulnak.

2.50. Példa Az (N) , az (L) , (és az explicit Euler módszer alkalmazásából adódó) (D) dinamika összehasonlítása az origó instabil, valamint stabil sokaságai szempontjából:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y} = y \\ \dot{z} = -z + y^2 \end{array} \right\} (N), \quad \left. \begin{array}{l} \dot{y} = y \\ \dot{z} = -z \end{array} \right\} (L), \quad \left. \begin{array}{l} Y = y + hy \\ Z = z + h(-z + y^2) \end{array} \right\} (D).$$

A megfelelő instabil sokaságok az alábbi, a teljes $\mathbb{R} = \mathcal{Y}$ számegyenesen értelmezett $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ függvények grafikonjai:

$$z = u(y) \Leftrightarrow u(y) = \frac{y^2}{3} \quad (N), \quad z = 0 \quad (L), \quad z = u_h(y) \Leftrightarrow u_h(y) = \frac{y^2}{3+h} \quad (D).$$

A megfelelő stabil sokaságok mindegyike a $(z = y = 0 \Leftrightarrow Y = 0)$ egyenletű z tengely.

Tanulságos az $u(y) = \frac{y^2}{3}$ és az $u_h(y) = \frac{y^2}{3+h}$ képletek levezetése.

Az (N) dinamika $z(t) = u(y(t)) \quad \forall t$ invariancia-egyenletét deriválva, majd különböző visszahelyettesítésekkel:

$$\dot{z} = u'(y) \cdot \dot{y} \Rightarrow -z + y^2 = u'(y) \cdot y \Rightarrow -u(y) + y^2 = u'(y) \cdot y,$$

amelynek az $u(0) = 0, u'(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $u(y) = \frac{y^2}{3}$ — a számolások az $u' = -\frac{u}{y} + y$ szinguláris egyenletre vezettek, ezért a kettős kezdeti feltétel.

³¹a (2.17) formula átfogalmazása a diszkrétizált dinamikára igényes és szép feladat

A (D) dinamika $z = u_h(y) \rightarrow Z = u_h(Y) \forall y$ alapján nyert $Z = u_h(Y)|_{z=u_h(y)} \forall y$ invariancia-egyenletét a visszahelyettesítésekkel tovább alakítva

$$(1-h)z + hy^2 = u_h((1+h)y)|_{z=u_h(y)} \Rightarrow (1-h)u_h(y) + hy^2 = u_h((1+h)y) \forall y.$$

Ilyen típusú egyenlettel tudatosan még soha nem találkoztunk.³² Ez egy *függvényegyenlet*. Itt és most a kontrakciós fixpont-tétel alkalmazásával lehet próbálkozni — amint azt az 1.9. Ábrán bemutatott eljárás is szemlélteti. Ebben a konkrét esetben azonban — bátraké a szerencse!! — az $u_h(y) = c_h y^2$ helyettesítés is célra vezet:

$$(1-h)c_h y^2 + hy^2 = c_h((1+h)y)^2 \forall y \Rightarrow (1-h)c_h + h^2 = c_h(1+h)^2$$

s ilymódon $c_h = \frac{1}{3+h}$ és végezetül az ismeretlen u_h függvény: $u_h(y) = \frac{y^2}{3+h}$.

Stabil–instabil sokaságokra már korábban is láttunk példát, nevezetesen a súrlódás és gerjesztés nélküli $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin(x)$ inga/hajóhinta $F_k = ((2k+1)\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ pontok is felső egyensúlyi helyzeteit felfűző „mandulaszemek” kontúr-sorozatát, amelyek együttvéve az $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos(x))$ energiafüggvény $E(x, y) = 2$ önátmetszéses szintvonalát alkotják. Lehetséges azonban az is, hogy egy nyeregpontra kijövő pályáinak egyike hurkot alkot, és ugyanabba a nyeregpontra mint bemenő pálya érkezik vissza. A legegyszerűbb ilyen példa alapszerkezete ugyanaz, mint az ingaegyenleté, amelyet a $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos(x))$ választással kapunk.

2.51. Példa (*H mint hurok és mint Hamilton-függvény*) *Ahogy a súrlódás és gerjesztés nélküli inga/hajóhinta $\dot{x} = y, \dot{y} = -\sin(x)$ egyenlet-rendszere, úgy az*

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = x - y^3 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{array} \right\}, \text{ ahol } H(x, y) = xy - \frac{x^3}{3} - \frac{y^4}{4}$$

differenciálegyenlet-rendszer is Hamilton-rendszer, amelynek trajektóriái a Hamilton-függvény szintvonalain helyezkednek el. Két egyensúlyi helyzet van, a $P = (0, 0)$ origó, valamint a $Q = (1, 1)$ pont, amely a H Hamilton-függvény lokális maximumhelye. A $(z$ itteni, lokális) maximum értéke $H(1, 1) = \frac{5}{12}$. A P pont a Hamilton-függvénynek is és az általa meghatározott Hamilton-rendszernek is nyeregpontja. A szintvonalak elemzése alapján³³ kapjuk, hogy a Q pont centrum, amelyet az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, H(x, y) = c\}, \quad 0 < c < \frac{5}{12}$$

³²vagy mégis? — amennyiben kizárólag a folytonos megoldásokra szorítkozunk,

$$\ell(x_1 + x_2) = \ell(x_1) + \ell(x_2) \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \ell(x) = \text{const} \cdot x \forall x \in \mathbb{R}.$$

A függvényegyenleteknek — csakúgy, mint a parciális differenciálegyenleteknek — nincs általános, minden feladatosztályra egyszerre érvényes elméletük.

³³Mivel rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén $H(x, y) \rightarrow -\infty$ ha $y \rightarrow \pm\infty$, az \mathbb{R}^3 tér $z = H(x, y)$ felületét úgy képzelhetjük el, mint egy hegységet, amelyen dél felől északra szeretnénk átkelni. A hegység gerincvonala nagyjából—

szintvonal-„oválisokon” elhelyezkedő periodikus pályák vesznek körül. A periodikus pályák külső határhelyzete a hurok-szeptatrix.

Az origó instabil sokaságát — a 2.50. Példa mintájára — most is meghatározhatjuk az $y(t) = u(x(t)) \forall t$ invariancia-egyenletét deriválásával. Az ebből adódó

$$(-y + x^2)|_{y=u(x)} = u'(x) \cdot (x - y^3)|_{y=u(x)} \Rightarrow -u(x) + x^2 = u'(x)(x - u^3(x))$$

differenciálegyenletet azonban nem lehet explicit módon megoldani, a sorfejtés módszerét viszont — amely a linearizálás módszerének természetes folytatása — minden további nélkül alkalmazhatjuk. Mivel $u(0) = 0$ és $u'(0) = 0$, az ismeretlen u függvényt $u(x) = Ax^2 + Bx^3 + \dots$ alakban kereshetjük. Együttható-összehasonlítással

$$-(Ax^2 + Bx^3 + \dots) + x^2 = (2Ax + 3Bx^2 + \dots) \cdot (x - (Ax^2 + Bx^3 + \dots)^3)$$

alapján az $-A + 1 = 2A$, $-B = -3B$, $-C = 4C$, $-D = 5D$, $-E = 6E$, $-F = 7F - 2A^4$ etc. egyenletekből rendre $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $F = \frac{1}{324}$ etc. adódik. Tehát az instabil sokaság $x_0 = 0$ körüli Taylor sorfejtése

$$u(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{324}x^7 + \dots$$

alakú. Teljesen hasonló érvelés vezet a stabil sokaság $y_0 = 0$ körüli

$$s(y) = \frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{192}y^8 + \dots$$

alakú Taylor sorfejtéséhez. A kapott eredményeket az $xy - \frac{x^3}{3} - \frac{y^4}{4} = 0$ egyenletbe történő behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Az $\frac{1}{3}x^2$ illetve az $\frac{1}{4}y^3$ főtagok páros illetve páratlan volta, csakúgy mint a kapcsolódó globális bifurkáció az animációk egyikén jól megfigyelhető.

egészében kelet-nyugati irányban húzódik, és azt minden rögzített $x \in \mathbb{R}$ mellett az

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x - y^3 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

értéknél érjük el. Ebből már minden következik. A $H(x, y) = c$, $c < 0$ szintvonalak egyetlen darabból állnak.

Egyébként a teljes $\mathcal{M}^u(0) = \mathcal{M}^s(0)$ azonosság is lehetséges, ha a $H(x, y) = 0$ szintvonal *lemniskáta*.

2.8. Kis perturbációk és exponenciális stabilitás

Most a mérnöki alkalmazásokban legtöbbször előforduló stabilitás-fogalom következik. Ami exponenciális(an egyenletes) benne, az a vonzás.

2.52. Definíció Az $\dot{x} = f(x)$ autonóm egyenlet $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzete exponenciálisan stabil, ha vannak olyan $\eta > 0$, $\omega > 0$ és $K > 0$ állandók, hogy tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $|x_0| \leq \eta$ esetén az $x(0) = x_0$ pontból induló $x_{0,x_0} = \Phi(\cdot, x_0)$ megoldás létezik és egyértelmű a $t \geq 0$ halmazon, továbbá

$$|\Phi(t, x_0)| \leq K e^{-\omega t} |x_0| \quad \text{minden } t \geq 0 \text{ esetén.}$$

A jegyzet legelső tétele, az 1.19. Tétel szerint az

$$(L) \quad \dot{x} = Ax$$

autonóm lineáris egyenletre az aszimptotikus és az exponenciális stabilitás egy és ugyanaz. Mindkettejük szükséges és elégséges feltétele, hogy az

$$\omega_0 = \max\{\operatorname{Re} \lambda_k \mid \lambda_k = \lambda_k(A) \text{ sajátérték, } k = 1, 2, \dots, d\} < 0 \quad (2.18)$$

egyenlőtlenség teljesüljön. Ha (2.18) fennáll, akkor bármely $\omega_0 < -\omega < 0$ választáshoz van olyan $K = K(\omega) > 0$ állandó, amelyre

$$|e^{At} x_0| \leq K e^{-\omega t} |x_0| \quad \text{minden } t \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ esetén.} \quad (2.19)$$

A fejezet egyetlen állítást jár körül: *Az exponenciális stabilitás megőrződik az (L) lineáris egyenlet kicsiny lineáris és nemlineáris perturbáltjaira.* Külön vizsgáljuk a lineáris és a nemlineáris perturbációkat, és összességében négyfajta bizonyítási technikát mutatunk be.

A pedagógiai cél nem a matematikai részletekben való tobzódás. A paraméterek kezelésének mikéntjét szeretném bemutatni. Ha egyszerre több paraméterrel van dolgunk, akkor az alábbi szempontokat érdemes szem előtt tartani:

- a minimálisan szükséges paraméterek számának meghatározása
- a paraméterek megválasztásának, bevezetésének sorrendje
- a paraméterek egymástól való függésének tisztázása
- a paraméterek tól-ig határainak ahogy-lehet optimalizálása

Csak a lényegi következtetéseket írjuk le és sehol sem törekszünk a legelősebb becslésekre.

Nézzük először a *lineáris perturbációkat*, azaz tekintsük az

$$(LP) \quad \dot{x} = (A + B)x$$

alakú autonóm lineáris egyenletet, ahol B $d \times d$ méretű valós mátrix. Ekkor van olyan $\varepsilon > 0$ állandó, hogy $\|B\| \leq \varepsilon$ esetén az (L) egyenlettel együtt az (LP) egyenlet is exponenciálisan stabil.

I.) *Érvelés a mátrix-exponenciális (1.20) sorfejtés alapján:*

$$\begin{aligned} |e^{(A+B)t}x_0| &\leq |e^{At}x_0| + |(e^{(A+B)t} - e^{At})x_0| \leq Ke^{-\omega t}|x_0| \\ &+ \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(A+B)^n t^n}{n!} - \frac{A^n t^n}{n!} \right) \right| \cdot |x_0| \leq (Ke^{-\omega t} + \|B\| \cdot \text{const}(\|A\|, t)) |x_0|. \end{aligned}$$

Ha most $\|B\| \leq \varepsilon \ll 1$, akkor ügyes $t = t^* = t^*(K, \omega, \varepsilon) > 0$ választással

$$\begin{aligned} Ke^{-\omega t^*} + \varepsilon \cdot \text{const}(\|A\|, t^*) &= q < 1 \\ \Rightarrow |e^{(A+B)t^*}x_0| &\leq q|x_0| \quad \Rightarrow |e^{(A+B)t^*n}x_0| \leq q^n|x_0| \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow |e^{(A+B)t}x_0| &\leq \tilde{K}e^{-\tilde{\omega}t}|x_0| \quad \text{minden } t \geq 0 \text{ esetén,} \end{aligned}$$

alkalmas $\tilde{K} > K$ és $0 < \tilde{\omega} < \omega$ konstansokkal. Ha megengedjük, hogy \tilde{K} minden határon túl nőhet, akkor $0 < \omega - \tilde{\omega}$ tetszőlegesen kicsinek választható.

II.) *Érvelés az $(I + S)^{-1}$ mértani sorfejtése alapján:*

Azt kell megmutatnunk, hogy az $A + B$ mátrix sajátértékeinek valós része negatív. Ehhez elegendő, ha az $A + B$ mátrix sajátértékei közel vannak az A mátrix sajátértékeihez, amennyiben $\|B\| \leq \varepsilon$ kicsi. Valóban,

$$A + B - \lambda I = A - \lambda I + B = (A - \lambda I) (I + (A - \lambda I)^{-1} B)$$

és

$$(I + S)^{-1} = I - S + S^2 - S^3 + S^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S^n, \quad \|S\| < 1$$

(ahol $S = (A - \lambda I)^{-1} B$) miatt az $A + B - \lambda I$ mátrix két invertálható mátrix szorzataként maga is invertálható, ha $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$. Ha tehát λ nem sajátértéke az A mátrixnak, akkor $\|(A - \lambda I)^{-1}\| < \frac{1}{\varepsilon}$ esetén az $A + B$ mátrixnak sem az.³⁴

³⁴A teljes matematikai szigorúsághoz azt is be kell látnunk, hogy az $\|(A - \lambda I)^{-1}\|$ értékek halmaza közös korlát alatt marad, ha λ az A mátrix minden sajátértékétől legalább olyan messze van, mint egy

Most nézzük a *nemlineáris perturbációkat*, azaz tekintsük az

$$(N) \quad \dot{x} = Ax + a(x)$$

alakú nemlineáris egyenletet, az $x(0) = x_0$ kezdeti feltétellel együtt.

Azt szeretnénk igazolni, hogy a röviden csak $x(t)$ -vel jelölt $x_{0,x_0} = \Phi(\cdot, x_0)$ megoldás exponenciálisan tart a 0-hoz, ha $|x_0|$ elegendően kicsiny.

III.) *Érvelés a konstans variációs formula és a Gronwall Lemma alapján:*

A remélt becslés az (1.29) konstans variációs formula

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}a(x(s)) ds$$

alakjának egyszerű következménye. A két mátrixfüggvény (2.19) alapján exponenciálisan kicsi.

Szükségünk van az $a(x(s))$ becslésére is. Az $a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvényre tett $a(0) = 0$, $a'(0) = 0$ feltételekből

$$a(x) = a(x) - a(0) = \int_0^1 a'(\tau x) d\tau x = \int_0^1 (a'(\tau x) - a'(0)) d\tau x$$

a többváltozós függvényekre is érvényes Newton–Leibniz formula valamint az a' mátrixfüggvény folytonossága alapján az következik, hogy

$$\forall \kappa > 0 \quad \exists \Delta > 0, \text{ hogy } |a(x)| \leq \kappa|x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq \Delta \text{ esetén.}$$

Így — amennyiben garantálni tudjuk, hogy $|x(s)| \leq \Delta$ minden $s \in [0, t]$ esetén — $a(x(s))$ becslésére az $|a(x(s))| \leq \kappa|x(s)|$ egyenlőtlenséget használhatjuk, ahol $\Delta > 0$ és $\kappa > 0$ egyelőre még szabad paraméterek.

Kapjuk tehát, hogy

$$|x(t)| \leq Ke^{-\omega t}|x_0| + \int_0^t Ke^{-\omega(t-s)}\kappa|x(s)| ds,$$

amit átrendezve

$$e^{\omega t}|x(t)| \leq K|x_0| + K\kappa \int_0^t e^{\omega s}|x(s)| ds,$$

tetszőlegesen rögzített pozitív állandó. Ez pedig igaz, mert a mondott halmazon a $\lambda \rightarrow \|(A - \lambda I)^{-1}\|$ függvény folytonos, és $\lambda \rightarrow \infty$ esetén, ismétcsak a mértani sorfejtés képletét alkalmazva (a $|\lambda| > \|A\|$ esetben)

$$(A - \lambda I)^{-1} = \left(\lambda \left(\frac{1}{\lambda} A - I \right) \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} A^n$$

miatt nullához tart.

és innen a Gronwall Lemmát a $\rho(t) = e^{\omega t}|x(t)|$ függvényre alkalmazva

$$e^{\omega t}|x(t)| \leq K|x_0|e^{K\kappa t} \Leftrightarrow |x(t)| \leq K|x_0|e^{-(\omega-K\kappa)t} \quad (2.20)$$

minden $t \geq 0$ esetén. Ez pedig maga az exponenciális stabilitás, ha az exponens valóban negatív, azaz ha $\omega - K\kappa > 0$, ami teljesül, ha a $\kappa > 0$ paramétert elegendően kicsinynek választjuk. Kérdés, hogyan válasszuk a 2.52. Definícióban szereplő $\eta > 0$ paramétert, hogy az $|x(s)| \leq \Delta \forall s \geq 0 \Leftrightarrow |x(t)| \leq \Delta \forall t \geq 0$ feltétel is teljesüljön. Ehhez (2.20) miatt az $\eta = \frac{\Delta}{K}$ választás elegendő.

A (2.20) egyenlőtlenség levezetése meglepően kevés számolást igényel. Három–négy sor az egész. Amit jobban meg kell fontolni, az a paraméterek választása, választhatósága. A $K > 0$ és az $\omega > 0$ paraméterek eleve adottak.³⁵ Először a $\kappa > 0$ paramétert választjuk meg, hogy az $\omega - K\kappa > 0$ feltétel teljesüljön. Az ehhez tartozó $\Delta > 0$ az a' mátrixfüggvény 0 pontbeli folytonossága alapján adódik.³⁶ Utoljára az $\eta > 0$ paramétert választjuk meg.

IV.) *Érvelés az $x^T(t)Vx(t)$ kvadratikus segédfüggvény alapján:*

A módszert előkészítő Lemma önmagában is érdekes.

³⁵Igazából csak a (2.18) szerinti $\omega_0 > 0$ adott. Ami a K paramétert illeti, azt választhatjuk — áttérve egy másik, az eredeti $|\cdot|$ normával ekvivalens normára — $K = 1$ -nek is. Az ilyen választások játéktere döntő fontosságú lesz a későbbiekben: elvben minden paramétert mindig optimalizálni kell. De nem lehet egyszerre mindegyiket optimalizálni. Ha az a célunk, hogy a (2.20) becslés minél erősebb stabilitást garantáljon, akkor a $\kappa > 0$ értékét minél kisebbnek kell választani. De ezáltal $\Delta > 0$ és $\eta > 0$ is csökken. Az $\eta > 0$ csökkentése viszont azt jelenti, hogy egyre kisebb lesz az a halmaz, amelyről tételesen ki tudjuk mutatni, hogy része az origó vonzási tartományának. Ha nagy vonzási tartományt akarunk garantálni, akkor az $\eta > 0$ értéket a lehetőség szerinti legnagyobbak kell választani, azaz csak leheletnyivel kisebbnek, mint $\frac{\omega}{K}$.

³⁶Ezt a folytonosságot becsléssel is ki lehet fejezni, ami számszerű kapcsolatot teremt a $\kappa > 0$ és a $\Delta > 0$ paraméterek között. Ha az a függvény kétszer folytonosan deriválható és $|a''(x)| \leq M$ is igaz (itt nem árt arra gondolni, hogy minden egyes rögzített x -re $a'(x)$ lineáris, $a''(x)$ bilineáris operátor etc.), akkor az előző integrál-reprezentáció folytatásaképpen

$$a(x) = a(x) - a(0) = \int_0^1 a'(\tau x) d\tau x = \int_0^1 (a'(\tau x) - a'(0)) d\tau x = \int_0^1 \int_0^1 a''(\theta \tau x) x d\theta d\tau x,$$

amiből azt kapjuk, hogy a $\Delta = \sqrt{\frac{2\kappa}{M}}$ ($\Leftrightarrow \kappa = \frac{M}{2} \Delta^2$) választás megfelelő. Ugyanez adódik az a függvény és az x_0 pont körüli n -edfokú Taylor polinom kapcsolatát kifejező

$$a(x_0 + h) = a(x_0) + \frac{1}{1!} a'(x_0)h + \frac{1}{2!} a''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{n!} a^{(n)}(x_0)h^n \\ + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-s)^n \cdot a^{(n+1)}(x_0 + sh) ds h^{n+1} \quad (\text{ez a Lagrange féle integrál-maradéktag})$$

képlet $n = 1$ speciális esetéből is.

2.53. Lemma Legyenek A, B, C adott $d \times d$ mátrixok és tekintsük az

$$BX + XA = C \quad (2.21)$$

mátrix-egyenletet, ahol az X ismeretlen is $d \times d$ méretű mátrix. Tegyük fel, hogy mind az A , mind a B mátrix összes sajátértékének valós része negatív.

Ekkor a (2.21) egyenletnek létezik megoldása.

Bizonyítás. Ami az egzisztenciát illeti, közvetlen visszahelyettesítés mutatja, hogy $X = -\int_0^\infty e^{Bt} C e^{At} dt$ megoldás. Valóban,

$$\begin{aligned} BX + XA &= -\int_0^\infty (B e^{Bt} C e^{At} + e^{Bt} C e^{At} A) dt = -\int_0^\infty (B e^{Bt} C e^{At} + e^{Bt} C A e^{At}) dt \\ &= -\int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{Bt} C e^{At}) dt = -e^{Bt} C e^{At} \Big|_0^\infty = C. \end{aligned}$$

A számolást az teszi jogossá, hogy az improprius integrál az 1.19. Tétel (pontosabban (1.22) \Leftrightarrow (2.19)) miatt konvergens.

A mondott feltételek mellett a (2.21) egyenletre az unicitás is igaz, sőt az

$$L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \rightarrow L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \quad , \quad X \rightarrow BX + XA$$

lineáris operátor összes sajátértékére és sajátmátrixára is vannak explicit lineáris algebrai formulák. Az unicitás azzal egyenértékű, hogy a nulla nem sajátérték. Az X megoldásra adott képlet a lineáris analízis gyöngyszeme. \square

2.54. Lemma Tegyük fel, hogy az A mátrix teljesíti a (2.18) feltételt. Ekkor

$$A^T V + V A = -I \quad \Leftrightarrow \quad V = \int_0^\infty e^{A^T t} e^{At} dt,$$

továbbá a V mátrix szimmetrikus és pozitív definit.

Bizonyítás. A fő eredmény az unicitással kibővített előző Lemma $B=A^T$, $C=-I$ speciális esete. A szimmetria és a pozitív definitás egyszerű:

$$\begin{aligned} (e^{A^T t} e^{At})^T &= (e^{At})^T (e^{A^T t})^T = e^{A^T t} e^{A^T T t} = e^{A^T t} e^{At} \quad \Rightarrow \quad V^T = V, \\ x^T (e^{A^T t} e^{At}) x &= (e^{At} x)^T (e^{A^T t} x) = |e^{At} x|^2 \quad \text{és} \quad e^{At} x \neq 0 \quad \text{ha} \quad x \neq 0 \end{aligned}$$

(utóbbi azért, mert az $\dot{x} = Ax$ egyenlet megoldása soha nem válhat nullává, ha eredetileg nem onnan indult). \square

A V mátrix meghatározása a számítógépes gyakorlatban nem az improprius integrál kiszámításával, hanem az $A^T V + V A = -I$ mint (a $v_{ij} = v_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, d$ ismeretlenekre vonatkozó) lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásával történik. Használhatjuk az 1.16. Példa ezzel lényegében ekvivalens

$$A^T V + V A = -I \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} x^T(t) V x(t) \Big|_{t=0} = -x^T x$$

módszerét is. (Az ottani V kvadratikus függvényt hagyománytiszteletből azonosítottuk az itteni $x^T V x$ kvadratikus alak V mátrixával.)

Az előkészítés túlságosan hosszúra nyúlt. A továbbiakat rövidre zárjuk.

Jelölje $x(t)$ az (N) nemlineáris egyenlet megoldását az origó olyan $\Delta > 0$ sugarú környezetében, amelyre az $|a(x)| \leq \kappa|x|$ egyenlőtlenség igaz. A paramétereket itt és most nem specifikáljuk, megválasztásukhoz utólagos érvelésre van szükség. A cél $\frac{d}{dt} x^T(t) V x(t) \Big|_{t=0} < 0$, a lényegi számolás pedig:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x^T(t) V x(t) \Big|_{t=0} &= \dot{x}^T V x + x^T V \dot{x} \Big|_{t=0} = (Ax + a(x))^T V x + x^T V (Ax + a(x)) \\ &= x^T A^T V x + a^T(x) V x + x^T V A x + x^T V a(x) = x^T (-I) x + a^T(x) V x + x^T V a(x) \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} x^T(t) V x(t) \Big|_{t=0} &\leq -x^T x + \kappa|x| \cdot |Vx| + |x| \cdot \|V\| \cdot |a(x)| \leq (-1 + 2\kappa\|V\|) |x|^2. \end{aligned}$$

2.9. Matrjosa–babányi dióhéj: Ljapunov függvények

A $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ponton áthaladó szintfelülete — egyelőre jobb volna a szinthalmaz kifejezést használni — az $\{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) = V(x_0)\}$ halmaz. Ha a V függvény C^1 és $V'(x_0) \neq 0$, akkor ez a szintfelület az x_0 pont egy kis környezetében ténylegesen is felület, amelynek normálvektora az x_0 -beli

$$\underline{\text{grad}}V(x_0) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d}(x_0) \right)$$

gradiens–vektor, amelyet magával az $1 \times d$ méretű $V'(x_0)$ deriváltmátrix–szal azonosíthatunk.

Tekinsük most az $\dot{x} = f(x)$ autonóm differenciálegyenletet az x_0 pont egy kis környezetében. Minden további megfontolásunk központjában

$$\text{a } \langle \underline{\text{grad}}V(x_0), f(x_0) \rangle \text{ skaláris szorzat előjele áll.}$$

Ha ez a skaláris szorzat pozitív, azaz a $\underline{\text{grad}}V(x_0)$ és az $f(x_0)$ által közrezárt szög hegyesszög, akkor az $\dot{x} = f(x)$ egyenlet x_0 ponton átmenő trajektóriája az x_0 -hoz közeli szintvonalakat azok növekvő sorrendjében metszi, ha negatív, akkor a csökkenő sorrendben. Ez az egyszerű észrevétel messzire, nagyon messzire elvezet, ha azt egy szintfelület, vagyis inkább egy szintfelület–család, egy Matrjosa–baba szerűen egymásba skatulyázott szintfelület–család összes pontjára egyszerre alkalmazzuk. A skaláris szorzat nem–nulla előjele azt a geometriai kényszert fejezi ki, hogy a trajektóriák vagy befelé, a Matrjosa–baba közepe felé haladjanak, vagy kifelé, a fordított irányba, az egyes szintfelületeket belülről kifelé metszve.

Aligha lehet véletlen, hogy ez a gondolatkör először Oroszországban nyert pontos és érett megfogalmazást, Alekszandr Mihajlovics Ljapunov 1892–es doktori értekezésében. A Matrjosa–baba kifejezés magában az értekezésben egyébként nem fordul elő, de az intuíció másik forrását, a magukra hagyott, súrlódásos mechanikai rendszerek energia–minimumra való törekvését maximális erővel hangsúlyozza. A V — ma úgy mondjuk — Ljapunov függvényre a legjobb példa az energia (klasszikus mechanikai rendszerekben, bizonyos elektromos hálózatokban). A populációdinamika fitness függvényei is értelmezhetők Ljapunov függvényként.

A Ljapunov függvények módszerében központi szerepet játszó skaláris szorzat nem más, mint $t \rightarrow V(\Phi(t, x))$ összetett függvény deriváltja.³⁷

³⁷Mostantól kezdve az x_0 helyett x -et írunk, hiszen nem egyetlen, hanem egyszerre nagyon sok trajektória viselkedését vizsgáljuk, hogyan viszonyulnak a V függvény szintfelületeihez és hogy ezáltal mit mondhatunk a trajektóriák aszimptotikus tulajdonságairól. A $t \rightarrow V(\Phi(t, x))$ összetett függvényben az x a paraméter, a t a változó. A deriváltat az összetett függvény deriválási szabálya szerint számoljuk ki. A V függvény x pontbeli deriváltmátrixa a $V'(x)$ $1 \times d$ méretű mátrix, amelyet a $\underline{\text{grad}}V(x)$ sorvektorral azonosítunk. Megoldó–operátorról lévén szó, a $t \rightarrow \Phi(t, x)$ függvény idő szerinti deriváltja $\frac{d}{dt}\Phi(t, x) = f(\Phi(t, x))$, ami $d \times 1$ méretű mátrix, azaz egy oszlopvektor. Így a $\langle \underline{\text{grad}}V(x), f(x) \rangle$ skaláris szorzat itt és most egy sorvektor szorzata egy oszlopvektorral.

2.55. Definíció Legyen $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz és tekintsük az

$$(E) \quad \dot{x} = f(x) \quad , \quad x \in \mathcal{N}$$

autonóm differenciálegyenletet és a $V : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 függvényt. A V függvény (E) egyenlet szerinti deriváltja az $x \in \mathcal{N}$ pontban:

$$\dot{V}_{(E)}(x) = \frac{d}{dt} V(\Phi(t, x)) \Big|_{t=0},$$

ahol $\Phi(t, x)$ az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet lokális megoldó-operátora az \mathcal{N} halmazon.

Az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet megoldásai általában nem az egész számegyenesen vannak értelmezve, hanem csak addig, ameddig el nem érik az \mathcal{N} halmaz $\partial\mathcal{N}$ határát, tehát esetenként csak nagyon rövid időintervallumokon. Ezen időintervallumok mindegyike nyílt intervallum és a kezdeti $t_0 = 0$ időpillanatot tartalmazza. Tehát a $t = 0$ pontban vett idő szerinti parciális derivált minden gond nélkül értelmezett. Ráadásul $\dot{V}_{(E)}(x)$ kiszámítása az (E) egyenlet megoldása nélkül is lehetséges. Sőt, kifejezetten könnyű. Mindössze az összetett függvény deriválási szabályát kell alkalmazni, a

$$\frac{d}{dt} V(\Phi(t, x)) = [V'(\Phi(t, x))] \left(\frac{d}{dt} \Phi(t, x) \right) = [V'(\Phi(t, x))] f(\Phi(t, x))$$

szereposztással. A $t = 0$ helyettesítéssel ebből

$$\dot{V}_{(E)}(x) = [V'(x)] f(x) \quad , \quad \text{azaz} \quad \dot{V}_{(E)}(x) = \langle \underline{\text{grad}} V(x), f(x) \rangle \quad \text{adódik.} \quad (2.22)$$

A V függvény szigorú minimumhelyeinek környezetében a $\dot{V}_{(E)}(x) \leq 0$ és a $\dot{V}_{(E)}(x) < 0$ egyenlőtlenségek stabilitáshoz illetve aszimptotikus stabilitáshoz vezetnek.

2.56. Tétel A.) Legyen az $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pont egyensúlyi helyzete az (E) egyenletnek, azaz legyen $f(x_0) = 0$. Legyen továbbá az $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$ halmaz az x_0 pont nyílt környezete, és legyen $V : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan C^1 függvény, amelyre

$$V(x_0) < V(x) \quad \forall x \in \mathcal{N} \setminus \{x_0\} \quad \text{és} \quad \dot{V}_{(E)}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}. \quad (2.23)$$

Ekkor az x_0 egyensúlyi helyzet (lokálisan) stabil.

B.) Tegyük fel, hogy a (2.23) feltétel helyett teljesül az alábbi tulajdonság:

$$V(x_0) < V(x) \quad \forall x \in \mathcal{N} \setminus \{x_0\} \quad \text{és} \quad \dot{V}_{(E)}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{N} \setminus \{x_0\} \quad (2.24)$$

Ekkor az x_0 egyensúlyi helyzet (lokálisan) aszimptotikusan stabil.

Legyen továbbá $c > V(x_0)$ olyan állandó, amelyre

$$\mathcal{N}_{c, \leq} = \{x \in \mathcal{N} \mid V(x) \leq c\} \quad \text{korlátos és mint } \mathbb{R}^d \text{ részhalmaza, zárt.} \quad (2.25)$$

Ekkor az $\mathcal{N}_{c, \leq}$ halmaz része az x_0 egyensúlyi helyzet attraktivitási tartományának,

$$\mathcal{N}_{c, \leq} \subset A(x_0).$$

A Tétel szokásos alkalmazásaiban $x_0 = 0$ és $V(x_0) = 0$.

Az is nagyon gyakori, hogy a (2.25) tulajdonság alkalmas $c^* > V(x_0)$ mellett minden $V(x_0) < c < c^*$ esetén teljesül és

$$\mathcal{N} = \cup\{\mathcal{N}_{c,\leq} \mid V(x_0) < c < c^*\}.$$

A geometriai jelentés roppant szemléletes: az $\{\mathcal{N}_{c,\leq} \mid V(x_0) < c < c^*\}$ halmazok Matrjosa-babaként veszik körül az x_0 egyensúlyi helyzetet.³⁸ A (2.24) következménye ez esetben $\mathcal{N} \subset A(x_0)$.

Mind a 2.55. Definíció, mind az utána következő 2.56. Tétel lokális jellegű. Ha azonban $\mathcal{N} = \mathbb{R}^d$ és $V(x) \rightarrow \infty$ ha $|x| \rightarrow \infty$, akkor a (2.25) feltétel valamennyi $c > V(x_0)$ esetén automatikusan igaz. A (2.24) következménye ez esetben $A(x_0) = \mathbb{R}^d$: az x_0 egyensúlyi helyzet globálisan aszimptotikusan stabil.

Az egész fogalomkör annyira szemléletes, hogy a magát a definíciót egészen idáig halogathattuk:

2.57. Definíció *Az $N \subset \mathbb{R}^d$ halmaz erős Ljapunov felület az $\dot{x} = f(x)$ autonóm differenciálegyenletre nézve, ha van olyan $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 függvény és olyan $c \in \mathbb{R}$ állandó, hogy*

$$N \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) = c\} \quad \text{és} \quad \langle \text{grad}V(x), f(x) \rangle < 0 \quad \forall x \in N.$$

Az alternatív szóhasználat szerint a V erős Ljapunov függvény az $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^d$ halmazon, ha $\langle \text{grad}V(x), f(x) \rangle < 0$ minden $x \in \mathcal{N}$ esetén.

A jelző nélküli *Ljapunov függvény* fogalmát az éles <0 egyenlőtlenség ≤ 0 gyengítésével nyerjük. Az $\equiv 0$ speciális eset önmagában is érdekes: a $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $\dot{x} = f(x)$ autonóm differenciálegyenlet első integrálja, ha $V(\Phi(t, x)) = \text{const} = \text{const}(x)$ minden $t \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^d$ esetén. A klasszikus, *Hamilton féle* példa az (E) $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y)$, $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)$ differenciálegyenlet-rendszer, ahol maga a $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvény is első integrál:

$$\frac{d}{dt}H(\Phi(t, x, y), \Psi(t, x, y))\Big|_{t=0} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \cdot \dot{x}\Big|_{t=0} + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \cdot \dot{y}\Big|_{t=0} = 0.$$

³⁸A cél általában az, hogy minél nagyobb halmazról sikerüljön kimutatnunk, része az x_0 aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzet attraktivitási tartományának. Sokszor magát az \mathcal{N} halmazt is nekünk kell megkeresnünk: a szokásos jelölt

$$\mathcal{N} = V_{c^*, <} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) < c^*\}, \quad \text{alkalmasan választott } c^* \text{-gal,}$$

amit tehát maga a V függvény hasít ki a teljes térből.

Az elmélet egyébként a teljes $A(x_0) = \mathcal{N}$ attraktivitási tartományon garantálja egy, a (2.24) feltételnek eleget tevő Ljapunov függvény létezését, de sajnos semmilyen konkrét támpontot nem ad egyetlen incifinci Ljapunov függvény megkonstruálására sem. A módszer mégis hatékony: (darabonként) lineáris vagy kvadratikus Ljapunov függvényeket kereshetünk a paraméterek optimális választása révén etc., illetve próbálkozhatunk az energiával, vagy bármivel, amit a mérnöki/biológusi intuíció szolgáltat.

Ljapunov függvények segítségével a trajektóriák menetére vonatkozó geometriai kényszerek egész sokaságát fedezhetjük fel konkrét fázisportrék felrajzolásakor. Egyensúlyi helyzetek aszimptotikus stabilitásának eldöntése (plusz az ezt kísérő alsó becslés az attraktivitási tartomány nagyságára) csak egyike a számos alkalmazásnak. A 2.72. Példa jellegzetes csapdahalmazának, a (2.31) pontok által meghatározott trapéz négy oldalának mindegyike egy-egy Ljapunov függvénynek lesz a szintvonala.

A (2.18) feltétel teljesülése esetén az (L) $\dot{x} = Ax$ egyenletre létezik $V(x) = x^T V x$ alakú kvadratikus Ljapunov függvény, amely az $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ halmazon erős Ljapunov függvény is. Ez a magára Ljapunovra visszamenő 2.54. Lemma átfoglalozása. A Matrjosa-babák ebben az esetben d -dimenziós ellipszoidok, amelyet az (L) egyenlet trajektóriái szigorúan befelé haladva, transzverzálisan metszenek. Az origó egy kis környezetében ugyanezek az ellipszoidok erős Ljapunov felületek az (N) $\dot{x} = Ax + a(x)$ egyenletre is, ha az a függvény C^1 és $a(0) = 0$, $a'(0) = 0$. Kvadratikus Ljapunov függvénnyel először az 1.16. Példában találkoztunk.

A most következő eredményt az angol nyelvű szakirodalom LaSalle, az orosz nyelvű szakirodalom Barbasin és Kraszovszkij (a prioritás kettejüké) nevéhez kapcsolja. A lényegyet tekintve nagyon ötletes, Bolzano–Weierstrass típusú tétellel állunk szemben.

2.58. Tétel LaSalle elv *Legyen $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 függvény, és tegyük fel, hogy a $V_{c^*, \leq} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid V(x) \leq c^*\}$ halmaz — amely automatikusan zárt halmaz lesz — egy alkalmas $c^* \in \mathbb{R}$ esetén korlátos is. Tekintsük az*

$$(E) \quad \dot{x} = f(x) \quad , \quad x \in V_{c^*, \leq}$$

autonóm differenciálegyenletet és tegyük fel azt is, hogy

$$\dot{V}_{(E)}(x) \leq 0 \quad \forall x \in V_{c^*, \leq}.$$

Magától értetődik, hogy a $V_{c^, \leq}$ halmaz pozitíven invariáns. A V Ljapunov függvény (E) szerinti deriváltjának zéró-halmazára vezessük be a*

$$Z_{\dot{V}} = \{x \in V_{c^*, \leq} \mid \dot{V}_{(E)}(x) = 0\}$$

jelölést, majd a $Z_{\dot{V}}$ halmazban elhelyezkedő teljes trajektóriák uniójára (ez lesz a $Z_{\dot{V}}$ halmazon belüli legnagyobb/maximális invariáns halmaz) az

$$\text{Inv}(Z_{\dot{V}}) = \{x \in Z_{\dot{V}} \mid \gamma(x) \subset Z_{\dot{V}}\}$$

jelölést is.

A fenti feltételek mellett

$$\omega(x) \subset \text{Inv}(Z_{\dot{V}}) \quad \forall x \in V_{c^*, \leq}.$$

Speciálisan, ha $x_0 \in V_{c^, \leq}$ egyensúlyi helyzet és $\text{Inv}(Z_{\dot{V}}) = \{x_0\}$, akkor az x_0 egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil és $V_{c^*, \leq} \subset A(x_0)$.*

A Ljapunov függvények módszere a $\max_k \operatorname{Re} \lambda_k = 0$ kritikus esetben is alkalmazható egyensúlyi helyzetek stabilitásának vizsgálatára, amikor a linearizálás mindössze a *további vizsgálat szükséges* konklúzióhoz vezet.

2.59. Példa A.) Eldönthető-e az $(E) \dot{x} = y - x^3, \dot{y} = -x + 2x^2y - y^3$ egyenletrendszer origójának stabilitása linearizálással? B.) És a $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ segédfüggvény rendszer szerinti deriváltjának előjele révén? C.) Globálisan aszimptotikusan stabil-e az origó?

A.) A linearizált egyenlet az (1.9) egyenlet, a $\lambda_{1,2} = \pm i$ kritikus sajátértékekkel.

B.) A linearizált egyenlet energiafüggvényét választva Ljapunov-függvény-jelöltnek,

$$\dot{V}_{(E)}(x, y) = (x\dot{x} + y\dot{y})|_{t=0} = x(y - x^3) + y(-x + 2x^2y - y^3) = -(x^2 - y^2)^2 \leq 0,$$

ha $x, y \in \mathbb{R}$. A stabilitás tehát rendben van, de a vonzáshoz a LaSalle féle invariancia-elvre kell hivatkozni.

C.) A rövid válasz az,

$$y - x^3 = 0 \text{ és } -x + 2x^2y - y^3 = 0 \Rightarrow x(x^4 - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ és } x = \pm 1$$

miatt az egyensúlyi helyzetek $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{1,2} = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, és akkor az aszimptotikus stabilitás biztosan nem lehet globális.

Kérdés, hogy a $Z_{\dot{V}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm x\}$ halmaz tartalmazhat-e az egyensúlyi helyzetektől különböző teljes trajektóriát. Az $y = x$ egyenes pontjaiban a vektormező $(x - x^3, -x + x^3)$, ami a $P_0, P_{1,2}$ pontokat leszámítva sehol sem párhuzamos az egyenes irányvektorával, az $(1, 1)$ vektorral. Hasonlóképpen, az $y = -x$ egyenes pontjaiban a vektormező $(-x - x^3, x + x^3)$, ami a P_0 pontot leszámítva sehol sem párhuzamos az egyenes irányvektorával, az $(1, -1)$ vektorral. Tehát az egyensúlyi helyzetektől különböző trajektóriák nem-nulla szög alatti metszésekkel haladnak át az $y = \pm x$ egyeneseken.

Mindebből az következik, hogy az origó lokálisan vonzó, és vonzási tartománya tartalmazza az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\}$ halmazt.

Az 1.16. Példa módszere nemcsak kvadratikus függvényekre alkalmazható.

2.60. Példa A.) Keressen az $(E) \dot{x} = -xy^2, \dot{y} = x^4y$ egyenlethez $V(x, y) = \alpha x^c + \beta y^d$ alakú (nem szükségképpen erős) Ljapunov függvényt, ahol $\alpha, \beta > 0$ és $c, d \in \mathbb{N}_+$! B.) Mi adódik a V szintvonalainak segítségével az origó stabilitására? C.) Rajzolja fel a fázisportrét!

A.) A hipotetikus Ljapunov függvény rendszer szerinti deriváltja

$$\dot{V}_{(E)}(x, y) = (\alpha c x^{c-1} \dot{x} + \beta d y^{d-1} \dot{y})|_{t=0} = -\alpha c x^c y^2 + \beta d x^4 y^d,$$

tehát a $c = 4, d = 2$ és $\alpha = 1, \beta = 2$ választással $V(x, y) = x^4 + 2y^2$ és $\dot{V}_{(E)} \equiv 0$.

B.) A trajektóriák a V szintvonalain haladnak. Mivel a tengelyek minden egyes pontja egyensúlyi helyzet (és több egyensúlyi helyzet nincsen), minden egyes $x^4 + y^2 = c > 0$ szintvonalon (amelyek ellipszis-sereghez hasonlóan ölelik körbe az origót) pontosan nyolc

trajektória helyezkedik el (közülük négy egyensúlyi helyzet). Az eredmény stabilitás vonzás nélkül.

Első pillantásra ígéretesebbnek tűnik egy $c=4$, $d=2$ és $\alpha=1$, $\beta=1$ választás, amikor is $V(x, y)=x^4+y^2$ és $\dot{V}_{(E)}(x, y)=-2x^4y^2 \leq 0$. Az ebből levonható következtetés azonban soványabb, mint a korábbi. Hiába metszik a trajektóriák (a tengelykereszt pontjait leszámítva) az új segédfüggvény szintvonalait szigorúan befelé haladva, egyikük sem jut el az origóba, hanem „lefékeződik” az egyensúlyi helyzetek valamelyikén: az omega-határhalmazok mindegyike az origótól különböző egyensúlyi helyzet.

C.) Most már tudjuk, milyen ábra szükséges, illetve hogy mennyiben tehetjük le a garast koppanásig a számítógép által megrajzolt ábra mellett.

A hátralevőkben a stabilitás általános fogalmát elemezzük.

Egy egyensúlyi állapotában működő elektronikai/mechanika rendszerrel szemben támasztott alapvető követelmény, hogy az ne „bolonduljon meg” az óhatatlanul fellépő kisebb „megzavartságok” következtében. A „megzavartságok” különböző fajtáinak megfelelően a stabilitás többféle koncepciójáról beszélhetünk. A legerősebb elvárás az, hogy a rendszer mintegy önmaga közömbösítse a zavaró hatásokat, és hamar térjen vissza a normális üzemmenet állapotába, vagy ha ez pontosan nem is lehetséges, egy ahhoz nagyon közeli állapotba.

A stabilitás fogalma többféle értelemben is használatos:

- egyensúlyi helyzet, periodikus megoldás, illetve fixpont stabilitása
- tetszőleges trajektória stabilitása,
ugyancsak a kezdeti állapot kis megváltoztatására nézve
- kompakt invariáns halmaz stabilitása
- a fentiek bármelyikének stabilitása
az egyenlet jobb oldalának kis perturbációjára nézve
- strukturális stabilitás, a teljes fázisportré stabilitása
a dinamika kis C^1 perturbációjára nézve

A stabilitás fogalma alapvető szerepet játszik a numerikus módszerek elméletében is.

- diszkretizáció stabil egyensúlyi helyzetek környezetében nagy lépésközzel
- *konzisztencia & stabilitás* \Leftrightarrow *konvergencia*
ez Neumann János és Lax Péter híres tétele³⁹

³⁹amely központi szerepet játszik a numerikus differenciálegyenletek elméletének egészében. A hozzá vezető út első lépése Neumann János $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ egyenlőtlensége volt, amely a kezdeti feltétellel és homogén

A Neumann–Lax *Konzisztencia & Stabilitás* \Leftrightarrow *Konvergencia* Tételt az alábbi kérdés kontextusában érthetjük meg: Mikor s milyen értelemben lesz az

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & Y \\ S_n \downarrow & & \downarrow T_n \\ X_n & \xrightarrow{A_n} & Y_n \end{array} \quad (2.26)$$

diagram *majdnem-kommutatív*? A tényleges feladat az $Ax = y$ egyenlet $x \in X$ megoldásának kiszámítása. Konkrét algoritmus azonban csak az $Ax = y$ egyenletnél lényegesen egyszerűbb $A_n x_n = y_n$ egyenlet $x_n \in X_n$ megoldásának kiszámítására létezik. Itt $A: X \rightarrow Y$ lineáris operátor (de nem feltétlenül az egész X téren értelmezett és nem is mindig folytonos), $A_n: X_n \rightarrow Y_n$ folytonos lineáris operátor (amely az X_n teret invertálható módon képezi a teljes Y_n térre), X és Y végtelen dimenziós Banach/Hilbert terek, X_n és Y_n véges (egymással megegyező) dimenziós Banach/Hilbert terek, $S_n: X \rightarrow X_n$ valamint $T_n: Y \rightarrow Y_n$ diszkretizációs vagy projekció operátorok. A gyakorlatban az n nagy, de nem túl nagy eset a fontos, az elméletben az $n \rightarrow \infty$ határátmenet. A Neumann–Lax Tételnek nemlineáris változatai is vannak. Maga az Euler féle töröttvonal módszer is tárgyalható a majdnem-kommutatív (2.26) diagram alapján.

2.61. Megjegyzés (A stabilitás/stabilizálás története dióhéjban) *A stabilitás fogalma a matematikába a mechanikából került, a mechanikába pedig a latin köznyelvből. Stabilitas állhatatosságot, szilárdságot, állandóságot, elmozdíthatatlanságot, tartósságot jelent. A görög hasonló értelemben a hedraios szót használja, amint az a magyar fül számára is*

Dirichlet peremfeltétellel ellátott diffúzió-egyenlet

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in [0, \pi] \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad \forall t > 0 \\ u(0, x) = g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{\tau}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) = \frac{1}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) \\ u_{i,0} = u_{i,n} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ u_{0,j} = g_j, \quad j = 0, 1, \dots, n \end{array} \right\}$$

alakú természetes diszkretizációjára vonatkozik. A t időváltozóban $\tau > 0$, az x helyváltozóban $h = \frac{1}{n}\pi$ (n rögzített pozitív egész szám) a diszkretizáció lépésköze. A rácspontok halmaza

$$\{(i\tau, jh) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \mid i = 0, 1, 2, \dots \text{ és } j = 0, 1, \dots, n\},$$

a rácspontokban vett közelítések pedig rendre $g(jh) = g_j$, illetve

$$u(i\tau, jh) \approx u_{i,j}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(i\tau, jh) \approx \frac{1}{\tau}(u_{i+1,j} - u_{i,j}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(i\tau, jh) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}).$$

A diszkretizáció lineáris algebrai egyenletrendszerre vezetett, amely az $i = 0$, $i \rightarrow i + 1$ időrétegenként explicit módon oldható meg. Idáig minden szép és jó — most jön a meglepetés: ez a numerikus módszer pontosan akkor vezet a valódi, a pontos megoldás jó közelítéséhez, ha $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$. A Los Alamos-i programozók, akik „magától értetődően” először a $\tau = h$ lépésköz-választással próbálkoztak, alaposan elcsodálóztak Neumann János tanácsán, de attól kezdve jól működött minden. Érdekel valakit, hogy miért?

visszacseng a poliéder, a „sokféleképpen letelepedni képes test” nevének hallatán. Jól állni (sto = állni) [latin] illetve jól ülni (hedra = ülőhely) [görög] — ez a stabilitás.

Lord Kelvin írta a Kiegészés évében: “There is scarcely any question in dynamics more important for Natural Philosophy than the stability or instability of motion.”

A stabilitás története mérnökök számára a stabilizálás története. Hogyan kell tengeri hajókat úgy építeni, hogy minél jobban legyenek védve borulás ellen? Euler mint kutatási feladatot kapta a kérdést a Szentpétervári Admirálisattól: 1749-es Scientia Navalis-ának elméleti eredményeit először a cári flotta hajóácsai próbálták átültetni a gyakorlatba. Néhány évvel később francia kémek is hozzáfértek a titokhoz. Ez a knowledge transfer (bocsánat az angol brüsszeli nyelvjárása iránti tiszteletlenségért) a stabilitásról való gondolkodás és kísérletezés katalizátora lett Európa-szerte. Watt 1784-ben felfedezte a centrifugális regulátort — összes szabadalma közül ez volt a legfontosabb — amellyel szabályozni és stabilizálni tudta a gőzgép által forgatott tengely szögsebességét. Igazából csak ezzel lépte túl Alexandriai Heron majd 2000 évvel korábbi munkásságát, aki saját gőzgépét-gőzgépkezdeményét nem tudta jól „kordában tartani” (viszont sikerrel oldotta meg a lámpában égő olaj szintjének valamint a vízóra sebességének szabályozását). A stabilitás mint olyan konkrét mechanikai rendszerek tulajdonsága volt, nem pedig az őket leíró differenciálegyenleteké. A mérnöki gyakorlat sokkal gyorsabban fejlődött, mint a rá vonatkozó absztrakció. A gőzgépek teljesítményének növekedése azonban a Watt féle centrifugális regulátor kontra-intuitív viselkedéséhez vezetett. A mérnökök technikailag kezelni tudták a felmerülő új nehézségeket — a paradoxont azonban csak Maxwell 1868-as matematikai értekezése volt képes feloldani. Húsz-harminc évvel később a cirkálókamráinak stabilizálása volt a nagy kihívás. A pörgettyű stabilizálására a Felix Klein (igen, a híres algebrista!) és Arnold Sommerfeld által akkor kidolgozott elmélet ma is alapvető szerepet játszik az űrhajózásban.

Manapság a drónok és a vérnyomás vannak soron, de holnap is bőven lesz mit stabilizálni.

2.10. Strukturális stabilitás. Ízelítő a globális analízisből

Ez a fejezet a bifurkáció absztrakt fogalmát járja körül.

Első olvasásra kihagyható. De aki izgalmasat akar olvasni: mint egy krimiit habzsoló ember, olvassa el a végét.

2.62. Definíció *A $\Phi: \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ és a $\Psi: \mathbb{T} \times Y \rightarrow Y$ dinamikus rendszerek konjugáltak, ha van olyan $\mathcal{H}: X \rightarrow Y$ homeomorfizmus, amely trajektóriát trajektóriába visz, és közben az időt is megőrzi:*

$$\mathcal{H}\Phi(t, x) = \Psi(t, \mathcal{H}(x)) \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad \forall x \in X.$$

Az ilyen homeomorfizmusok neve konjugáció. A \mathcal{H} konjugáció algebrai tulajdonságait úgy is ki lehet fejezni, hogy az

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi(t, \cdot)} & X \\ \mathcal{H} \downarrow & & \downarrow \mathcal{H} \\ Y & \xrightarrow{\Psi(t, \cdot)} & Y \end{array} \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad (2.27)$$

diagram kommutatív.

A konjugáció ekvivalencia-relációt valósít meg. Lokálisan, az egyes fázisportrék kisebb-nagyobb részhalmazain is értelmezhető. Jóllehet nem neveztük nevén, a konjugáció fogalmával már találkoztunk a Grobman–Hartman Lemma kapcsán, amely a linearizálás módszerének jogosságát fogalmazta meg. A stabilitás szempontjából nem elfajult egyensúlyi helyzetek kis környezetében, az eredeti nemlineáris dinamika és a linearizálás utáni lineáris dinamika egymással konjugált.

2.63. Definíció *A $\Phi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ és a $\Psi: \mathbb{R} \times Y \rightarrow Y$ dinamikus rendszerek topologikusan ekvivalensek, ha van olyan $\mathcal{H}: X \rightarrow Y$ homeomorfizmus, amely trajektóriát trajektóriába visz, és közben megőrzi az idő irányát is, de magát az időt — a hely függvényében — átparaméterezi:*

$$\mathcal{H}\Phi(T^x(t), x) = \Psi(t, \mathcal{H}(x)) \quad \forall t \in \mathbb{T} \quad \forall x \in X,$$

ahol minden rögzített $x \in X$ esetén $T^x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő homeomorfizmus és a

$$T: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \rightarrow T^x(t)$$

leképezés folytonos.

A folytonos idejű dinamikus rendszerek alaptulajdonságai szerint (a 2.8. Definíció (ii) és (iii) axiómái következtében) az idő-átparaméterezés automatikusan eleget tesz az alábbi feltételeknek:

$$T(x, 0) = 0 \quad \text{és} \quad T(\Phi(T(x, s), x), t) + T(x, s) = T(x, t + s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \quad \forall x \in X.$$

2.64. Definíció Az $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ és a $\dot{y} = g(y)$, $y \in \mathbb{R}^d$ autonóm differenciálegyenletek topologikusan ekvivalensek, ha az általuk indukált $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ és $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ dinamikus rendszerek topologikusan ekvivalensek.

A topologikus ekvivalencia ekvivalencia-reláció. Lokálisan, az egyes fázisportrék kisebb-nagyobb részhalmazain is értelmezhető. A topologikus ekvivalencia az a fogalom, amelynek segítségével két autonóm differenciálegyenlet azonosítható egymással.

Ha egy autonóm differenciálegyenlet elegendően kicsiny C^1 környezetében csupa olyan autonóm differenciálegyenlet van, amelyek egymással mind topologikusan ekvivalensek, akkor az adott differenciálegyenletet strukturálisan stabilnak nevezzük. Egy strukturálisan stabil egyenletet nem lehet kicsiny C^1 perturbációkkal úgy megváltoztatni, hogy az kívülre kerüljön a saját ekvivalencia-osztályán. Ez a belső szerkezet robusztusságát, kis perturbációkkal szembeni „ellenálló-képességét” jelenti.

A strukturális stabilitás definíciójához olyan C^1 autonóm differenciálegyenletekből indulunk ki, amelyek az \mathbb{R}^d tér egészén értelmezve vannak, de magát a strukturális stabilitást csak az \mathbb{R}^d tér korlátos és nyílt H halmazaira definiáljuk.

2.65. Definíció Az $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ autonóm differenciálegyenlet az \mathbb{R}^d tér egy korlátos és nyílt H halmazán strukturálisan stabil, ha létezik olyan $\eta > 0$, hogy minden $g \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ függvényre a

$$\sup\{|f(z) - g(z)| \mid z \in H\} < \eta \quad \text{és} \quad \sup\{\|f'(z) - g'(z)\| \mid z \in H\} < \eta$$

feltételek teljesülése maga után vonja, hogy az $\dot{x} = f(x)$ és a $\dot{y} = g(y)$ autonóm differenciálegyenletek a H halmazon topologikusan ekvivalensek.

Ezen a ponton három természetes kérdés merül fel. Az első kérdés utólagos, hiszen arra a válasz maga a topologikus ekvivalencia.

- milyen alapon ésszerű két autonóm differenciálegyenletet azonosítani egymással?
- hogyan lehet eldönteni, hogy két autonóm differenciálegyenlet topologikusan ekvivalense-e egymással?
- hogyan lehet eldönteni, hogy egy autonóm differenciálegyenlet strukturálisan stabil-e?

Az első két kérdés a (valós számok felett értelmezett) vektorterek körében illetően hangzik:

- milyen alapon ésszerű két vektorteret azonosítani egymással?
- hogyan lehet eldönteni, hogy két vektortér lineárisan izomorf egymással?

Az első kérdésre a válasz: ha lineárisan izomorfak. Azaz, ha van közöttük olyan kölcsönösen egyértelmű, teljes teret teljes térre vivő leképezés, amely inverzével együtt homogén lineáris. Azaz ha az őket halmazelméleti értelemben azonosító leképezés úgy is megválasztható, hogy az a rajtuk értelmezett struktúrákat is egymásba viszi. Vegyük észre, hogy a topologikus ekvivalencia fogalma pontosan ilyen. Egy homeomorfizmus, amely a folytonossági struktúrákat (környezetek, konvergenciák etc.) egymásba viszi, csakúgy mint az idő múlását kifejező struktúrákat, azaz a dinamikát magát, a trajektóriákat és azok irányításait. Mindezeket a konjugáció is megőrzi, sőt még az időt is, idő-átparaméterezések nélkül. A diszkrét idejű dinamikus rendszerek körében a konjugáció tökéletes fogalom, az, amire szükségünk van. A folytonos idejű dinamikus rendszerek körében azonban a konjugációk által meghatározott ekvivalencia-osztályok túlságosan szűkek. Az

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = \alpha y \\ \dot{y} = -\alpha x \end{array} \right\}, \text{ ahol } \alpha > 0 \text{ paraméter} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = A \sin(\alpha(t - \phi_0)) \\ y(t) = A \cos(\alpha(t - \phi_0)) \end{cases}$$

alakú differenciálegyenletek mindegyike centrumot határoz meg. Az origótól különböző pályagörbék körvonalak, amelyek az origót pozitív, az óramutató járásával ellentétes irányban kerülik meg. Az origó egyensúlyi helyzet; a többi pont periodikus, és először $\frac{2\pi}{\alpha}$ idő elteltével jut önmagába vissza. Sebességük az $\alpha > 0$ paramétertől függően más és más. Az idő átparaméterezése a sebesség megváltoztatását jelenti, tehát ezek a rendszerek egymással mind topologikusan ekvivalensek. A konjugációk szempontjából azonban páronként különböznek egymástól, hiszen a konjugációk megőrzik a periódusidőt. Valóban, ha $\mathcal{H}(\Phi(t, x)) = \Psi(t, \mathcal{H}(x))$ minden $t \in \mathbb{T}$ és minden $x \in X$ esetén, akkor a $\Phi(\tau_0, x^*) = x^*$ tulajdonságból $\Psi(\tau_0, \mathcal{H}(x^*)) = \mathcal{H}(\Phi(\tau_0, x^*)) = \mathcal{H}(x^*)$ következik.

Visszatérve a második kérdésre, a válasz vektorterek esetén egyetlen szóból áll: dimenzió. Két vektortér pontosan akkor lineárisan izomorf, ha dimenziójuk megegyezik. Differenciálegyenletek esetén — az egy- és a kétdimenziós esetet leszámítva — nincs teljes válasz. Újabb analógiára mutatunk rá: nem létezik minden esetet lefedő kritérium annak eldöntésére, hogy két általános gráf mikor izomorf egymással. Viszont arra, hogy két konkrét gráf mikor nem izomorf egymással, könnyen adhatunk egy egész sor elegendő feltételt. Ha például az egyik gráfban kilenc olyan csúcspont van, amelynek a fokszáma hat, a másik gráfban azonban csak nyolc, akkor az a két gráf biztosan nem izomorf egymással: A mondott egyszerű tény kizárja azt, hogy a két gráf között létezzon gráfelméleti értelemben vett izomorfizmus, azaz a csúcsoknak és az éleknek egymásra történő olyan megfeleltetése, amely illeszkedéstartó. De arra a kérdésre, hogy két fa mikor azonos, már könnyű a teljes válasz is: amikor Prüfer-kódjaik megfeleltethetők egymásnak.⁴⁰

Két autonóm differenciálegyenlet topologikus ekvivalenciájának eldöntésére sem létezik általánosan érvényes kritérium, és így a strukturális stabilitás sem jellemezhető belső

⁴⁰Bármely két n -csúcsú gráf izomorf voltának eldöntésére Babai László (2015) olyan algoritmust adott meg, amely legfeljebb $e^{C(\ln(n))^c}$ lépésben véget ér. (Itt $C > 0$ és $c > 1$ állandók: a $c = 1$ eset polinom-rendű algoritmusnak felelne meg.) Ez a jelenleg legerősebb eredmény ebben a témakörben.

tulajdonságokkal. Olyan feltételeket viszont, amelyek kizárják a topologikus ekvivalenciát, könnyű megfogalmaznunk: ilyenek az egyensúlyi helyzetek és periodikus megoldások száma, ezek stabilitásának típusa etc. A kétdimenziós eset kivételes.

Akárcsak a 2.65. Definícióban, tegyük fel, hogy az $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ autonóm differenciálegyenlet az egész téren (jelen esetben: az egész síkon) értelmezett, és tegyük fel, hogy valamely $r_0 > 0$ számra

$$\langle x, f(x) \rangle < 0 \quad \forall x \in \partial H(R_0), \quad \text{ahol } H(R_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < R_0\}, \quad (2.28)$$

azaz a differenciálegyenlet jobb oldala által meghatározott vektormező a $H(R_0)$ nyílt körlemez határát kívülről befelé transzverzálisan (érintési pontok nélkül) metszi.

2.66. Tétel *A fenti előkészítő feltételek mellett az $\dot{x} = f(x)$ autonóm differenciálegyenlet a $H(R_0)$ halmazon pontosan akkor strukturálisan stabil, ha a $H(R_0)$ halmazon*

- véges sok egyensúlyi helyzet és véges sok periodikus pálya van
- és ezek egyike sem elfajult a stabilitás szempontjából
- semelyik két nyeregpont sincs trajektóriával összekötve

A Tétel a teljes síkra is megfogalmazható, azzal a plusz feltétellel, hogy a végtelen távoli pont taszító legyen (sokkal természetesebb az eredmény a gömbfelületen, ahol az északi pólusról — amelyet a sztereografikus projekció a sík végtelen távoli pontjának feleltet meg — szokás feltenni, hogy taszító egyensúlyi helyzet legyen). A teljesség kedvéért idézzük fel, hogy az $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ autonóm differenciálegyenlet egy x_0 egyensúlyi helyzete vagy egy Γ periodikus megoldása a stabilitás szempontjából akkor elfajult, ha a stabilitás pontos típusa a linearizálás módszerével nem dönthető el:

- az x_0 egyensúlyi helyzet elfajult, ha valamely sajátértékére $\operatorname{Re} \lambda_{k^*} = 0$
- a Γ periodikus pálya elfajult, ha valamely sajátértékére $|\kappa_{k^*}| = 1$

Periodikus pálya sajátértéke alatt a 2.69. Tételben szereplő Floquet sajátérték értendő. A $d=2$ speciális esetben a Γ periodikus pálya nem-elfajult \Leftrightarrow exponenciálisan vonz/stabil vagy exponenciálisan taszít (ami annyit jelent, hogy az idő megfordítása esetén exponenciálisan vonz/stabil).

2.67. Megjegyzés *Az előző Tétel a globális analízis témakörébe tartozik. Fontos megjegyeznünk, ha a (2.28) feltétel teljesül és a $H(R_0)$ körlemez csupa nem-elfajult egyensúlyi helyzetet tartalmaz, akkor ezek száma véges, típusuk szerint pedig nyelők (stabil fókusz illetve csomó), nyergek, vagy források (instabil fókusz illetve csomó). Érvényes továbbá az Euler–Poincaré féle összegformula:*

$$\#\{\text{forrás}\} + \#\{\text{nyelő}\} - \#\{\text{nyereg}\} = 1,$$

ami a konvex poliéderekre érvényes

$$\#\{\text{lapok}\} + \#\{\text{csúcsok}\} - \#\{\text{élek}\} = 2$$

Euler-formula megfelelője. Egy másfajta általánosítás az

$$\#\{\text{maximumhely}\} + \#\{\text{minimumhely}\} - \#\{\text{nyeregpon}\} = 1,$$

formula, amely olyan $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 függvényekre érvényes, amelyekre $F(x) = 0$ ha $x \in \partial H(R_0)$ és amelyeknek a $H(R_0)$ nyílt körlemezen csupa nem-elfajult kritikus helye van, a körlemez $\partial H(R_0)$ határán pedig egyáltalán nincsen kritikus helye. A kritikus helyek száma ekkor a $H(R_0)$ nyílt körlemezen véges; típusuk szerint ezek maximum- vagy minimumhelyek, illetve nyeregponthelyek lehetnek. (Kritikus hely a fenti F függvény értelmezési tartományának olyan pontja, ahol az érintősík vízszintes. Idézzük fel azt is, hogy a kritikus hely pontosan akkor elfajult, ha a hozzá tartozó Hesse-mátrix determinánsa zérus.)

Roppant tanulságos kapcsolatot keresni a fenti három előjeles összegformula között. Nézzük először a differenciálegyenletes változatot. Kézenfekvő a lapokat forrásoknak, a csúcsokat nyelőknek, az éleket nyeregponthelyeknek megfeleltetni, s mindezt oly módon, hogy az élék felezőpontjai legyenek a tényleges nyeregponthelyek, a poliéder élhálózata pedig a nyeregponthelyekből a nyelőkbe tartó trajektóriák összessége. Mindezt nemcsak a konvex poliéder felületén tehetjük meg, hanem úgy is, hogy a konvex poliéder élhálózatát előzetesen kiterítjük a síkra. Így a síkon értelmezett trajektóriák egy rendszerét, és a mögöttes vektormezőt kapjuk: azaz egy autonóm differenciálegyenletet a síkon. Induljunk ki egy kocka síkra rajzolt élhálózatából: ha arra sikerül, máskor is fog! Eközben a poliéder egyik oldallapjának nem-korlátos, „külső” tartomány és a végtelen távoli pont mint forrás felel meg, amelyet azonban a differenciálegyenletes összegformulában nem vettünk figyelembe. Ez a „többletpont” okozza, hogy az Euler–Poincaré képletben a mágikus szám 1-gyel kevesebb, mint az Euler-féle képletben. Hasonló okoskodással a poliéder síkra rajzolt élhálózata fölé felépíthetjük egy hegységrendszer gerincvonalait, ahol is a hegycsúcsok a poliéder csúcsai fölé kerülnek, a lapok pedig lefolyástalan medencék lesznek. A végtelen távoli ponthoz ebben a konstrukcióban a $-\infty$ mint a vonatkozó felület abszolút minimumhelye rendelődik.

Tanulságos megértenünk azt is — legalábbis a rámutató intuitív érvek erejéig —, hogy az Euler–Poincaré féle (előjeles) összegformula miért marad igaz akkor is, ha benne a $H(R_0)$ nyílt körlemez egy tetszőleges síkbeli periodikus pálya által közrezárt korlátos és nyílt tartománnyal pótoljuk.

A bifurkáció (ra való képesség) végső soron a strukturális stabilitás ellentettjét jelenti.

2.68. Definíció Az $\dot{x} = f(x, \mu)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^d)$ k -paraméteres autonóm differenciálegyenlet-családnak a $\mu = \mu_{crit}$ paraméter-érték az \mathbb{R}^d tér egy korlátos és nyílt H halmazán bifurkációs pontja, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^k$, hogy $|\mu_1 - \mu_{crit}| < \varepsilon$ és $|\mu_2 - \mu_{crit}| < \varepsilon$, de az

$\dot{x} = f(x, \mu_1)$ és az $\dot{x} = f(x, \mu_2)$ autonóm differenciálegyenletek a H halmazon topologikusan nem ekvivalensek.

A gyakorlatban legtöbbször a $k = 1$ esettel találkozunk — még akkor is, amikor több paraméter van, közülük egyszerre csak egyet szoktak változtatni. A latinból származó *bifurkáció* elnevezés kettéágazásra, két külön esetre történő szétválásra utal. Az egyszerűbb példák mindegyikében tényleg az a helyzet, hogy az $\dot{x} = f(x, \mu_1)$ és az $\dot{x} = f(x, \mu_2)$ egyenletek a H halmazon topologikusan

- ekvivalensek, ha $\mu_{crit} - \varepsilon < \mu_1, \mu_2 < \mu_{crit}$
- ekvivalensek, ha $\mu_{crit} < \mu_1, \mu_2 < \mu_{crit} + \varepsilon$
- nem ekvivalensek, ha $\mu_{crit} - \varepsilon < \mu_1 < \mu_{crit} < \mu_2 < \mu_{crit} + \varepsilon$

Ebből a szempontból teljesen mindegy, hogy a kritikus paraméterértékhez tartozó $\dot{x} = f(x, \mu_{crit})$ egyenlet a kettő közül éppen melyik ekvivalencia-osztályba tartozik (ha ugyan egyáltalán odatartozik).

2.11. Periodikus pályák vizsgálata

Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ az $\dot{x} = f(x)$ autonóm differenciálegyenlet periodikus megoldása, a $\tau_0 > 0$ minimális periódusidővel. Legyen $p_0 \in \Gamma$ tetszőleges. A p_0 ponton átmenő Poincaré metszősík a

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x - p_0, f(p_0) \rangle = 0\}$$

halmaz. Az első visszatérés $\tau : \mathcal{N}_{p_0} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényét mint a $H(\tau, x) = 0$ egyenlet $\tau(p_0) = \tau_0$ feltételt kielégítő lokális megoldását definiáljuk, ahol

$$H(\tau, x) = \langle \Phi(\tau, x) - p_0, f(p_0) \rangle, \quad (\tau, x) \in \mathbb{R} \times \Sigma.$$

Természetesen ellenőriznünk kell, hogy az implicit függvény tétel $H(\tau_0, p_0) = 0$ és $H'_\tau(\tau_0, p_0) \neq 0$ feltételei teljesülnek. Valóban,

$$H(\tau_0, p_0) = \langle \Phi(\tau_0, p_0) - p_0, f(p_0) \rangle = \langle p_0 - p_0, f(p_0) \rangle = 0$$

és

$$H'_\tau(\tau_0, p_0) = \langle \dot{\Phi}(\tau_0, p_0) - 0, f(p_0) \rangle = \langle f(\Phi(\tau_0, p_0)), f(p_0) \rangle = \langle f(p_0), f(p_0) \rangle \neq 0.$$

Tehát a $H(\tau, x) = 0$ egyenletből τ mint az x függvénye a $p_0 \in \Sigma$ pont egy $\mathcal{N}_{p_0} \subset \Sigma$ környezetében (ha a $\tau(p_0) = \tau_0$ feltételt is megköveteljük) egyértelműen fejezhető ki.

A $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ periodikus pálya p_0 ponton átmenő Σ Poincaré metszősíkjához tartozó Poincaré követőfüggvénye a

$$\pi : \mathcal{N}_{p_0} \rightarrow \Sigma, \quad x \rightarrow \pi(x) = \Phi(\tau(x), x)$$

operátor, amelyet — a Σ metszősíknak az \mathbb{R}^{d-1} altérrel való azonosítása után — mint egy $\mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ leképezést fogunk fel. A $\pi'(p_0)$ mátrix $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{d-1}$ sajátértékei a $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ periodikus pálya Floquet féle sajátértékei.

2.69. Tétel *A Γ periodikus pálya Floquet féle sajátértékei valóban csak magától a periodikus pályától függenek, nem pedig a Poincaré féle metszősík, s azon keresztül a követőfüggvény megválasztásától.*

Bizonyítás. Legyenek $p_0, \tilde{p}_0 \in \Gamma$ tetszőlegesek és tekintsük a hozzájuk tartozó $\pi : \mathcal{N}_{p_0} \rightarrow \Sigma$ illetve $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{N}}_{\tilde{p}_0} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ követőfüggvényeket. Elegendő azt megmutatnunk, hogy a $\pi'(p_0)$ és a $\tilde{\pi}'(\tilde{p}_0)$ deriváltak mint $(d-1) \times (d-1)$ mátrixok hasonlók egymáshoz.

Megismételjük az első visszatérés függvényének levezetésekor használt gondolatmenetet, azzal a különbséggel, hogy most a Σ sík pontjaiból nem a Σ sík pontjaihoz térünk vissza (az első visszatérés $\tau(x)$ ideje alatt), hanem a $\tilde{\Sigma}$ sík pontjaihoz a $\sigma(x)$ első odaérés ideje alatt. Az implicit függvény tétel alkalmazása így egy

$$\rho : \mathcal{N}_{p_0} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{\tilde{p}_0}, \quad x \rightarrow \rho(x) = \Phi(\sigma(x), x)$$

operátorhoz vezet. Az egyes metszősíkok közötti ‘free flight’ utazások időtartamait figyelembe véve,

$$\pi(x) = \rho^{-1}(\tilde{\pi}(\rho(x))) \quad \forall x \in \mathcal{N}_{p_0} \quad \Rightarrow \quad \pi'(p_0) = (\rho^{-1})'(\tilde{p}_0) \cdot \tilde{\pi}'(\tilde{p}_0) \cdot \rho'(p_0),$$

ahol — és most jelölje I a $(d-1) \times (d-1)$ méretű egységmátrixot, mint \mathbb{R}^{d-1} identitásoperátorát —,

$$\rho^{-1}(\rho(x)) = x \quad \forall x \in \mathcal{N}_{p_0} \quad \Rightarrow \quad (\rho^{-1})'(\tilde{p}_0) \cdot \rho'(p_0) = I.$$

Így $\pi'(p_0) = T^{-1}\tilde{\pi}'(\tilde{p}_0)T$ ahol $T = \rho'(p_0)$, amit bizonyítani akartunk. □

2.70. Tétel *A Γ periodikus pálya Floquet féle sajátértékeinek szorzata mindig pozitív szám.*

A Γ periodikus pálya stabilitását a legegyszerűbb úgy kezeljük, mint bármely más, kompakt invariáns halmaz stabilitását. A Γ periodikus pálya *orbitálisan stabil*, ha $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, hogy $d(x, \Gamma) \leq \delta \Rightarrow d(\Phi(t, x), \Gamma) \leq \varepsilon \quad \forall t \geq 0$. A Γ periodikus pálya *orbitálisan vonzó*, ha $\exists \eta_0 > 0$, hogy $d(x, \Gamma) \leq \delta \Rightarrow d(\Phi(t, x), \Gamma) \rightarrow 0$ ha $t \rightarrow \infty$. Ha $\exists \eta_0, \kappa, K > 0$, hogy $d(x, \Gamma) \leq \eta_0 \Rightarrow d(\Phi(t, x), \Gamma) \leq Ke^{-\kappa t} \quad \forall t \geq 0$, akkor Γ *orbitálisan exponenciálisan stabilis*. Az egyensúlyi helyzetekre vonatkozó szóhasználat itt is érvényes, „orbitális stabilitás plusz orbitális vonzás” egyenlő *orbitális aszimptotikus stabilitás*, míg az orbitális stabilitás tagadása *orbitális instabilitás*. Ha a Γ periodikus megoldás orbitálisan aszimptotikusan stabil, akkor *vonzási más szóval attraktivitási tartománya vagy medencéje az*

$$A(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(\Phi(t, x), \Gamma) \rightarrow 0 \text{ ha } t \rightarrow \infty\}$$

halmaz. Mint minden attraktivitási tartomány, az $A(\Gamma)$ halmaz nyílt halmaz.

A $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{d-1}$ Floquet sajátértékek segítségével a Γ periodikus pálya különböző típusú stabilitására elegendő feltételeket, más szóval kritériumokat fogalmazhatunk meg.

- $|\kappa_k| < 1 \quad \forall k : \Rightarrow \Gamma$ orbitálisan aszimptotikusan stabil
- $\max_k |\kappa_k| = 1 : \Rightarrow$ további vizsgálat szükséges
- $\exists k^*, \text{ hogy } |\kappa_{k^*}| > 1 : \Rightarrow \Gamma$ orbitálisan instabil

Ezek közül az első kritérium oda-vissza is érvényes:

- $|\kappa_k| < 1 \quad \forall k : \Leftrightarrow \Gamma$ orbitálisan exponenciálisan stabil,

sőt még ennél is többet mondhatunk.

A Γ -hoz való tartás a $|\kappa_k| < 1, k = 1, 2, \dots, d-1$ feltétel teljesülése esetén egy, a Γ periodikus pályán megvalósuló konkrét mozgáshoz történő konvergenciát is jelent. A Γ periodikus pályán megvalósuló mozgások egymás időbeli eltoltjai, amelyeket a t_0 kezdeti

időponttal (mint az $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = p_0$ kezdetiérték-feladat megoldásait) lehet paraméterezni s amelyek korábbi jelöléseinkkel az $\{x_{t_0, p_0}\}_{t_0 \in \mathbb{R}}$ függvények. A $t_0 = 0$ választással $x_{0, p_0} = p$, a $t_0 \in \mathbb{R}$ általános esetben pedig $x_{t_0, p_0}(t) = p(t - t_0) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Ha tehát $|\kappa_k| < 1 \quad \forall k$ és $x_0 \in A(\Gamma)$, akkor létezik olyan $t_{x_0} \in \mathbb{R}$, aszimptotikus fázisnak nevezett állandó, hogy

$$|\Phi(t, x_0) - p(t - t_{x_0})| \rightarrow 0 \quad \text{ha } t \rightarrow \infty.$$

Az egyazon aszimptotikus fázishoz tartozó *isochrone* pontok

$$\mathcal{F}_{x_0} = \{y \in A(\Gamma) \mid |\Phi(t, y) - \Phi(t, x_0)| \rightarrow 0 \quad \text{ha } t \rightarrow \infty\}$$

halmaza $(d-1)$ -kodimenziós felületet határoz meg, a $\{\mathcal{F}_{x_0}\}_{x_0 \in A(\Gamma)}$ felületcsalád pedig az $A(\Gamma)$ halmaz egyrétű fedését adja. A definiáló tulajdonság szerint

$$\Gamma \cap \mathcal{F}_{x_0} = \{p(-t_{x_0})\},$$

a kérdéses felületcsaládot tehát a $-t_{x_0} \equiv \tau_0 - t_{x_0}$ azonosítások után a $[0, \tau_0) \subset \mathbb{R}$ intervallum pontjaival is lehet indexelni.

2.12. Hopf születés, Hopf halál

2.12.1. A Hopf–bifurkáció normálalakja

A Hopf–bifurkációt a többen sokkal részletesebben, a rá vonatkozó összefüggések — elsődlegesen a numerikus tapasztalat — tág rendszerében tárgyaljuk. A *Hopf–bifurkáció* szokásos alakja a (2.12) egyenlet. A *normálforma* szót a tipikus példa és a *lényegében nincsen más példa* értelmében használjuk. A most következő általános eredmény *azonosnak tekinthető* kitétele rögzített μ esetén identitáshoz közeli topologikus ekvivalenciát, a bifurkációs paraméter $\mu = \mu_{crit}$ értékének kis környezetében a topologikus ekvivalenciák μ paramétertől való folytonos függését jelenti.

2.71. Tétel *Legyenek $\mu_1 < \mu_{crit} < \mu_2$ valós számok és tekintsük az egyparaméteres*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(\mu) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y, \mu) \\ g(x, y, \mu) \end{pmatrix}, \quad \mu_1 < \mu < \mu_2$$

differenciálegyenlet-családot, ahol

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad A(\mu_{crit}) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad \text{valamint} \quad \beta \neq 0,$$

továbbá $f, g \in C^5$ és $f(0, 0, \mu) = 0$, $g(0, 0, \mu) = 0$ minden $\mu_1 < \mu < \mu_2$ esetén. Tegyük fel azt is, hogy

$$b \neq 0, \quad \text{ahol} \quad b = \left. \frac{d}{d\mu} \text{Trace}(A(\mu)) \right|_{\mu=\mu_{crit}} = a'_{11}(\mu_{crit}) + a'_{22}(\mu_{crit})$$

és

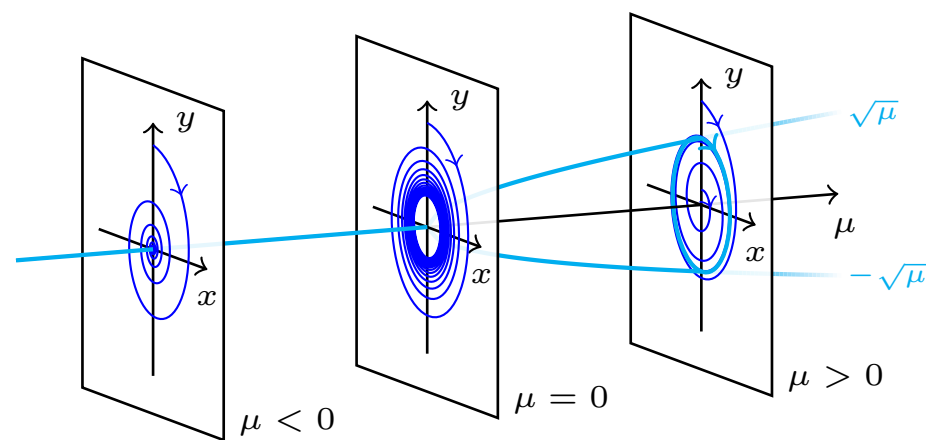
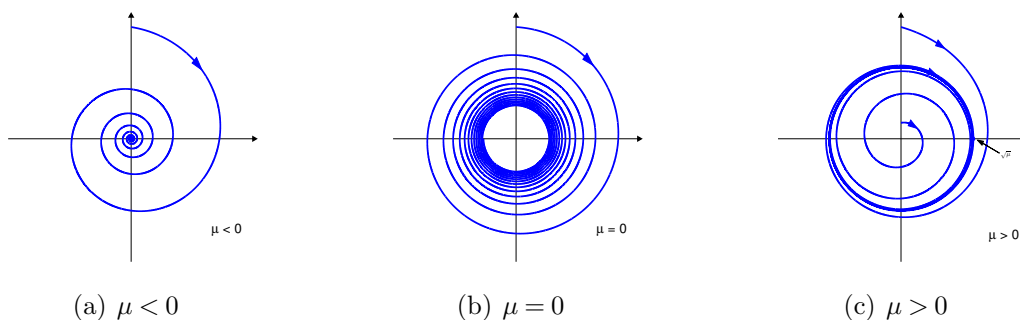
$$c \neq 0, \quad \text{ahol} \quad c = \frac{1}{16} (f'''_{xxx} + g'''_{xxy} + f'''_{xyy} + g'''_{yyy}) \Big|_{(x,y,\mu)=(0,0,\mu_{crit})} + \frac{1}{16} (f''_{xy}(f''_{xx} + f''_{yy}) - g''_{xy}(g''_{xx} + g''_{yy}) - f''_{xx}g''_{xx} - f''_{yy}g''_{yy}) \Big|_{(x,y,\mu)=(0,0,\mu_{crit})}.$$

Ekkor az origó egy kicsiny környezetében, amennyiben $|\mu - \mu_{crit}|$ is elegendően kicsiny, a kiindulási differenciálegyenlet-család viselkedése azonosnak tekinthető a polárkoordinátás alakban felírt

$$\begin{cases} \dot{r} = b(\mu - \mu_{crit})r + cr^3 \\ \dot{\varphi} = \beta \end{cases} \quad (2.29)$$

egyparaméteres differenciálegyenlet-család viselkedésével.

A $b \neq 0$, $c \neq 0$ paraméterek előjelétől függően négy eset lehetséges. A most következőkben a (2.29) egyenletrendszer vizsgáljuk, a teljes síkon. A $c > 0$ eset azt jelenti, hogy a végtelen távoli pont vonzó (és így a kérdéses periodikus pálya mindenképpen



(d) Az egyes μ értékekhez tartozó kétdimenziós ábrák a térbeli μ tengely mentén

2.5. ábra. A Hopf bifurkáció stabilitásvesztő, „nyíló virágkehely” ábrázolása

taszító). A $c < 0$ eset azt jelenti, hogy a végtelen távoli pont taszító (és így a kérdéses periodikus pálya mindenképpen vonzó). A c előjele az origó környéki viselkedést csak akkor befolyásolja, ha $\mu = \mu_{crit}$.

- $b > 0, c > 0$, például $\dot{r} = (\mu - \mu_{crit})r + r^3$
origó: stabil $\Leftrightarrow \mu < \mu_{crit}$, különben instabil
periodikus pálya: létezik $\Leftrightarrow \mu < \mu_{crit}$ és ha létezik, instabil
- $b > 0, c < 0$, például $\dot{r} = (\mu - \mu_{crit})r - r^3$
origó: stabil $\Leftrightarrow \mu \leq \mu_{crit}$, különben instabil
periodikus pálya: létezik $\Leftrightarrow \mu > \mu_{crit}$ és ha létezik, stabil
- $b < 0, c > 0$, például $\dot{r} = -(\mu - \mu_{crit})r + r^3$
origó: stabil $\Leftrightarrow \mu > \mu_{crit}$, különben instabil
periodikus pálya: létezik $\Leftrightarrow \mu > \mu_{crit}$ és ha létezik, instabil

- $b < 0, c < 0$, például $\dot{r} = -(\mu - \mu_{crit})r - r^3$
origó: stabil $\Leftrightarrow \mu \geq \mu_{crit}$, különben instabil
periodikus pálya: létezik $\Leftrightarrow \mu < \mu_{crit}$ és ha létezik, stabil

Látjuk tehát, hogy a legtöbbet vizsgált stabilitásvesztő

$$\mu \leq \mu_{crit} \Rightarrow \text{az egyensúlyi helyzet stabilis}$$

$$\mu > \mu_{crit} \Rightarrow \begin{cases} \text{az egyensúlyi helyzet instabillá vált,} \\ \text{és arról stabil periodikus pálya fűződik le} \end{cases}$$

eset mellett még három további eset van. A $\beta \neq 0$ paraméter előjele a körbenforgás irányát határozza meg. A periodikus pálya sugara valamennyi esetben $r_0 = \sqrt{|(\mu - \mu_{crit}) \frac{b}{c}|}$.

A (2.12) esetében $\mu_{crit} = 0$, és $b = 1, c = -1$. (A $\mu_{crit} = 0$ feltevés nem jelenti az általánosság megszorítását. A $\mu_{crit} \rightarrow 0$ paraméter-eltolás matematikailag mindig lehetséges. Ha azonban a paraméter konkrét fizikai jelentést hordoz, akkor jobb annak valódi számértékét megőrizni.)

A Tétel megfogalmazásának körülményes volta nem szabad hogy bárkit is megijesszen. A bifurkálódó $P = P(\mu)$ egyensúlyi helyzet nem szükségképpen az origó, sőt maga is függhet a $\mu \in \mathbb{R}$ paramétertől. Amire szükségünk van, az síkbeli differenciálegyenletek egy, a $\mu \in \mathbb{R}$ paramétertől függő $\dot{x} = f(x, \mu)$ családjá a hozzá tartozó egyensúlyi helyzetek egy $P(\mu)$ családjával és az ott kiértékelt $A(\mu) = f'_x(P(\mu), \mu)$ Jacobi mátrixok családjával együtt. Akkor van esélyünk periodikus megoldás születésének/halálának kimutatására, ha az $A(\mu)$ mátrix sajátértékei egy $\mu = \mu_{crit}$ kritikus paraméterhez közel a $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$, $\beta(\mu) \neq 0$ konjugált komplex számok, amelyek a kritikus értéknél (a valós tengely irányába mért) nem-nulla sebességgel metszik a képzetes tengelyt:

$$\alpha(\mu_{crit}) = 0 \quad \text{és} \quad \left. \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) \right|_{\mu=\mu_{crit}} \neq 0.$$

Ha ez valóban így van, akkor — a $c \neq 0$ feltétel esetleges kivételével — a Tétel feltételei (a sík μ paramétertől függő $E(\mu) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eltolásai, majd a

$$A(\mu_{crit}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \beta(\mu_{crit}) \\ -\beta(\mu_{crit}) & 0 \end{pmatrix}$$

lineáris koordinátatranszformáció révén) teljesíthetők, sőt a

$$\beta(\mu_{crit}) = \beta \quad \text{és} \quad \left. \frac{d}{d\mu} \alpha(\mu) \right|_{\mu=\mu_{crit}} = \frac{b}{2}$$

összefüggések automatikusan teljesülnek. A $c \neq 0$ feltétel közvetlen ellenőrzése kifejezetten nehéz. Igazából nem is erre van szükségünk, hanem a c előjélére. Miért lenne egy

állandó pontosan nulla, amikor bármely más szám is lehet? Szinte kizárt, hogy nulla legyen ... hacsak azt valami belső, esetleg rejtett szimmetria ki nem kényszeríti. Annak eldöntésére, hogy a kérdéses, kicsiny átmérőjű periodikus pályák a μ_{crit} paraméter előtt vagy után lépnek fel, az esetek óriási többségében a kérdéses egyensúlyi helyzet egy kis környezetére fókuszáló numerikus szimuláció teljesen elegendő.

2.12.2. Az oszcilláló reakciók egyik alappéldája

Matematikai alappéldáról van szó, nem kémiaiáról.⁴¹ A leggyakrabban vizsgált öt két-dimenziós, autokatalitikus alappélda:

- $\varepsilon \dot{u} = u(1-u) + av \frac{b-u}{b+u}$, $\dot{v} = u - v$ ahol $0 < \varepsilon \ll 1$
— Belouszov–Zsabotyinszkij modell (Gray-féle változat)
- $\dot{u} = -(1+b)u + a + u^2v$, $\dot{v} = bu - u^2v$
— Brusselator modell
- $\dot{u} = -(a+b)u + u^2v$, $\dot{v} = -av + b - u^2v$
— Gray–Scott modell
- $\dot{u} = -u + a + u^2v$, $\dot{v} = b - u^2v$
— Schnakenberg modell
- $\dot{u} = -u + av + u^2v$, $\dot{v} = -av + b - u^2v$
— Selkov modell

⁴¹A Selkov modellt gyakran nevezik *glikolízis modellnek*, u és v változóit pedig az adenzin-difoszfát [ADP] és a fruktóz-6-foszfát [F6P] koncentrációjának: a *glycolysis* tényleges folyamatában azonban — a rövid idejű intermediereket is beszámítva — több tucat anyagfajta vesz részt. Cirkadián biokémiai reakciók is vannak, amelyek sejtszinten, napi ritmusban működnek. Mai tudásunk szerint az agyban „központi óra” dolgozik: ez a sejtcsoport néhány ezer sejtből áll, és a két látóideg kereszteződése mellett található. A működés és a szabályozás nemcsak az élőlényekben (gondolhatunk egy téli álmot alvó medvére, vagy egy véletlenszerű ritkasággal táplálkozó kígyóra), hanem még egy számítógépben is különböző időskálákon történik. Nemlineáris oszcillációkkal villamosmérnök-informatikusok és bionikusok-biotechnológusok egyaránt, ki-ki a saját szakmájában eleget találkozhat. Számomra legérdekesebbek a különböző időskálákat összekapcsoló relaxációs oszcillációk, Van der Pol, illetve FitzHugh és Nagumo megfelelő paraméterekkel ellátott matematikai modelljei-modellcsaládjai. A Belouszov–Zsabotyinszkij modell Gray-féle változata is relaxációs oszcilláció, ahol a $0 < \varepsilon \ll 1$ egyenlőtlenség a felelős a kétféle időskáláért s ennek megfelelően az u a gyors és a v a lassú változó. Oszcilláló kémiai reakciót a vegyészmérnök Noszticzius Zoltán műegyetemi laboratóriumában láttam először: a piros és a kék percenkénti színváltozását egy olyan homogén oldatban, ahol szemmel láthatóan semmi más megfigyelhető sem történt. Igazán szép volt. Két lenyűgöző oszcillációs élményem is van, az egyik egy fiatal fecskokolónia, amint a kötelékben való repülés térbeli nyolcasait gyakorolja a sienai Piazza del Duomo fölött, a másik klorofilltestek rendezett, periodikus mozgása egyetlen zöldmoszat-sejtben, mikroszkóp alatt: negyven sötétzöld golyóbis masírozik egy halványzöld lavór pereme mentén.

Közülük a Schnakenberg modellt választjuk. Az $a, b > 0$ paraméterek közül az a -t rögzítjük, a $b = \mu$ paramétert változtatjuk.

2.72. Példa Legyen $a = \frac{1}{8}$. A $0 < \mu < 1$ paramétertartományban vizsgáljuk a

$$\dot{x} = a - x + x^2y \quad , \quad \dot{y} = \mu - x^2y \quad (2.30)$$

síkbeli differenciálegyenlet egyensúlyi helyzeteit és periodikus megoldásait.

Az egyensúlyi helyzetek egyenletrendszerének egyetlen megoldása van:

$$\left. \begin{array}{l} a - x + x^2y = 0 \\ \mu - x^2y = 0 \end{array} \right\} + \Rightarrow a + \mu - x = 0 \quad \text{és így} \quad P = P(\mu) = \left(\begin{array}{l} a + \mu \\ \frac{\mu}{(a + \mu)^2} \end{array} \right).$$

A Jacobi mátrixot is könnyű meghatározni:

$$J = \left(\begin{array}{cc} -1 + 2xy & x^2 \\ -2xy & -x^2 \end{array} \right), \quad \text{speciálisan} \quad J(P) = \left(\begin{array}{cc} -1 + 2\frac{\mu}{a + \mu} & (a + \mu)^2 \\ -2\frac{\mu}{a + \mu} & -(a + \mu)^2 \end{array} \right).$$

A $J(P)$ Jacobi mátrix determinánsa és nyoma:

$$D = (a + \mu)^2, \quad T = \frac{\mu - a - (a + \mu)^3}{a + \mu}.$$

Az a konkrét értéke illetve a μ paraméterre megadott korlátok miatt $D > 0$. A nyomdetermináns diagramról tanultak szerint a P egyensúlyi nem lehet nyeregpont, csak — a $T = 0$ és a $4D = T^2$ átmeneti eseteket leszámítva — fókusz illetve csomó. Mivel

$$T = T(\mu) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu - a - (a + \mu)^3 > 0$$

és mert a $g: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mu \rightarrow \mu - a - (a + \mu)^3$ harmadfokú parabolára $a = \frac{1}{8}$ mellett $g(0) < 0$, $g(\frac{1}{2}) > 0$ és $g(1) < 0$, a $P(\mu)$ egyensúlyi helyzet pontosan akkor lesz taszító, ha $\mu \in (\mu_1, \mu_2)$, ahol $\mu_1 = 0.144\dots$ és $\mu_2 = 0.712\dots$ a g harmadfokú parabola gyökei a $(0, \frac{1}{2})$ illetve az $(\frac{1}{2}, 1)$ intervallumokon. (A g harmadik gyöke negatív szám, hiszen $\mu \rightarrow -\infty$ esetén $g(\mu) \rightarrow \infty$ és $g(0) < 0$.) Mindez kétszeri Hopf bifurkációt jelent, a $\Gamma(\mu)$ periodikus görbecsalád születését és halálát⁴²:

⁴²amit biztosan tudunk, az a következő: a $0 < \mu < 1$ paraméter növelésénél a $J(P(\mu))$ Jacobi mátrix sajátértékei a $\mu = \mu_1$ -nél balról jobbra átmennek a képzetes tengelyen, majd a $\mu = \mu_2$ -nél vissza is mennek. A matematikai szigorúság elvben megköveteli a $b \neq 0$ és a $c \neq 0$ feltételek ellenőrzését is. (A b paraméterrel nem nehéz elbánni:

$$b = \frac{d}{d\mu} T(\mu) \Big|_{\mu=\mu_{krit}} = \frac{d}{d\mu} \left(\frac{\mu - a - (a + \mu)^3}{a + \mu} \right) \Big|_{\mu=\mu_{1,2}} = \frac{2a - 2(a + \mu_{1,2})^3}{(a + \mu_{1,2})^2} = \frac{4a - 2\mu_{1,2}}{(a + \mu_{1,2})^2},$$

ami nem nulla (és ahogy várjuk, a $\mu = \mu_1$ esetben pozitív, a $\mu = \mu_2$ esetben negatív). A c kiszámítása azonban roppant keserves. Bele se kezdjünk ...) De az eddigi információk már bőven elegendők ahhoz, hogy a számítógéppel milyen jellegű ellenőrző-megerősítő kísérleteket végezzünk.

- $0 < \mu < \mu_1$: $P(\mu)$ aszimptotikusan stabil
- $\mu = \mu_1$: $P(\mu)$ elveszti stabilitását
- $\mu_1 < \mu < \mu_2$: A $P(\mu)$ egyensúlyi helyzet taszít és a 2.71. Tétel szerint a $0 < \mu - \mu_1 \ll 1$ és a $0 < \mu_2 - \mu \ll 1$ paraméter-értékekre a $P(\mu)$ egyensúlyi helyzetet egy $\Gamma(\mu)$ stabil periodikus görbe öleli körül
- $\mu = \mu_2$: $P(\mu)$ visszanyeri stabilitását
- $\mu_2 < \mu < 1$: $P(\mu)$ aszimptotikusan stabil

Kézenfekvő arra gondolnunk, hogy a $\mu = \mu_2$ -nél ugyanaz a periodikus görbecsalád hal meg, mint amelyik a $\mu = \mu_1$ -nél megszületett. Felállítjuk tehát a következő munkahipotézist, amelyet számítógépes kísérletekkel ellenőrzünk:

- $0 < \mu < \mu_1$: $P(\mu)$ aszimptotikusan stabil
- $\mu = \mu_1$: $P(\mu)$ elveszti stabilitását
- $\mu_1 < \mu < \mu_2$: A $P(\mu)$ egyensúlyi helyzet taszít és a $P(\mu)$ egyensúlyi helyzetet a $\Gamma(\mu)$ stabil periodikus görbe öleli körül
- $\mu = \mu_2$: $P(\mu)$ visszanyeri stabilitását
- $\mu_2 < \mu < 1$: $P(\mu)$ aszimptotikusan stabil

Végül is rábízzuk magunkat a számítógépre. Céltalan hajósnak azonban nincs kedvező szele, bárhonnán fújjon is. Ha nem is sejtjük, mit keresünk, akkor nehéz dolgunk van. Természetesen az ellenőrző–megerősítő kísérletek mellett sokszor van szükség tapogatózó–felderítő kísérletek végzésére is. De vakon próbálkozni nagyon kockázatos: másra is szükség van. A matematikai érvelés és a számítógépes tapasztalat együttesen egyre erősödő bizonyossághoz vezet: a munkahipotézis igaz.

Az előző példa folytatásaként most matematikai érvekkel is alátámasztjuk azt eredményt, amelyet a számítógépes kísérletek során nyertünk: A $P(\mu)$ egyensúlyi helyzetet a $\mu_1 < \mu < \mu_2$ paraméter-értékekre a $\Gamma(\mu)$ periodikus görbecsalád öleli körül. Ennél többet kaptunk: a számítógépes tapasztalat azt mutatja, hogy a kérdéses görbecsalád tagjain kívül további periodikus megoldások már nincsenek.

Gondolatmenetünk a Ljapunov típusú érvelések szép példájaként elvezet annak matematikai bizonyításához, hogy a (2.30) egyenletnek az $a = \frac{1}{8}$ és a $\mu_1 < \mu < \mu_2$ paraméterek esetén van olyan periodikus megoldása, amely a $P(\mu)$ egyensúlyi helyzetet körülöleli. Ehhez elegendő megkeresnünk egy, a $P(\mu)$ egyensúlyi helyzetet belsejében tartalmazó csapdahalmazt. Először vízszintes–függőleges téglalapokkal próbálkozunk, hátha találunk közöttük megfelelőt. Az y tengely pontjaiban $\dot{x} = (a - x + x^2y)|_{x=0} = a > 0$, a trajektóriák

az y tengelyt balról jobbra metszik. Az x tengely pontjaiban $\dot{y} = (\mu - x^2y)|_{y=0} = \mu > 0$, a trajektóriák az x tengelyt lentről felfelé metszik. Idáig remek, máris kijött, hogy az \mathbb{R}_+^2 síknegyed pozitíven invariáns. Ha $x=d>0$, akkor $\dot{x} = (a - x + x^2y)|_{x=d} = a - d + d^2y$: a várt $\dot{x} < 0$ egyenlőtlenség nem teljesül. Talán az $y = e > 0$ választással nagyobb szerencsénk lesz. Kapjuk, hogy $y = e > 0$ esetén $\dot{y} = (\mu - x^2y)|_{y=e} = \mu - x^2e$, ami $0 < x \ll 1$ esetén biztosan > 0 , viszont $x \gg 1$ esetén már < 0 . Ebbe az észrevételbe belekapaszkodunk. Megnézzük, meddig hozhatjuk jobbra a függőleges oldalegyenest. Ha $x=a$, akkor a $P(\mu)$ egyensúlyi helyzettől még mindig balra vagyunk, s mégis $\dot{x} = (a - x + x^2y)|_{x=a} \geq 0$ minden $y \geq 0$ esetén. Az $y = e$ egyenes $x \geq a$ részén $\dot{y} = (\mu - x^2y)|_{y=e} = \mu - x^2e \leq 1 - a^2e$, ami bőven negatív, ha e elég nagy (amúgy is elég nagy kell legyen, hiszen a remélt téglalapnak tartalmaznia kell a $P(\mu)$ pontot s így három oldalegyenes már rendben is van). A negyedik azonban csak nem akar stimmelni, hiszen $\dot{x} = (a - x + x^2y)|_{x=d} = a - d + d^2y$ pozitív, ha az y (és az e) csak kicsit is nagy (a domináns tényező mindkét koordinátában x^2y : a vektormező a \mathbb{R}_+^2 síknegyed majd minden pontjában szinte párhuzamos az $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektorral). Tehát a negyedik oldalegyenes nem lehet függőleges, a csapdahalmaz nem lehet téglalap. Akkor legyen trapéz. Próbálkozzunk egy $x + y = f$ egyenessel, és nézzük meg, hogy ezt az egyenest (a $0 \leq y \leq e$ sávban a trajektóriák melyik irányba metszik. A normálvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, amelynek a (2.30) rendszer által meghatározott vektormezővel vett skaláris szorzata:

$$(1, 1) \begin{pmatrix} a - x + x^2y \\ \mu - x^2y \end{pmatrix} \Big|_{x+y=f} = a + \mu - x, \quad \text{ami} < 0 \text{ ha } x > a + \mu.$$

A negatív előjelre van szükségünk, ekkor van ugyanis tompaszög a vektormező és a normálvektor között: pontosan *ekkor mutat a vektormező a trapéz ferde oldalszakaszán a trapéz belseje felé*. Ha $f = a + \mu + e + \varepsilon$ (ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges), akkor a $0 \leq y \leq e$ sávban $x \geq a + \mu + \varepsilon > a + \mu$. A csapdahalmazt tehát trapéznek sikerült választanunk, melynek csúcsai

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a + \mu + \varepsilon \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a + \mu + \varepsilon + e \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

ahol $e > \frac{1}{a^2}$, az e -re vonatkozó egyenlőtlenség élesre állításával. Igazából az $e = \frac{1}{a^2}$ választás is lehetséges. A trapéz — jelöljük K -val —, a K trapéz jobb felső csúcs(pontj)ában a vektormező a jobb alsó csúcs felé mutat, a trapéz bal felső csúcsában pedig a jobb felső csúcs felé. Ezt a két pontot leszámítva a trapéz oldalainak minden pontjában a trapéz belseje felé mutat. Ezekből a csapdahalmazokról szóló a 2.47. Tétel

$$\Phi(t, \partial K) \subset \text{int}(K) \quad \text{minden } t > 0 \text{ esetén}$$

feltétele már következik. A kívánt csapdahalmazt sikerült megkonstruálnunk.

Magától értetődik, hogy $P(\mu) \in \text{int}(K)$, s mivel $\mu_1 < \mu < \mu_2$ esetén a $P(\mu)$ egyensúlyi helyzet taszít, az attól eltávolodó trajektóriák — hiszen a K trapézból nem léphetnek ki s második egyensúlyi helyzet nem lévén, a 2.39. Tétel miatt — egy közös $\Gamma = \Gamma(\mu)$

periodikus pályához tartanak. Az érvelés a trapéz ∂K határán lévő pontok mindegyikére is alkalmazható: ezek is olyan pontok, amelyek omega-határhalmaza egy közös $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}(\mu)$ periodikus pálya a K belsejében. A numerikus szimulációk azt mutatják, hogy $\tilde{\Gamma}(\mu) = \Gamma(\mu)$, de az absztrakt elméletből csak annyi következik, hogy $\Gamma(\mu)$ a legbelső, $\tilde{\Gamma}(\mu)$ pedig a legkülső periodikus pálya a K halmazban. Periodikus pályák unicitásának matematikai bizonyítása az egzisztencia-bizonyításoknál sokkal rázószabb feladat.

Továbbra is a $\mu_1 < \mu < \mu_2$ esetről maradva, az eddigiekhez hasonló érvelés azt is kiadja, hogy előbb-utóbb a (2.30) egyenlet valamennyi trajektóriája bejut a K halmazba. Tehát a $\tilde{\Gamma}(\mu) = \Gamma(\mu)$ periodikus pálya és belsejének uniója együtt, mint korlátos zárt halmaz a (2.30) egyenlet egész síkra vonatkozó globális attraktora.

Autonóm differenciálegyenletek aszimptotikusan stabil periodikus pályáit az alkalmazott tudományokban határciklusoknak nevezik. A $\tilde{\Gamma}(\mu) = \Gamma(\mu)$ periodikus pálya (amennyiben az unicitást mint numerikus tapasztalatot elfogadjuk) is *határciklus*.

2.12.3. A kémiai kinetika sztöchiometriai alapegyenleteinek felírása

Matematikailag már egyetlen, összetett példa is elmond mindent:

$$\alpha X + \beta Y \xrightarrow{k} \gamma X + \delta Z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = (\gamma - \alpha)kx^\alpha y^\beta + \dots \\ \dot{y} = -\beta kx^\alpha y^\beta + \dots \\ \dot{z} = \delta kx^\alpha y^\beta + \dots \end{cases}$$

Itt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pozitív egészek, $k > 0$ valós szám.

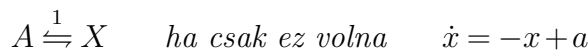
A (2.30) egyenlet részletes levezetése:

$$\left. \begin{array}{lll} A \xrightarrow{1} X & \text{ha csak ez volna} & \dot{a} = -x, \quad \dot{x} = a \\ 2X \xrightarrow{1} X & \text{ha csak ez volna} & \dot{x} = -x \\ B \xrightarrow{1} Y & \text{ha csak ez volna} & \dot{b} = -y, \quad \dot{y} = b \\ 2X + Y \xrightarrow{1} 3X & \text{ha csak ez volna} & \dot{x} = x^2 y, \quad \dot{y} = -x^2 y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \dot{a} = -x, \quad \dot{x} = a - x + x^2 y, \quad \dot{b} = -y, \quad \dot{y} = b - x^2 y.$$

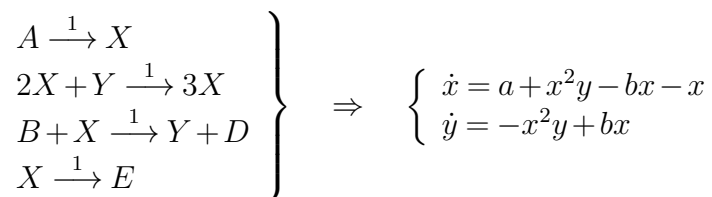
Az a és b változókat konstansnak tekintve, más szóval az A és a B anyagok koncentrációját állandónak tartva (ez „magától” így van, ha a kiindulási A és B anyagok nagy, a keletkező X és Y anyagok pedig csak roppant kis mennyiségben vannak jelen), a belső reaktánsokra Schnakenberg (2.30) egyenletrendszerére adódik. A negyedik, utolsó reakció autokatalitikus. Ne okozzon senkiben zavart, hogy az összes reakció-állandót — a \rightarrow feletti számok mindegyikét — 1-nek vettük.

2.73. Megjegyzés Az első három „magányos” differenciálegyenlet levezetése — meglehetősen megengedhetetlenül matematikus. Az első két reakció helyett a kémiai kinetika tankönyvei az



reverzibilis reakciót szerepeltetik, amelyhez csak egyetlen differenciálegyenletet rendelnek hozzá.

2.74. Példa Búcsúzóul a Brusselator példa szokásos levezetése:



És még egy szempont, a $[0, \infty)^d = \mathbb{R}_+^d$ pozitív ortáns pozitív invarianciája, amely minden sztöchiometriai differenciálegyenlet-rendszer közös tulajdonsága. Az ok egyszerű: a *negatív keresztthatások* hiánya. Bármely anyagfajta mennyisége csak azáltal csökkenhet, ha az eredetileg is volt, és résztvesz egy elemi reakcióban. Hogy konkrét példát mondjak, a negatív előjelű $-x^2y$ tag csak az x és/vagy az y változókra felírt, tehát az \dot{x} -tal és/vagy az \dot{y} -tal kezdődő egyenletek jobb oldalán fordulhat elő. Ugyanez az érvelés adja ki, hogy

$$\dot{x}_k = \beta_k(x_1, x_2, \dots, x_d) \quad \text{és} \quad \beta_k(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{ha} \quad \mathbf{x} \in \partial\mathbb{R}_+^d, \quad k = 1, 2, \dots, d$$

esetén \mathbb{R}_+^d pozitíven invariáns halmaz.

Itt jegyezzük meg, hogy a (3.31) Kolmogorov rendszer esetén \mathbb{R}_+^d és $\partial\mathbb{R}_+^d$ egyaránt invariáns halmazok.

Egy kémiai reakció térbeliségét általában diffúziós tagok hozzáadásával szokás figyelembe venni. Az előző alfejezet legelején ismertetett öt példa mindegyike az

$$u'_t = f(u, v) + d_1 \Delta u \quad , \quad v'_t = f(u, v) + d_2 \Delta v$$

alakú reakció–diffúzió egyenletrendszerre vezet (itt $d_1, d_2 > 0$ a diffúziós együtthatók), amelyben kedvünkre kereshetünk bifurkációkat, utazó hullámokat, mintázatokat.

2.13. Függelék 4.)

A legegyszerűbb bifurkációk listája. Leképezések bifurkációi

Jóllehet a bifurkáció fogalmát nem-lokálisan, a fázisportré egy korlátos és nyílt H halmazán definiáltuk, a könnyen tetten érhető bifurkációkban megjelenő új minőség lokális, és leggyakrabban egyetlen egyensúlyi helyzet vagy egyetlen periodikus pálya stabilitási tulajdonságainak megváltozásával függ össze.

Egyensúlyi helyzetek stabilitásvesztő bifurkációinak alaptípusai:

2.75. Példa *A bifurkációs paraméter kritikus értéke mind a négy esetben $\mu_{crit} = 0$.*

- $\dot{x} = -\mu - x^2$ nyereg-csomó (saddle-node) bifurkáció — $d = 1$
- $\left. \begin{array}{l} \dot{x} = \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{array} \right\}$ Hopf (Hopf) bifurkáció — $d = 2$
- $\dot{x} = \mu x - x^2$ transzkritikus (transcritical) bifurkáció — $d = 1$
- $\dot{x} = \mu x - x^3$ vasvilla (pitchfork) bifurkáció — $d = 1$

A bifurkáció megnevezése utáni d az a lehetséges legkisebb dimenzió, amelyben az illető bifurkáció típusa megvalósulhat.

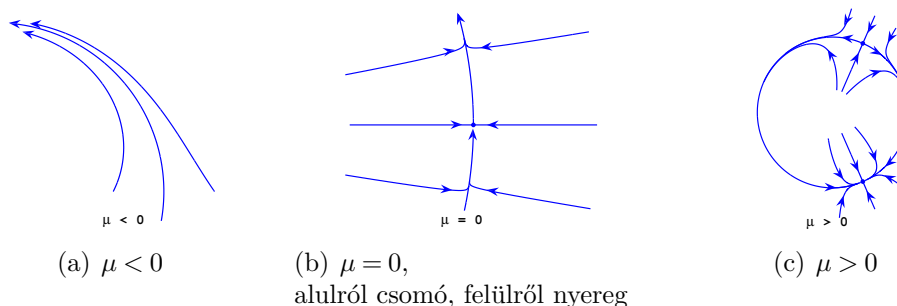
Közülük a Hopf bifurkációt már részletesen tárgyaltuk. A polárkoordinátás felírás $\dot{r} = \mu r - r^3$, $\dot{\varphi} = -1$ egyenletrendszeréből jobban látszik, hogy a 4×2 előjel-kombinációnak megfelelően 4×2 alesettel van dolgunk, amelyek egymáshoz képest

- az idő iránya: $\frac{d}{dt}r = \mu r - r^3$ és $s = -t$, $r(s) = \rho(t) \Rightarrow \frac{d}{ds}\rho = -\mu\rho + \rho^3$
- a paraméter előjele: $\dot{r} = \mu r - r^3$ és $\nu = -\mu \Rightarrow \dot{r} = -\nu r - r^3$
- a körbeforgás iránya: $\dot{\varphi} = -1$ és $\varphi = -\theta \Rightarrow \dot{\theta} = 1$

szempontjából különböznek. A kompakt $\dot{r} = \pm\mu r \pm r^3$, $\dot{\varphi} = \pm 1$ felírás mind a nyolc esetet tartalmazza. Amire ténylegesen figyelniük kell, azok a konkrét történések: az egyensúlyi helyzet és a periodikus pálya „sorsa” — keletkezés, megszűnés, stabillá vagy instabillá válás — abban a folyamatban, amikor a μ paraméter fokozatosan növekedve áthalad a kritikus $\mu = \mu_{crit} = 0$ értéken. Ugyanez a teendő a $\dot{x} = \pm\mu \pm x^2$, $\dot{x} = \pm\mu x \pm x^2$, $\dot{x} = \pm\mu x \pm x^3$ esetek vizsgálatakor.

A 2.75. Példa előjelválasztásaiban az a közös, hogy a $\mu < 0 \rightarrow \mu > 0$ átmenetnél a vizsgált egyensúlyi helyzet elveszti stabilitását. Transzkritikus bifurkációnál az $x_0 = 0$ és az $x_0 = \mu$ egyensúlyi helyzetek egy pillanatra összeolvadnak, majd „stabilitást cserélve”

újából szétválnak. Nyereg-csomó bifurkációs példánkban (a $\mu < 0$ paraméterekre létező) $x_0 = \sqrt{-\mu}$ vonzó és az $x_0 = -\sqrt{-\mu}$ taszító egyensúlyi helyzetek a összeolvadás után kioltják egymást. A vasvilla és a Hopf bifurkációs példánál az origó mint egyensúlyi helyzet $\mu \leq 0$ stabilitása áttevődik az onnan lefüződő $\pm\sqrt{\mu}$ egyensúlyi helyzet-párra illetve az $r_0 = \sqrt{\mu}$ periodikus pályára: maga az origó instabillá válik.



2.6. ábra. Nyereg-csomó bifurkáció a (2.32) egyenletrendszer-pár jobb oldali tagjának egységköre mentén

A *nyereg-csomó bifurkáció* elnevezést akkor érthetjük meg csak igazán, ha megrajzoljuk az

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{array} \right\} \text{ és az } \left. \begin{array}{l} \dot{r} = r(1-r) \\ \dot{\varphi} = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \mu \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

differenciálegyenletek fázisportréit a $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$ paraméterértékekre. A tényleges nyereg-csomó bifurkáció az $y=0$ tengelyen, illetve az $r=1$ körvonalon, mint egydimenziós invariáns halmazokon megy végbe. Különösen a második feladat tanulságos, mert ott a $\mu_{crit}=0$ paraméternél keletkező $r=1$, $\varphi=0$ egyensúlyi helyzet vonzó (az origót leszámítva a teljes sík minden pontját aszimptotikusan magához vonzza) de nem stabil.

Periodikus megoldások bifurkációt úgy szokás megadni, mint a hozzájuk tartozó $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ Poincaré követőfüggvények bifurkációit. A ténylegesen vizsgálandó periodikus megoldásoknak a követőfüggvény fixpontjai felelnek meg. A Σ Poincaré metszősík helyett \mathbb{R}^{d-1} , π helyett F írható. Így autonóm differenciálegyenletek periodikus megoldásainak bifurkációi helyett leképezések fixpontjaira vonatkozó bifurkációkkal van dolgunk.

Periodikus megoldások stabilitásvesztő bifurkációi tehát az $F : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ leképezés fixpontjainak stabilitásvesztő bifurkációival azonosíthatók. Az alaptípusok:

2.76. Példa A $-1 < \mu < 1$ bifurkációs paraméter kritikus értéke mind az öt esetben $\mu_{crit} = 0$. A *p.mo.v. rövidítés feloldása* periodikus megoldásra vonatkozó. *Feltesszük, hogy $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ és azt is, hogy $0 < q < 1$.*

- $F(x) = x - \mu - x^2$ p.mo.v. nyereg-csomó bifurkáció — $d = 2$

- $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\theta) + y(1+\mu) \sin(\theta) - x(x^2+y^2) \\ -x(1+\mu) \sin(\theta) + y \cos(\theta) - y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ *p.mo.v. tórusz (Naimark–Sacker) bifurkáció* — $d = 3$
- $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - \mu x + x^3 \\ -qy \end{pmatrix}$ *p.mo.v. periódus-kettőző (period doubling) bifurkáció* — $d = 3$
- $F(x) = x + \mu x - x^2$ *p.mo.v. transzkritikus bifurkáció* — $d = 2$
- $F(x) = x + \mu x - x^3$ *p.mo.v. vasvilla bifurkáció* — $d = 2$

A bifurkáció megnevezése utáni d az a lehetséges legkisebb dimenzió, amelyben az illető bifurkáció mint periodikus megoldásra vonatkozó bifurkáció megvalósulhat.

A *periodus-kettőző bifurkáció* $F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x) \\ H(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - \mu x + x^3 \\ -qy \end{pmatrix}$ leképezése szorzat alakú, ahol $G, H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egydimenziós leképezések. A periódus-kettőző bifurkációt a

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow -x - \mu x + x^3$$

leképezés már önmaga is megvalósítja, de csak a számegegyenesen értelmezett diszkrét idejű (semi)dinamikában. Az origó környékén G nemlineáris tükrözés. Dinamikáját a fixpontok „kormányozzák”. Természetesen az $x^* = 0$ fixpont. Ez az $x^* = 0$ fixpont $|\mu| \ll 1$ esetén izolált — a G leképezésnek vannak más fixpontjai is, de az origótól távol. Mivel $G'(x^*) = -1 - \mu$, $-1 < \mu < 0$ esetén x^* stabil/vonzó, $0 < \mu < 1$ esetén instabil/taszító.

Az igazán érdekes az, hogy

$$\begin{aligned} G(x) = -(1+\mu)x + x^3 &\Rightarrow \mathcal{G}(x) = G(G(x)) = -(1+\mu)G(x) + (G(x))^3 \\ &\Rightarrow \mathcal{G}(x) = (1+\mu)^2 x - (1+\mu)x^3 + (-(1+\mu)x + x^3)^3 \approx (1+2\mu)x - 2x^3 \end{aligned}$$

szerint a G leképezés önmagával vett $\mathcal{G} = G \circ G$ kompozíciójának $0 < \mu \ll 1$ esetén három fixpontja is van az origó közvetlen közelében. Az egyik fixpont természetesen az origó maga, $x^*_0 = x^* = 0$, a másik kettő pedig jó közelítéssel az $x = (1+2\mu)x - 2x^3$ fixpont-egyenlet két további megoldásaként $x^*_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$. Az egyes fixpontokban a deriváltak jó közelítéssel

$$\mathcal{G}'(x^*_0) = 1 + 2\mu > 1, \quad \text{illetve} \quad \mathcal{G}'(x^*_{1,2}) = 1 + 2\mu - 6x^2|_{x=\pm\sqrt{\mu}} = 1 - 4\mu < 1.$$

Tehát a \mathcal{G} leképezésnek $x^*_0 = 0$ instabil fixpontja (ezt számolás nélkül is tudhattuk volna: hiszen a G -nek is az), $x^*_{1,2}$ pedig stabil fixpontjai. Mit jelent ez magára a G leképezésre nézve? A \mathcal{G} fixpontjai G kettő-periódusú pontjai. Közöttük vannak a G fixpontjai is: esetükben a minimális periódus egy. Az $x^*_{1,2}$ pontok nem fixpontok, ezért a periódus-kettőződés: $G(x^*_1) = x^*_2 \neq x^*_1$, $G(G(x^*_1)) = x^*_1$. Ha az eddigiekkel ellentétben $-1 \ll \mu < 0$, akkor a \mathcal{G} leképezésnek az origó egy kis környezetében egyetlen fixpontja van, maga az origó.

Az F leképezés G koordinátafüggvénye csak az x , H koordinátafüggvénye csak az y változótól függ, ez utóbbi a μ értékétől is független tükrözéses kontrakció, $H(y) = -qy$, $-1 < -q < 0$. Mind a G (már amennyiben $\mu > -1$), mind a H megváltoztatják a számegyenes irányítását. Most már sejtjük, mi szükség volt a második koordinátára. A G leképezés önmagában, síkbeli periodikus pálya Poincaré követőfüggvényeként nem realizálható. A formális ok a 2.70. Tétel. Az G leképezés fixpontja $x^* = 0$ és az ottani sajátérték $G'(x^*) = -1 - \mu < 0$, amely Poincaré követőfüggvényről lévén szó⁴³, Floquet sajátérték. De akkor a $\kappa_1 = -1 - \mu < 0$ nem lehet egyedül. Szükség van legalább még egy másikra is: ez az algebrai válasz. A geometriai válasz látványosabb is, érthetőbb is: a Möbius szalag nem fér el a síkban.

A $\Gamma(\mu) \subset \mathbb{R}^3$, $\mu < 0$ periodikus pálya stabilitása tehát a bifurkációs paraméter $\mu \rightarrow \mu_{crit} = 0 \rightarrow \mu$ változtatásakor áttevődött egy, a $\Gamma(0)$ periodikus pályáról lefűződő, nagyjából kétszer akkora periódusidejű $\gamma(\mu)$, $\mu > 0$ periódusú pályára. A bifurkáció a $\Gamma(\mu)$, $\mu > 0$ periódusú pályák $\kappa_1 = -1 - \mu$, $|\kappa_1| > 1$ instabil sajátértékéhez tartozó kétdimenziós (a másik dimenziót a körbeforgás adja), a μ paraméterrel együtt maga is lassan változó és nagyobbodó $\mathcal{M}^u(\Gamma(\mu))$ instabil sokaságán valósul meg. Ez az instabil sokaság Möbius szalag: „egyetlen darabból álló” pereme van, maga a $\gamma(\mu)$ periodikus pálya (hiszen $\kappa_1 < 0$ miatt a Poincaré követőfüggvény egy körbefordulás után „tükrösen” jön vissza). Eközben a $\kappa_2 = -q$ sajátérték a $|q| < 1$ választás miatt végig stabil maradt. A bifurkálódó $\Gamma(0)$ periodikus pálya a $\mu > 0$ paraméterértékekre tehát kétféleképpen folytatódik: egyrészt (a lényegében változatlan forgási idejű és) nyeregszerűen instabil $\Gamma(\mu)$, $\mu > 0$ periodikus pályacsaládban, másrészt a mintegy kétszer akkora periódusidejű és aszimptotikusan stabil $\gamma(\mu)$, $\mu > 0$ periodikus pályacsaládban.

Ehhez képest a tórusz, vagy más néven Naimark–Sacker bifurkáció sokkal könnyebben érthető: ami a Poincaré metszősíkon invariáns kör, az a periodikus pálya körül invariáns tórusz. A diszkrétizált Hopf bifurkációnál már alkalmazott (2.14)–(2.15) számolást utánozva nem nehéz megkapnunk az invariáns kör, illetve tórusz $r_0 = r_0(\mu)$ sugarát is. A radiális szimmetriát használva, az $R^2 = X^2 + Y^2$ és $r^2 = x^2 + z^2$ jelölésekkel

$$R^2 = r^2 \cos^2(\theta) + (1 + \mu)^2 r^2 \sin^2(\theta) - 2r^4 \cos(\theta) + r^6.$$

Az origó közelében maradva, a $|\mu| \ll 1$ paraméterekre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} R = r > 0 &\Leftrightarrow r^4 - 2r^2 \cos(\theta) + (2\mu + \mu^2) \sin^2(\theta) = 0 \\ \Rightarrow (r_0^2(\mu))_{1,2} &= \cos(\theta) \pm \sqrt{\cos^2(\theta) - (2\mu + \mu^2) \sin^2(\theta)}, \end{aligned}$$

s ha $-1 \ll \mu < 0$, akkor nincs tovább, míg a $0 < \mu \ll 1$ esetben

$$r_0^2(\mu) = \cos(\theta) \left(1 - \sqrt{1 - (2\mu + \mu^2) \tan^2(\theta)}\right)$$

⁴³Az F leképezés $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ fixpontjához tartozó Jacobi mátrix természetesen (a koordináta-függvények széteső, szorzat-szerkezete miatt) diagonális. Így a sajátértékek $\kappa_1 = G'(x^*) = -1 - \mu < 0$ és $\kappa_2 = H'(y^*) = -q < 0$. A 2.70. Tételnek megfelelően $\kappa_1 \kappa_2 > 0$.

$$\Rightarrow r_0^2(\mu) \approx \cos(\theta) \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} (2\mu + \mu^2) \tan(\theta) \right) \right) \approx \mu \sin(\theta).$$

Egy kicsit megfejeelve ezt az eredményt $R > r$ ha $r_0(\mu) > r > 0$ és $r > R$ ha $r > r_0(\mu)$, tehát a $\Gamma(\mu)$ periodikus pálya $\mu < 0$ stabilitása a $\mu \rightarrow \mu_{crit} = 0 \rightarrow \mu$ átmenetkor áttevéődik az $\mu > 0$ paraméterértékekre körülölelő és $r_0(\mu) \approx \sqrt{\mu \sin(\theta)}$ sugarú $\mathcal{T}(\mu)$ tóruszok stabilitására.

A neurális dinamikából ismert *tüzelés* (burst) jelensége mögött nagy frekvenciájú, sűrűn felcsévélt invariáns tóruszok körüli gyors trajektóriaszakaszok állnak. A *tüske* (spike) jelenséget a lassú és a gyors mozgások kétféle időskáláját természetes módon kombináló relaxációs oszcillációkkal szokás modellezni. A szinkronizáció az idegrendszerben is, elektromos áramkörökben is és a matematikában is egyaránt szinkronizáció, de attól még mindhárom szakmában titokzatos marad.

A most felsorolt stabilitásvesztő bifurkációk közös lényege az, hogy a $P(\mu)$ egyensúlyi helyzetek és a $\Gamma(\mu)$ periodikus pályák domináns (dominant), más szóval vezető (leading/principal) sajátértékei a komplex \mathbb{C} sík stabil tartományából a paraméter μ_{crit} kritikus értékénél átjutnak az instabil tartományba. Egyensúlyi helyzetek esetén az a domináns sajátérték, amelyre $\text{Re } \lambda_k$ maximális. Periodikus pályák esetén az a domináns (Floquet) sajátérték, amelyre $|\kappa_k|$ maximális.

A stabilitás szempontjából kritikus képzetes tengelyen történő áthaladás tipikus módjai a stabilitás elvesztésekor:

- egyensúlyi helyzetek nyereg-csomó, transzkritikus, vasvilla bifurkációi:
 $\lambda(\mu) \in \mathbb{R}$ és $\lambda(\mu_{crit}) = 0$, $\lambda'(\mu_{crit}) > 0$
- egyensúlyi helyzetek Hopf bifurkációja:
 $\lambda_{1,2}(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és $\alpha(\mu_{crit}) = 0$, $\alpha'(\mu_{crit}) > 0$

A stabilitás szempontjából kritikus komplex egységkörön történő áthaladás tipikus módjai a stabilitás elvesztésekor:

- periodikus pályák nyereg-csomó, transzkritikus, vasvilla bifurkációi:
 $\kappa(\mu) > 0$ és $\kappa(\mu_{crit}) = 1$, $\kappa'(\mu_{crit}) > 0$
- periodikus pályák tórusz bifurkációja:
 $\kappa_{1,2}(\mu) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ és $|\kappa_{1,2}(\mu_{crit})| = 1$, $\frac{d}{d\mu} |\kappa_{1,2}|(\mu_{crit}) > 0$
- periodikus pályák perióduskettőző bifurkációja:
 $\kappa(\mu) < 0$ és $\kappa(\mu_{crit}) = -1$, $\kappa'(\mu_{crit}) < 0$

Ismételten utalunk rá, hogy a fenti leírás változtatás nélkül érvényes leképezések fixpontjainak bifurkációira. A perióduskettőző leképezések kaszkád sorozatai a káosz kialakulásának egyik tipikus útját kísérik.

A nyereg-csomó bifurkáció egy szempontból különleges: a bifurkálódó egyensúlyi helyzetek illetve periodikus megoldások stabil és instabil ága egyaránt a $\mu < \mu_{crit}$ (vagy a $\mu > \mu_{crit}$) paramétertartományhoz tartozik. A nyereg-csomó bifurkáció jóval gyakrabban fordul elő, mint a transzkritikus és a vasvilla bifurkáció együttléve — ennek komoly matematikai oka van, de itt és most legyen elég a számítógépes tapasztalatra hivatkozni — a vasvilla bifurkáció általában a rendszer belső szimmetriáira utal.

Egyre nagyobb természetességgel használtuk a $\lambda = \lambda(\mu)$, $\kappa = \kappa(\mu)$, sőt $P = P(\mu)$, $\Gamma = \Gamma(\mu)$, $\mathcal{M}^u(\Gamma(\mu))$ jelöléseket. Minden, ami a dinamikában előfordul, szabályosan függene a paramétereiktől? A válasz alapesetben igenlő. Mindaddig, amíg nem történik bifurkáció, a $\mu \rightarrow \text{Objektum}(\mu)$ és a $\mu \rightarrow \text{Indikátor}(\mu)$ függés reguláris.

Három egyszerű, egymással rokon állítás megerősíti ezt az intuíciót, amelynek nulladik szintjén az implicit függvény tétel jut kifejezésre.

2.77. Tétel *Legyen $f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$ C^1 függvény és tekintsük a $\dot{x} = f(x, \mu)$ differenciálegyenletek családját.*

A.) *Tegyük fel, hogy egy $\mu = \mu_0 \in \mathbb{R}^k$ paraméterértéknél $f(x_0, \mu_0) = 0$ és azt is, hogy az $f'_x(x_0, \mu_0)$ Jacobi mátrix sajátértékei között a $\lambda = 0$ szám nem szerepel. Ekkor az $x_0 = P(\mu_0)$ egyensúlyi helyzet a $\{\mu \in \mathbb{R}^k \mid |\mu - \mu_0| \ll 1\}$ paraméterekre egyértelműen és C^1 módon folytatható ki egyensúlyi helyzetek egy $P(\mu)$ családjává.*

B.) *Tegyük fel, hogy egy $\mu = \mu_0 \in \mathbb{R}^k$ paraméterértéknél Γ_0 olyan periodikus megoldás, amelynek Floquet sajátértékei között a $\kappa = 1$ szám nem szerepel. Ekkor a $\Gamma_0 = \Gamma(\mu_0)$ periodikus megoldás a $\{\mu \in \mathbb{R}^k \mid |\mu - \mu_0| \ll 1\}$ paraméterekre egyértelműen és C^1 módon folytatható ki periodikus megoldások egy $\Gamma(\mu)$ családjává.*

C.) *Tegyük fel, hogy a $\mu \in \mathbb{R}^k$ paraméterezéssel ellátott C^1 mátrixcsalád $A(\mu_0)$ tagjának (a $\mu = \mu_0 \in \mathbb{R}^k$ paraméterértéknél vett tagjának) egy $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ szám egyszeres sajátértéke. Ekkor a $\lambda_0 = \lambda(\mu_0)$ sajátérték a $\{\mu \in \mathbb{R}^k \mid |\mu - \mu_0| \ll 1\}$ paraméterekre egyértelműen és C^1 módon folytatható ki az $A(\mu)$ mátrixok sajátértékeinek egy $\lambda(\mu)$ családjává.*

Bizonyítás. Csak a legutolsó állítást igazoljuk, mert az a legegyszerűbb. (A kérdéses mátrixcsalád leginkább $A(\mu) = f'_x(P(\mu), \mu)$ vagy $A(\mu) = F'_x(P(\mu), \mu)$ alakú, attól függően hogy paraméterekkel ellátott autonóm differenciálegyenlet egyensúlyi helyzeteit vagy egy paraméterekkel ellátott leképezés fixpontjait vizsgáljuk.) Tekintsük a

$$p(\lambda, \mu) = 0 \text{ egyenletet, ahol } p(\lambda, \mu) = \det(\lambda I - A(\mu)), \lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{R}^k.$$

Mivel λ_0 az $A(\mu_0)$ sajátértéke, a $p(\lambda, \mu_0)$ polinomból a $(\lambda - \lambda_0)$ gyöktényező kiemelhető. Ami marad, eggyel kisebb fokszámú $q(\lambda)$ polinom, ahol $q(\lambda_0) \neq 0$, hiszen a λ_0 sajátérték egyszeres volt. Így $p(\lambda_0, \mu_0) = 0$ és

$$p'_\lambda(\lambda_0, \mu_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda} ((\lambda - \lambda_0)q(\lambda))|_{\lambda=\lambda_0} = (q(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)q'(\lambda))|_{\lambda=\lambda_0} = q(\lambda_0) \neq 0,$$

tehát az implicit függvény tétel feltételei teljesülnek: a $p(\lambda, \mu) = 0$ egyenletből az első változó $\lambda = \lambda(\mu)$, $|\mu - \mu_0| \ll 1$ alakban kifejezhető. Az eredmény lokális jellegű, és a $\lambda_0 = \lambda(\mu_0)$ tulajdonság is lényeges. \square

Menet közben masszívan kihasználtuk a nemcsak polinomokra, hanem minden $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitikus függvényre, sőt minden $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^k -függvényre ($k \geq 1$) is érvényes *ha gyöke van, ki lehet emelni*

$$f(z) = (z - z_0)g(z) \quad \text{és} \quad f(x) = (x - x_0) \int_0^1 f'(x_0 + \vartheta(x - x_0)) d\vartheta$$

tulajdonságokat. Mi köze van ennek a két formulának egymáshoz? Talán bizony Newtonhoz és Leibnizhez is van közük? Hányszor lesz deriválható a gyöktényező kiemelése utáni másik szorzótényező? Ki lehet emelni további szorzótényezőket?

2.78. Megjegyzés *Valamennyi sajátérték (a multiplicitástól függetlenül) a paraméterek folytonos függvénye.*

De lássunk végre egy igazi példát!

2.79. Példa *Vizsgáljuk a gondosan preparált*

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \mu \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 + \frac{\mu}{12} \end{pmatrix}$$

3×3 mátrixcsalád sajátértékeit a $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében! Tényleges feladatunk a sajátértékek viselkedését leíró $\mu \rightarrow \lambda_k(\mu)$, $k = 1, 2, 3$ paraméteres görbék elemzése. A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda, \mu) = \det(A(\mu) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 & \mu \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 & -1 + \frac{\mu}{12} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(\lambda, \mu) &= -(\lambda + 1)^3 + (\lambda + 1)^2 \frac{\mu}{12} - \mu & \Rightarrow p'_\lambda(\lambda, \mu) &= -3(\lambda + 1)^2 + (\lambda + 1) \frac{\mu}{6} \\ p''_{\lambda\lambda}(\lambda, \mu) &= -6(\lambda + 1) + \frac{\mu}{6} = 0 \end{aligned}$$

Látszik, hogy $\mu = 0$ esetén a $\lambda = -1$ háromszoros gyök. A $p(\lambda, \mu) = 0$ egyenletből

$$(\lambda + 1)^3 = \mu \left(-1 + \frac{(\lambda + 1)^2}{12} \right) \Rightarrow \lambda_{1,2,3} \approx -1 + \sqrt[3]{-\mu} \quad \text{ha } \mu \approx 0.$$

Most megkeressük azokat a paraméterértékeket, amelyekhez kétszeres gyökök tartoznak:

$$\left. \begin{aligned} p'_\lambda(\lambda, \mu) &= 0 & \Rightarrow & \lambda + 1 = \frac{\mu}{18} \\ p(\lambda, \mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{\mu^3}{18^3} + \frac{\mu^2}{18^2} \cdot \frac{\mu}{12} + \mu = 0$$

$\Rightarrow \mu = 0$ ez már volt, $\mu = -108$ és $\lambda = -7$, $\mu = 108$ és $\lambda = 5$.

A $p(\lambda, \mu) = 0$ egyenlet a $(\lambda, \mu) = (5, 108)$ pont köré történő polinom-átrendezéssel⁴⁴

$$(\lambda - 5)^2 (9 + (\lambda - 5)) = (\mu - 108) \left(2 + (\lambda - 5) + \frac{1}{2}(\lambda - 5)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} \approx 5 \pm \frac{2}{9} \sqrt{\mu - 108} \quad \text{ha } \mu \approx 108.$$

A sajátértékek viselkedése a $(\lambda, \mu) = (5, 108)$ pont kis környezetében élesen elválk egymástól attól függően, hogy $\mu < 108$ vagy $\mu > 108$: konjugált komplex számok, illetve két valós szám. Ez az eredmény világosan mutatja, mennyire fontos volt a 2.77. Tétel C.) részében, hogy a sajátérték egyszeres legyen. A sajátértékek mozgása a paraméter függvényében most nem deriválható: egyszerre fentről és alulról merőlegesen a valós tengely egy pontjához, majd a pillanatnyi összeolvadás után jobbra el és balra el. Természetesen ugyanez történik a $(\lambda, \mu) = (-7, -108)$ pont kis környezetében, hiszen az egész feladat szimmetrikus a $(\lambda, \mu) = (-1, 0)$ pontra.

Most megnézzük, hogy a sajátértékek hogyan masíroznak át a képzetes tengelyen:

$$p(i\beta, \mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(i^3\beta^3 + 3i^2\beta + 3i\beta^3 + 1) + (i^2\beta^2 + 2i\beta + 1)\frac{\mu}{12} - \mu = 0$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3\beta^2 - 1 + (1 - \beta^2)\frac{\mu}{12} - \mu = 0 \\ \beta^3 - 3\beta + \beta\frac{\mu}{6} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = 0 \text{ és így } \mu_0 = -\frac{12}{11}$$

$$\text{valamint } \beta^2 = 3 - \frac{\mu}{6} \text{ és így } \mu^2 - 120\mu + 576 = 0 : \Rightarrow \mu_{1,2} = 60 \pm \sqrt{3024}.$$

A macska pofozza meg! Pedig mennyit vesződtem vele, hogy a gyök alatt tiszta négyzetszámot kapjak és tessék: eggyel mellément: $55^2 = 3025$. Ha nem is pontosan, de jó közelítéssel $\mu_1 = 5$ és $\beta^2 = \frac{13}{7}$, valamint $\mu_2 = 155$, amelyhez azonban nem tartozik valós β . Mivel $\mu = 0$ -nál mindhárom gyök a képzetes tengelytől balra van, és $\mu = 108$ -nál egy kettős gyök jobbra, az eredmény az, hogy a paraméter növelésével

- egy komplex gyökpár $\mu = 5$ -nél balról jobbra átlépi a képzetes tengelyt
- egy valós gyök $\mu = -\frac{12}{11}$ -jobbról balra átlépi a képzetes tengelyt

Teljes képet csak akkor kaphatunk, ha valamit a $\mu \rightarrow \pm \infty$ aszimptotikus viselkedésről is mondunk. Ha $|\mu| \gg 1$, akkor a $p(\cdot, \mu)$ harmadfokú polinom menetének (nagybani, durva, de nem minden ötlet nélküli) ábrázolása elárulja, hogy mindhárom gyöke valós. És

⁴⁴a kétváltozós $p(\lambda, \mu)$ függvény $(\lambda, \mu) = (5, 108)$ pont körüli Taylor sorfejtésének első néhány tagját — esetünkben a teljes Taylor sorát — számoljuk ki, ami persze a lehetséges általánosításokra is jól rámutat: de inkább egy „tele” példát lássunk, mint egy „üres” általánosítást

természetesen az is igaz, hogy páratlan fokszámú valós együtthatós polinomnak mindig van valós gyöke.

Az eddigi lokális észrevételeket (az aszimptotikus viselkedés is bizonyos értelemben lokális, hiszen a végtelen távoli pont „kicsiny” környezetére vonatkozik) a 2.77. Tétel C.) fényében immár nem nehéz összerakni a teljes képpé.

Mivel valódi komplex gyök csak akkor válhat valóssá, ha kétszeres, ugyanaz a komplex gyökpár fut össze $(\lambda, \mu) = (5, 108)$ -nál, mint amelyik a $\lambda = -1$ pontból ± 60 fokos szög alatt jobbra indult, s amely destabilizálódott $\mu = 5$ -nél. A $\lambda = -1$ pontból ± 60 fokos szög alatt balra induló komplex gyökpár $(\lambda, \mu) = (-7, -108)$ -nél éri el újból a valós tengelyt. Összességében a komplex sajátértékek a \mathbb{C} komplex síkon egy lemniszkátára megszólalásig hasonló alakzatot futnak be. A $|\mu| > 108$ paramétertartományban nincsenek komplex sajátértékek. Egyetlen olyan sajátérték van, amely valamennyi $\mu \in \mathbb{R}$ paraméterértékre mindvégig valós maradt.

Nehezebb volt, mint gondoltam. Nem lehetett volna az egész feladatot a számítógépre bízni?

A pontokba szedett eredmény stabilitási részét közvetlenül is megkaphattuk volna a lassan 150 éves Routh–Hurwitz kritérium segítségével is. Az 1.21. Tétel ($n = 3$ speciális esete) szerint az $\dot{x} = A(\mu)x$ lineáris differenciálegyenlet $x_0 = 0$ egyensúlyi helyzete pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha

$$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0 \quad \text{és} \quad a_1 a_2 > a_0, \quad \text{ahol} \quad p(\lambda) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

a karakterisztikus polinom, a főegyüttható $a_3 = 1$ választásával. Esetünkben

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \left(3 - \frac{1}{12}\mu\right) \lambda^2 + \left(3 - \frac{1}{6}\mu\right) \lambda + \left(1 + \frac{11}{12}\mu\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{12}{11} < \mu < 18 \quad \text{és} \quad \mu^2 - 120\mu + 576 > 0.$$

Ez pedig a már korábbról ismert $\mu \in \left(-\frac{12}{11}, 5\right)$ eredmény. A stabil sajátértékek száma 2 ha $-\infty < \mu < -\frac{12}{11}$, 3 ha $-\frac{12}{11} < \mu < 5$ és 1 ha $5 < \mu < \infty$.

Mostanra lett igazán világos, miért foglalkoztunk annyit differenciálegyenletek kis perturbációival, paraméterektől való függésével:

- normálesetben nincsen igazi változás (strukturális stabilitás)
- az új minőség bifurkációk során, sőt bifurkációk sorozatában jelenik meg
- a diszkretizáció maga is kis perturbáció, ahol a $0 < h < h_0$ lépésköz a paraméter

Numerikus szempontból a legfontosabb eredmény az alábbi tétel, mely a technikai részletek megfogalmazása nélkül is jól érthető.

2.80. Tétel *Strukturális stabilitás kicsiny C^1 perturbációkra \Rightarrow strukturális stabilitás kicsiny lépésközű diszkretizációkra.*

Kritikus esetekben a h lépésköz maga is lehet bifurkációs paraméter. Bifurkációk számítógépes vizsgálatakor a $\mu \approx \mu_{crit}$ és a $0 < h \ll 1$ paraméterek hatása egymással is, amint azt a (2.13) egyenlet példáján láttuk, kicsit összekeveredhet.

2.14. Megjegyzések a nem-autonóm esetről

Ez az alfejezet rövid és valójában csak jelzés-szerű.

A nem-autonóm eset — ha van egyenletesség⁴⁵ — akkor csak kevéssel nehezebb az autonóm esetnél. Ha azonban nincs egyenletesség, akkor sokkal-sokkal nehezebb. Hogy mi is ez az egyenletesség, és hogy annak hiánya milyen komplikációkhoz vezet, azt a stabilitás példáján mutatjuk be. Egyúttal az is kiderül, miért nem definiáltuk eddig a stabilitás fogalmát autonóm egyenletek tetszőleges megoldására, miért csak egyensúlyi helyzeteire (illetve kompakt invariáns halmazaira).

Legyen $\varphi(t)$ megoldása az $\dot{x} = f(x)$ autonóm differenciálegyenletnek. A stabilitás fogalmát a $\varphi(t)$ megoldásra az $x = y + \varphi(t)$ transzformáció segítségével értelmezzük, amely az $\dot{x} = f(x)$ differenciálegyenlet $\varphi(t)$ megoldását az $\dot{y} = g(t, y)$ nem-autonóm differenciálegyenlet azonosan-nulla megoldásába viszi, ahol $g(t, y) = f(y + \varphi(t)) - f(\varphi(t))$, hiszen

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\varphi}(t) = f(y(t) + \varphi(t)) - f(\varphi(t)) \quad \text{és} \quad g(t, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

A stabilitás fogalmát az $\dot{x} = f(x)$ autonóm egyenlet $\varphi(t)$ megoldására tehát úgy kell/lehet definiálni, mint az $\dot{y} = g(t, y)$ nem-autonóm egyenlet $y_0 \equiv 0$ megoldásának stabilitását:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \text{hogy} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad t \geq t_0 \quad \text{és} \quad |y - y_0| < \delta \quad \text{esetén} \quad |\Psi(t, t_0, y) - y_0| < \varepsilon.$$

Összehasonlítva ezt az autonóm esetre érvényes

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{hogy} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \quad \text{és} \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{esetén} \quad |\Phi(t, x) - x_0| < \varepsilon$$

definícióval, a különbség nem tűnik nagynak.

Nem tűnik nagynak. Attól függ. Ha a δ csak az ε -tól függ, a t_0 -tól pedig független, akkor nincs semmi baj: a stabilitás egyenletes. Ha azonban — dinamikája válogatja — $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, akkor a t_0 -tól való függés esetleges anomáliái, durva nem-egyenletességei bizony nehezen kezelhetők.

Ljapunov stabilitáselméletét ezzel együtt ki lehet terjeszteni nem-autonóm egyenletekre is.⁴⁶ A bifurkációk elméletét már nem, legalábbis általános tételekben nem lehet reménykedni. Még a Hopf bifurkáció esetében is csak egymással versengő, egyedi példákra alapuló, egymással nem-ekvivalens definíció-kísérletek ismeretesek.

A nehézségek természetét világosan mutatja a következő példa.

⁴⁵Az „egyenletesség” a matematika egyik alapfogalma, alapkonceptiója, jóllehet általában rejtve marad. Azok az esetek, amikor bármiféle egyenletesség bárhogy is megsérül, kellemetlenül nehezek tudnak lenni. Az \mathbb{R}^d korlátos és zárt halmazai egyúttal kompakt halmazok is: \mathbb{R}^d -ben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt. Az Olvasók egy része tanulta az absztrakt definíciót is. A kompaktság \gg igazából \ll egyenletesség (kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen is folytonos; függvény-sorozat egyenletesen konvergens, ha van konvergens numerikus majoráns).

⁴⁶Ez a szabályozás-elmélet szempontjából rendkívül fontos, hiszen a beavatkozások nagy része csak rövid ideig tart, és automatikusan, amikor a szükség hozza alapon történik.

2.81. Példa Tekintsünk egy ravaszul megkonstruált, kétdimenziós nem-autonóm, homogén lineáris differenciálegyenletet.

Íme, melynek van ríme:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ahol} \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2} \cos^2(t) & 1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cdot \cos(t) \\ -1 - \frac{3}{2} \sin(t) \cdot \cos(t) & -1 + \frac{3}{2} \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

megoldás, amely $t \rightarrow \infty$ mellett nem korlátos. A bökkenő csak az, hogy az $A(t)$ mátrix sajátértékeinek valós része minden $t \in \mathbb{R}$ esetén negatív, sőt minden t -re pontosan ugyanaz a negatív szám:

$$\lambda_{1,2}(t) = -\frac{1}{4} \pm i \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tehát egyedül a sajátértékekből nem lehet semmiféle stabilitásra következtetni.

Hogy valami jót is mondjak (Floquet után szabadon): A speciális eset, amikor $A(t)$ periodikus t -ben, visszavezethető az autonóm esetre. Oké, Floquet!

De az igazán örvendetes az, hogy a szabályozás-elmélet képes a nem-autonóm, sőt a véletlenszerű időpontokban bekövetkező (de azért nem drasztikusan nagy) „megzavartságok”, perturbációk kezelésére, hatásuk kivédésére.

2.15. Összefoglaló példák

Ameddig a hagyományos értelemben vett matematikai vizsgálat nagy biztonsággal elér, az a szimmetriaviszonyok, valamint a nemkritikus egyensúlyi helyzetek jellegének tisztázása. Természetesen mindezt a (ha csak lehet, kis számú) paraméter függvényében. A lokális vizsgálatok nem nehezek: az első lépést mindig meg tudjuk tenni.

A lokálistól a globális felé haladásnak nincs általános receptje. Fázisportré–elemzéseknél második lépésben

- az egyes attraktorok izolálásával
- a szeparatrixok, az instabil és stabil sokaságok általi összekötöttségek megállapításával

kell/lehet próbálkozni, illetve

- Ljapunov felületekkel, Ljapunov függvényekkel
- periodikus pályák keresésével

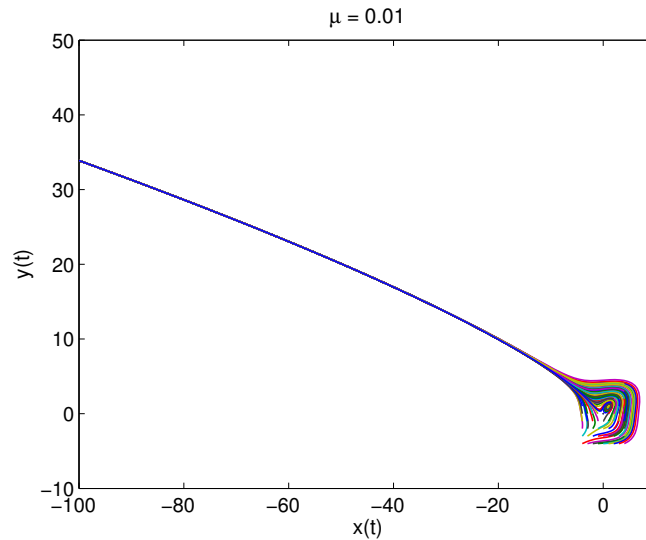
Számítógép felhasználásával sokkal messzebbre jutunk. Magától értetődik, hogy a számítógépes tapasztalatokat a matematika nyelvén, illetve az eredeti mérnöki, fizikai, kémiai, biológiai feladat kontextusában kell interpretálni.

A számítógépes tapasztalat ellenőrzi a kézzel végzett számításokat és rámutat a hibás részletekre. Olyan esetek is előfordulhatnak, amikor a számítógépes tapasztalat szorul korrekcióra — ez utóbbi az *Árnyékok és szellemek a numerikában* alfejezet témája. Az is lehetséges, hogy a számítógép az eredeti feladat olyan részleteit deríti fel, amelyek hozzáférhetők a további, kézzel végzett matematikai elemzés számára, vagy amelyek a mögöttes szaktudományok számára jelentenek új, további kihívásokat.

Paraméteres feladatokban az egymást követő bifurkációk feltérképezése, a kritikus paraméterértékek megállapítása, a bifurkációs diagram felrajzolása kifejezetten nehéz és kézi számolásokkal szinte reménytelen. A paraméter menti folytatás (parameter continuation) módszere segít, pontosabban az ennek alapján készült AUTO és MATCONT nyílt hozzáférésű programcsomagok. Ha csak egyensúlyi helyzeteket vizsgálunk, akkor tizenöt–húsz dimenziós fázistérben két bifurkációs paramétert még néhány tucat egymást követő bifurkáció erejéig jól kezelnek. Periodikus megoldásokat illetően rosszabb a helyzet. Egyrészt nehezen indulnak⁴⁷, másrészt hamar elszállnak, de közben azért történik–történhet egy s más. Az AUTO és a MATCONT programcsomagok használatának megtanulása, jóllehet a kísérő dokumentáció igen magas színvonalú, több nap munkát igényel.

⁴⁷igen, az a bizonyos *educated initial guess* — és most legyen szabad Hermann Hesse egy sorát idéznem Keresztury Dezső szép fordításában: „varázs él mind a kezdetekben” („Und jedem Anfang wohnt ein Zauber inne”)

1.) A pipa (de csak ha messziről nézzük):



2.7. ábra. A (2.33) egyenlet fázisportréjának részlete: az origó egy viszonylag kis környezetéből induló pályák közös aszimptotikus viselkedése a $\mu = 0.01$ paraméterértéknél — A színpad kiürül. *Összes szereplő: balra el!*

Tekintsük a

$$\dot{x} = \mu x - y^3, \quad \dot{y} = -y + x^2 \quad (2.33)$$

differenciálegyenletet, ahol μ a bifurkációs paraméter. Két egyensúlyi helyzet is van,

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q(\mu) = \begin{pmatrix} \mu^{\frac{1}{5}} \\ \mu^{\frac{2}{5}} \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -3y^2 \\ 2x & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow J(P) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J(Q(\mu)) = \begin{pmatrix} \mu & -3\mu^{\frac{4}{5}} \\ 2\mu^{\frac{1}{5}} & -1 \end{pmatrix}$$

A karakterisztikus polinomok

$$p_P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - \mu) \quad \text{és} \quad p_{Q(\mu)}(\lambda) = \lambda^2 - (\mu - 1)\lambda + 5\mu$$

$$\Rightarrow \lambda_1(P) = -1, \quad \lambda_2(P) = \mu \quad \text{és} \quad \lambda_{1,2}(Q(\mu)) = \frac{1 - \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 22\mu + 1}}{2}.$$

A P pont $\mu < 0$ esetén stabil csomó, $\mu > 0$ esetén nyeregpont. A $\mu = 0$ eset több szempontból is kritikus ... ekkor P és $Q(\mu)$ összeolvadnak egy pillanatra ... bizony jól jönne egy kis számítógép.

A másik kritikus paraméterérték $\mu = 1$, amikor is az egyenlet Hamilton szerkezetű

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial y} H, \quad \dot{y} = -\frac{\partial}{\partial x} H, \quad \text{ahol } H(x, y) = xy - \frac{x^3}{3} - \frac{y^4}{4}.$$

A $H(x, y) = 0$ szintvonal matematika elemzése a szeparatrixokhoz vezet. A P pont instabil sokaságának jobbra induló ága a $Q(1)$ pontot megkerülve mint a P pont stabil sokaságának felső ága tér vissza a P -be. A paraméter $\mu = 1$ értékénél „odapattanó–elpattanó” (az elnevezés a P pont instabil sokasága jobbra induló ágának a P -hez $|\mu - 1| \ll 1$ mellett történő „majdnem vagy igazán” visszatérésére vonatkozik) *homoklinikus bifurkáció* játszódik le — $\mu = 1$ -nél P homoklinikus pont, $Q(1)$ pedig centrum.⁴⁸

A továbbiakat illetően rábízunk magunkat az animációk egyikére.

2.) *A kobra avagy (a szelídebbek kedvéért) a lepke:*

A feladat most is a fázisportré megértése és felrajzolása. Az egyenlet:

$$\dot{x} = -xy, \quad \dot{y} = x^2 - y - 1 + \mu(y - y^3), \quad \text{ahol } 0 \leq \mu \leq 4 \text{ paraméter.} \quad (2.34)$$

Ami rögtön a szemünkbe ötlük, az az, hogy $x=0$ esetén $\dot{x}=0$, speciálisan ha egy megoldás x koordinátája valamikor 0, akkor mindvégig az marad. Ez geometriailag az $x=0$ függőleges egyenes invariáns voltát jelenti, sőt a rá vonatkozó szimmetriát is sejteti. Így is van, a *Differenciálegyenletek megoldásainak ábrázolása* alfejezet végén írtaknak megfelelően a vektormező és így a fázisportré is *szimmetrikus* az y tengelyre nézve).

Az első teendő az *egyensúlyi helyzetek* meghatározása, és a körülöttük történő *linearizálás*:

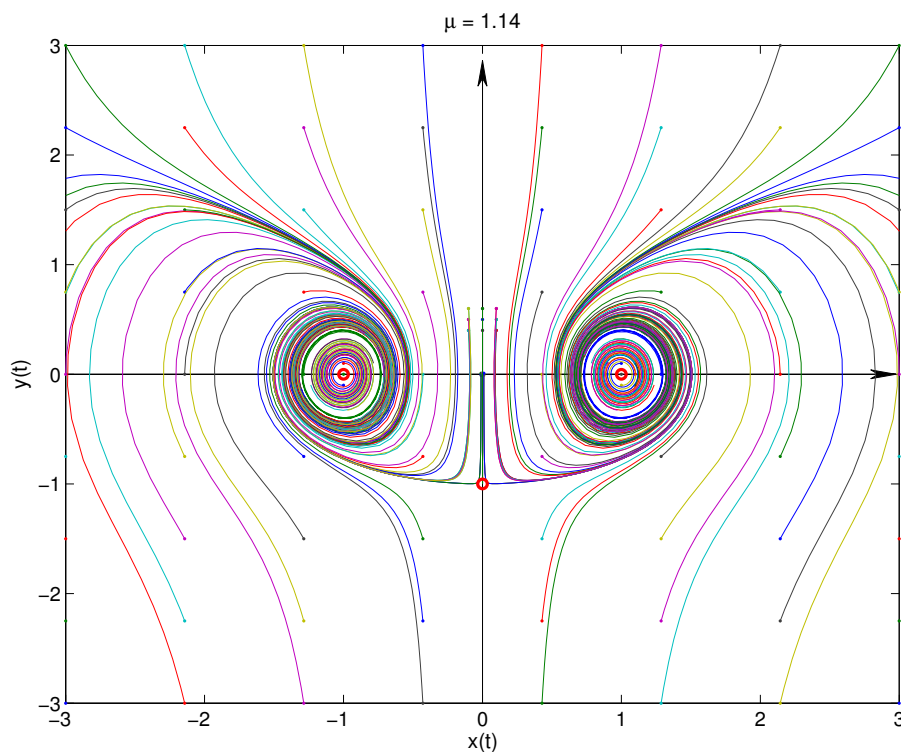
$$\begin{aligned} -xy = 0 &\Rightarrow x = 0 \quad \text{vagy} \quad y = 0 : \\ y = 0 &\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1, \\ x = 0 &\Rightarrow -(y+1) + \mu y(1-y)(1+y) = 0 \Rightarrow (y+1)(-1 + \mu y(1-y)) = 0 \\ &\Rightarrow y = -1 \quad \text{vagy} \quad \mu y(1-y) = 1. \end{aligned}$$

Mivel az $y \rightarrow y(1-y)$ függvény legfeljebb az $\frac{1}{4}$ értéket veheti fel (és az $y = \frac{1}{2}$ pontban fel is veszi), a $\mu \in [0, 4)$ esetén az $y = -1$ mellett további megoldások már nincsenek, $\mu = 4$

⁴⁸A homoklinikus bifurkáció *globális bifurkáció*, de nem tartozik a globális bifurkációk derült–égből–mennykőcsapás (blue–sky) fajtái közé. Ezzel együtt számítógéppel csak megsejteni lehet, pontosan bemutatni nem. A kemény tény, amelyet a matematikai elmélet igazol, az nem maga az odapattanás–elpattanás, hanem az a tény, hogy a $\mu = 1$ esetben a homoklinikus hurok belseje periodikus pályákkal van kitöltve.

A mögöttes matematika Liouville (1.14) formulája, pontosabban a $\text{div}(\mu) = \mu - 1$ kifejezés $\mu = 1$ -nél történő előjelváltása. Ugyanez magyarázza egyébként a „pipa” alakját és elnevezését is.

Ha a $Q(\mu)$ pontot vizsgáljuk, akkor $\mu = 1$ -nél elfajult Hopf bifurkációt tapasztalunk, hiszen $\mu < 1$ esetén a Q stabil fókusz, $\mu > 1$ esetén a Q instabil fókusz. Tehát a Hopf féle virágkehely síkká, pontosabban síkdarabbá van kiegyenesítve. Ilyetén elfajulásra nem most látunk példát először: hasonló viselkedésre a van der Pol egyenlet is képes.



2.8. ábra. A (2.34) egyenlet fázisportréja a $\mu = 1.14$ paraméterértéknél. **Kérdés:** valódi-e a kobra pupillája?

esetén $y = \frac{1}{2}$ is megoldás. Tehát a $0 \leq \mu \leq 4$ paraméterértékeknek megfelelő egyensúlyi helyzetek

- $0 \leq \mu < 4$ esetén $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\mu = 4$ esetén $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

A derivált-, más néven *Jacobi-mátrix* egy általános pontban

$$J = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 2x & -1 + \mu(1 - 3y^2) \end{pmatrix},$$

speciálisan az egyensúlyi helyzetek mindegyikében $0 \leq \mu < 4$ mellett rendre

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 + \mu \end{pmatrix}, \quad J(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 + \mu \end{pmatrix}, \quad J(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 - 2\mu \end{pmatrix},$$

és

$$J(R) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{az } R \text{ egyensúlyi helyzet csak } \mu = 4 \text{ mellett létezik}).$$

A $J(Q)$ és az $J(R)$ mátrixok diagonálisak. Sajátértékeik 1 és $-1 - 2\mu < 0$, illetve $\frac{1}{2}$ és 0. Tehát a Q nyeregpont, az R esetében pedig a linearizálás önmagában nem ad elegendő információt a jelleg eldöntéséhez. Szerencsére az y tengely invarianciája segít. Mivel a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pontban $\dot{y} = -2$, a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pontban pedig $\dot{y} = -1$, a dinamika mind az R egyensúlyi helyzet felett, mind kicsivel alatta — egészen a következő, a Q egyensúlyi helyzetig — lefelé halad. Tehát az R felülről vonz, alulról taszít. A sajátvektorok mindkét esetben $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ez a taszító irány), és $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (a Q vonzó és az R neutrális iránya).

A $J(P_1)$ és a $J(P_2)$ mátrixok karakterisztikus polinomja egyaránt

$$p(\lambda) = \lambda^2 + (1 - \mu)\lambda + 2 : \quad \text{amelynek gyökei} \quad \lambda_{1,2}(\mu) = \frac{\mu - 1 \pm \sqrt{(1 - \mu)^2 - 4}}{2}.$$

A $0 \leq \mu \leq 4$ értékekre szorítkozva négy esetet különböztethetünk meg:

- $0 \leq \mu < 1 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\mu) < 0, \operatorname{Im}\lambda_{1,2}(\mu) \neq 0$
 $\Rightarrow P_1, P_2$ stabil fókusz
- $\mu = 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(\mu)) < 0, \operatorname{Im}(\lambda_{1,2}(\mu)) \neq 0 \Rightarrow$ további vizsgálat
- $1 \leq \mu < 3 \Rightarrow \operatorname{Re}\lambda_{1,2}(\mu) < 0, \operatorname{Im}\lambda_{1,2}(\mu) \neq 0$
 $\Rightarrow P_1, P_2$ instabil fókusz
- $3 \leq \mu \leq 4 \Rightarrow \lambda_1(\mu), \lambda_2(\mu) > 0 \Rightarrow P_1, P_2$ instabil csomó

A $\mu = 1$ paraméterértéknél Hopf bifurkáció történik: a $\lambda_{1,2}(\mu)$ komplex sajátértékpár (egy-egy paraméteres görbén haladva) átmetszi a képzetes tengelyt, a P_1, P_2 egyensúlyi helyzetek instabillá válnak, stabilitásuk áttevődik a belőlük lefűződő egy-egy periodikus megoldásra. PAPIRON, CERUZÁVAL ennyi egy szorgalmas diáktól is elvárható.

A SZÁMÍTÓGÉPES SZIMULÁCIÓK azt mutatják, hogy ezek a Γ_1, Γ_2 periodikus megoldások egészen a $\mu = 4$ paraméterértékig egyre csak híznak, amikor is — az R egyensúlyi helyzet egyidejű megjelenésével együtt — beleolvadnak az Q nyeregpont akkor éppen az R pontba érkező szeparatrixaiba.

Mindez világosan utal arra, miért volt célszerű a μ paraméter értékét megszorítani a $[0, 4]$ intervallumra. Már jóelőre a leendő Hopf bifurkációt állítottuk vizsgálódásaink középpontjába. A lényeg az animációk egyike pontosan kifejezi.

Az R egyensúlyi helyzet egyébként, alighogy megszületett, máris szétesik két másikra: $\mu > 4$ esetén a $\mu y(1 - y) = 1$ másodfokú egyenletnek két valós megoldása van,

$$y_1(\mu) = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu} > \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad y_2(\mu) = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4\mu}}{2\mu} < \frac{1}{2},$$

amelyek rendre az $R_1(\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1(\mu) \end{pmatrix}$ és az $R_2(\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2(\mu) \end{pmatrix}$ egyensúlyi helyzetekhez vezetnek. Természetesen ezek körül is lehet linearizálni. A Jacobi-mátrixok

$$J(R_1) = \begin{pmatrix} -y_1 & 0 \\ 0 & -1 + \mu(1 - 3y_1^2) \end{pmatrix} \quad (\text{az } R_1 \text{ csak } \mu > 4 \text{ mellett létezik}),$$

$$J(R_2) = \begin{pmatrix} -y_2 & 0 \\ 0 & -1 + \mu(1 - 3y_2^2) \end{pmatrix} \quad (\text{az } R_2 \text{ csak } \mu > 4 \text{ mellett létezik}):$$

tehát az R_1 vonzó csomó, az R_2 pedig nyeregpont. A részletes paraméter-vizsgálatok elvégzése helyett elegendő arra hivatkozni, hogy $\mu > 4$ esetén $g(0, \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}(\mu - 4) > 0$ és $0 < y_2 < y_1 < 1$. Tehát a $\mu = 4$ paraméterértéknél az $(0, \frac{1}{2})$ pontban *nyereg-csomó bifurkáció* történik.

3.) *Egy programozási feladat furcsa eredménye:*

Roppant tanulságos a kísérő ábrsorozat: ugye milyen szép? Egy kikerekedő szemű kobra De mi történik a paraméter $\mu = 0.2$ értékénél? Milyen különös pusztulása ez a szimmetriának ... az alvó kobra megmarja önmagát? Talán a MATLAB program valahogyan hibás? Mi történt?

Íme a kérdéses MATLAB programrészlet:

```
% x' = -x*y;
% y' = x^2 - y - 1 + mu * (y-y^3);

clear all;
close all;

%%
% xkp: a referencia kezdopont x koordinataja
% ykp: a referencia kezdopont y koordinataja
% N: a kezdopontok halojanak merete (NxN)

xkp = 2;
ykp = 2;
N = 11;
global mu;
mu = 4;
```



```

h = .05; % finomsag
K = 100; % lépésszam
origo = 1; % origo "tavolsaga" az abrazolasnal

% a rendszer kezdopontjai
x0 = ones(N^2,1);
y0 = ones(N^2,1);
xlepes = 2*xkp/(N-1);
ylepes = 2*ykp/(N-1);

% a kezdopontok halojanak megkonstruallasa
k = 1;
for i=1:N
    for j=1:N
        x0(k) = xkp-xlepes*(i-1);
        y0(k) = ykp-ylepes*(j-1);
        k = k + 1;
    end
end

% Analitikus megoldas
T = (K-1) * h;
t = 0 : h : T;
% fi = zeros(K,2);
fix = zeros(K,N^2);
fiy = zeros(K,N^2);
for n = 1 : N^2
    [t,fi] = ode45(@(t,y) lepke_de(t,y,mu), t, [ x0(n) y0(n) ]);
    fix(1:numel(fi(:,1)),n) = fi(:,1);
    fiy(1:numel(fi(:,1)),n) = fi(:,2);
end

%% Megjelenitesek
% A fazister
figure(1)
hold on;
plot(fix,fiy); % sok szinu abra
% plot(fix,fiy,'r'); % egy szinu abra
plot(x0,y0,'x')
axis([-abs(xkp*origo) abs(xkp*origo) -abs(ykp*origo) abs(ykp*origo)]);
xlabel('x');

```

```
ylabel('y');  
title('Fazister');  
% grid on;  
hold off;
```

3. fejezet

Az egyszerűtől a bonyolult felé

Az erősebben differenciált és integrált rendszert nevezzük komplexnek.¹

3.1. Egydimenziós egyfajmodellek

Most tekintsük az

$$x_0 > 0 \text{ adott, és } x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+4x_n} \text{ , } n = 0,1,2,\dots \quad (3.1)$$

Beverton–Holt típusú nemlineáris rekurziót. Az n paraméter itt is az idő múlását, az x_n változó pedig egy faj élőanyagának mennyiségét jelenti az n -edik generációban.

Bevezetve az $a_n = \frac{1}{x_n}$ új változót, majd (3.1) mindkét oldalának reciprokát véve az

$$a_0 = \frac{1}{x_0} > 0 \text{ adott, és } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2 \text{ , } n = 0,1,2,\dots$$

lineáris rekurzióhoz jutunk. A homogén rész általános megoldása $\frac{1}{2^n}c$, ahol $c \in \mathbb{R}$ állandó. Az inhomogén rész egy partikuláris megoldását kereshetjük $a_n = K$ alakban. Visszahelyettesítés után a $K = \frac{1}{2}K + 2$ összefüggés adódik, ahonnan $K = 4$. A *homogén általános plusz inhomogén partikuláris* szabály alapján

$$a_n = \frac{1}{2^n}c + 4 \Leftrightarrow x_n = \frac{1}{\frac{1}{2^n}c + 4} \text{ , } \text{ ahol } c \in \mathbb{R} \text{ , } n = 0,1,2,\dots$$

¹„A differenciáltság egy rendszer (egy szerv, mint az agy, egy személy, egy család, egy testület, egy kultúra, az emberiség egésze) összetevőrészei különbözőségének a mértéke (felépítésüket és funkciójukat tekintve). Az integráltság egy rendszer összetevőrészei közötti kommunikálás és együttműködés (egymás céljainak a megvalósítása érdekében) mértéke. Az erősebben differenciált és integrált rendszert nevezzük komplexnek.” (Csíkszentmihályi Mihály, *A fejlődés útjai*, Nyitott Könyvműhely, Budapest, 2007.)

A c állandó értékét a kezdeti feltételből kapjuk:

$$x_0 = \frac{1}{\frac{1}{20}c + 4} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{c + 4} \Leftrightarrow c = \frac{1}{x_0} - 4.$$

A végeredmény tehát

$$x_n = \frac{1}{\frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{x_0} - 4 \right) + 4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vegyük észre, hogy tetszőleges $x_0 > 0$ esetén $x_n \rightarrow \frac{1}{4}$, a (3.1) feladat tehát az erőforráskorlátokat markánsan figyelembe veszi. Biológiai relevanciája természetesen csak az $x_0 < \frac{1}{4}$ kezdeti feltételnek van. Maga a dinamika — más szóval az állapotok változásának szabálya — roppant egyszerű:

$$x_{n+1} = f(x_n) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x_{n+1} = f(x_n) \Leftrightarrow x \rightarrow X = f(x) \Leftrightarrow X = f(x),$$

ahol

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad x \rightarrow f(x) = \frac{2x}{1+4x}$$

folytonos függvény. A függvényvizsgálat szokásos módszerei helyett érdemes átalakítani f képletét:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{1+4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x+1-1}{1+4x} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1+4x} \right).$$

Így f grafikonja lineáris módon transzformált hiperbolaág, amiből azonnal látjuk, hogy f korlátos ($0 \leq f(x) < \frac{1}{2} \forall x \in [0, \infty)$), szigorúan monoton növekedő (sőt $f'(x) > 0 \forall x \in [0, \infty)$) és szigorúan konkáv (sőt $f''(x) < 0 \forall x \in [0, \infty)$) függvény. Amint azt az ábra mutatja, az f függvénynek két fixpontja van, $x_u^* = 0$ és $x_s^* = \frac{1}{4}$, ez utóbbi aszimptotikusan stabil, $(0, \infty)$ vonzási tartománnyal. Az $x_u^* = 0$ fixpont instabil és taszító. Az $x_0 \in [0, \infty)$ kezdeti értékből induló trajektória az

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n) = f(f^n(x_0)) = f^{n+1}(x_0), \dots$$

pontsorozat, ahol az f (külön nem jelzett $0, 1$, illetve $2, 3, \dots, n+1, \dots$ kitevői az iterációk számát jelentik, maga a dinamika pedig az f függvény iterálásának dinamikája.

3.1. Tétel *Legyen $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ folytonosan differenciálható függvény és tekintsük f egy $x^* \in (0, 1)$ fixpontját. Ekkor*

- [S] *Ha $|f'(x^*)| < q < 1$, akkor f kontrakció az x^* fixpont egy kis, $[x^* - \eta_0, x^* + \eta_0]$ alakú környezetében a $q < 1$ kontrakciós állandóval.*

- [U] Ha $|f'(x^*)| > Q > 1$, akkor az x^* fixpont egy kis, $[x^* - \theta_0, x^* + \theta_0]$ alakú környezetéből induló trajektóriák mindegyike (leszámítva magát az x^* fixpontból induló és mindvégig ottragadó trajektóriát) valamikor elhagyja ezt a környezetet

Az $x_{n+1} = f(x_n)$ képlettel definiált rekurzió/iteráció viselkedése az x^* fixpont egy kis környezetében monoton, ha $f'(x^*) > 0$, és alternáló/oszcilláló, ha $f'(x^*) < 0$. Monotonitás szempontjából az $f'(x^*) = 0$, stabilitás szempontjából az $|f'(x^*)| = 1$ eset a kritikus, amikor további megfontolásokra van szükség.

Bizonyítás. Jóllehet több különböző esetet felsoroltunk, ezek együttvéve is csak alig érdemlik meg a tétel nevet. A Tétel név használata a pókháló-diagramok (cobweb plot/diagram) szépsége mellett a matematikai elemzés veszedelmesen komoly nehézségeire is felhívja a figyelmet. Csak a lokális viselkedés megértése könnyű.

Az [S] és az [U] állítások abszolút lokális jellegűek és remek-jól szemléltethetők. Lássuk a formális bizonyításokat²!

[S] Az f' deriváltfüggvény folytonossága miatt létezik olyan $\eta_0 > 0$, hogy $[x^* - \eta_0, x^* + \eta_0] \subset [0, 1]$ és

$$|f'(x)| \leq q \quad \forall x \in [x^* - \eta_0, x^* + \eta_0].$$

Így minden $x, \tilde{x} \in [x^* - \eta_0, x^* + \eta_0]$ mellett a Lagrange féle középértéktétel szerint $|f(x) - f(\tilde{x})| = |f'(\xi) \cdot (x - \tilde{x})| \leq q \cdot |x - \tilde{x}|$. Az $\tilde{x} = x^*$ választással $|f(x) - x^*| = |f(x) - f(x^*)| \leq q \cdot |x - x^*|$, tehát $x \in [x^* - \eta_0, x^* + \eta_0]$ esetén $f(x) \in [x^* - \eta_0, x^* + \eta_0]$ is teljesül. Tehát az f függvénynek az $[x^* - \eta_0, x^* + \eta_0]$ intervallumra vett megszorítása valóban kontrakció és tetszőleges $x_0 \in [x^* - \eta_0, x^* + \eta_0]$ esetén

$$|x_n - x^*| \leq q^n |x_0 - x^*|, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

[U] Az f' deriváltfüggvény folytonossága miatt létezik olyan $\theta_0 > 0$, hogy $[x^* - \theta_0, x^* + \theta_0] \subset [0, 1]$ és

$$|f'(x)| \geq Q \quad \forall x \in [x^* - \theta_0, x^* + \theta_0].$$

Legyen $x_0 \in [x^* - \theta_0, x^* + \theta_0] \setminus \{x^*\}$ tetszőleges. Az [S] részhez hasonló gondolatmentettel, mindaddig, amíg $x_0, x_1, \dots, x_N \in [x^* - \theta_0, x^* + \theta_0]$, az is igaz, hogy

$$|x_N - x^*| \geq Q^N |x_0 - x^*|, \quad \text{ami elegendően nagy } N \text{ esetén ellentmondás.}$$

Az $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$ pótlólagos feltétel csak egyféle dinamikát enged meg: egy tetszőleges $x_0 \in (0, x^*)$ kezdőpontból induló trajektória szigorúan növekvő módon, egy tetszőleges $x_0 \in (x^*, 1]$ kezdőpontból induló trajektória pedig szigorúan csökkenő módon tart az x^* fixponthoz.

²Ábra-kommentárok, ábra-magyarzatok, semmi több! Az ábrákat az Olvasó rajzkészségére bízuk, csakúgy mint az $x^* = 0$, $x^* = 1$ esetek tárgyalását.

Lényegében ugyanez a dinamika valósul meg az egy faj „létszámának”, valójában élőanyag-mennyiségének változását leíró legegyszerűbb erőforráskorlátos modellben, Verhulst logisztikus

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(0) = x_0, \quad 0 \leq x_0 \leq K \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}} \quad (3.2)$$

differenciálegyenletében, ahol a $r > 0$ a növekedési ráta, $K > 0$ pedig a környezet eltartóképessége.

Természetesen a növekedési ráta és a környezet eltartóképessége mint paraméterek az általunk eddig tárgyalt $R = 2$, $K = \frac{1}{4}$ Beverton–Holt (3.1) modellbe is beilleszthetők:

$$\left. \begin{array}{l} x_{n+1} = \frac{Rx_n}{1 + \frac{R-1}{K}x_n} \\ x_0, \quad 0 \leq x_0 \leq K \end{array} \right\} \Rightarrow x_N = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)R^{-N}} \quad (3.3)$$

Itt $R > 1$ jelenti a növekedési rátát, s a logisztikus (3.2) differenciálegyenlethez hasonlóan most is $K > 0$ a környezet eltartóképessége. A $K \rightarrow \infty$ határátmenettel (3.2) illetve (3.3) a sokat kritizált, de nagy történelmi fontosságú (folytonos idejű $\dot{x} = ax$, $a > 0$ illetve diszkrét idejű $x_{n+1} = (1+a)x_n$, $a > 0$ Malthus modellekbe megy át. A kamatos kamat gyakorlataiban megjelenő exponenciális növekedés illúziója a pénzügyek világában szívósabbnak bizonyult, de jó ideje már a mainstream közgazdászok és a banki matematikusok sem hisznek benne, sőt legújabbban nem is propagálják.

A teljesség kedvéért ismertetjük a megfelelő kezdetiérték-feladatok megoldásainak levezetését. A Verhulst differenciálegyenlet esetében

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \Leftrightarrow \frac{K dx}{x(K-x)} = r dt,$$

majd a változók szétválasztása után mindkét oldalt integrálva, a bal oldalon álló függvényt parciális törtekre bontva

$$\frac{K}{x(K-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{K-x} \Leftrightarrow K = (-A+B)x + AK \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$0 = -A+B$ és $K = AK \Leftrightarrow A = 1$ és $B = 1$, majd integrálva

$$\log(x) - \log(K-x) = rt + C \Rightarrow \frac{x}{K-x} = ce^{rt} \quad \text{ahol } c = \frac{x_0}{K-x_0},$$

míg az általános Beverton–Holt rekurzió esetében

$$x_{n+1} = \frac{R}{\frac{1}{x_n} + \frac{R-1}{K}} \Leftrightarrow \frac{1}{x_n} + \frac{R-1}{K} = \frac{R}{x_{n+1}}$$

és most az $a_n = \frac{1}{x_n}$ új változóra az $\alpha = \frac{1}{R}$, $\beta = \frac{R-K}{RK} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha-1} = -\frac{1}{K}$ új paraméterekkel

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha a_n + \beta \quad \Rightarrow \quad a_N = \alpha^N a_0 + \beta \frac{\alpha^N - 1}{\alpha - 1} \\ \Rightarrow \quad x_N &= \frac{1}{\alpha^N \frac{1}{x_0} - \frac{\alpha^N - 1}{K}} = \frac{K x_0}{x_0 + (K - x_0) \alpha^N} \end{aligned}$$

a teendők.

A megoldások meghatározásánál sokkal fontosabb az az észrevétel, hogy a semiimplicit Euler diszkrétizáció

$$x_{n+1} = x_n + hr x_n \left(1 - \frac{x_{n+1}}{K}\right) \quad \text{a} \quad h = \frac{R-1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad R = 1 + hr \quad \text{választás mellett}$$

a folytonos idejű Verhulst differenciálegyenletet a diszkrét idejű Beverton–Holt rekurzióba viszi. Valóban,

$$x_{n+1} = x_n + r \frac{R-1}{r} x_n \left(1 - \frac{x_{n+1}}{K}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} = R x_n - \frac{R-1}{K} x_n x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (3.3).$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy a némiképpen ad hoc semiimplicit Euler módszer az, amelyik megfelel a Verhulst differenciálegyenlet belső természetének. A szokásos explicit és implicit Euler módszerekkel való összehasonlításban

- $x_{n+1} = x_n + hr x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$: explicit Euler
— kvadratikus rekurzió, amely nem oldható meg zárt alakban
- $x_{n+1} = x_n + hr x_{n+1} \left(1 - \frac{x_{n+1}}{K}\right)$: implicit Euler (ez is „explicit”)
— kvadratikus egyenlet az x_{n+1} ismeretlenre
- $x_{n+1} = x_n + hr x_n \left(1 - \frac{x_{n+1}}{K}\right)$: semiimplicit Euler
— lineáris egyenlet az az x_{n+1} ismeretlenre, ami a zárt alakban megoldható (3.3) rekurzióra vezet

A diszkusszió tényleges célja, hogy ismét felhívja a figyelmet a már sokszor említett alapelvre: Minden feladathoz olyan számítógépes–numerikus eljárás keresendő, amelyik nemcsak kvantitatíve jó közelítés, hanem a lehető legjobban megfelel a feladat *belső természetének* is.

A generációk váltakozásának figyelembevétele a modellezés során többféle módon lehetséges. Lehet az idő, mint például Fibonacci $d=2$ vagy Leslie $d \geq 2$ mátrix–modelljeiben, diszkrét. Ezekben a modellekben az egyes korosztályok más és más rátáknak megfelelően élnek tovább, illetve szaporodnak. A tényt, hogy szaporodás csak az ivarérettség elérése után lehetséges, folytonos idejű modellekben időkésleltetés bevezetésével szokás kifejezésre juttatni. Nicholson Ricker (3.4) függvényét is felhasználva így jutott el az

$$\dot{x}(t) = x(t - \tau) e^{r \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right)} - \delta x(t)$$

alakú késleltetett differenciálegyenlethez, ahol a $\tau > 0$ konstans az időkéstetetés, $\delta > 0$ pedig a halálozási ráta. Ebben a modellben is lehetséges káosz. Verhulst (3.2) modelljét Hutchinson (a 2.11. Példában már felemlített)

$$\dot{x}(t) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right)$$

alakra módosította. Integro-differenciálegyenlet modellek is lehetségesek, amelyek az egyes populációk folytonos koreloszlását is figyelembe tudják venni.

3.2. A Ricker modell. Káoszról általában

A (3.3) Beverton–Holt rekurzióhoz hasonlóan a Ricker által bevezetett kétparaméteres

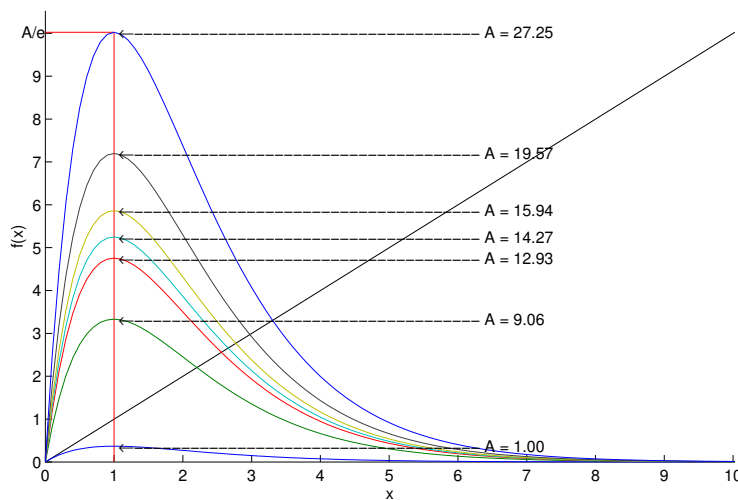
$$x_0 > 0 \text{ adott, és } x_{n+1} = x_n e^{R(1-\frac{x_n}{K})} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots \quad (3.4)$$

nemlineáris rekurzió ugyancsak egy faj élőnyaga mennyiségének változását próbálja generációról generációra modellezni. Az $R > 1$ és $K > 0$ állandók itt is a növekedési rátát illetve a környezet eltartóképességét jelentik. A K paraméter azonban egyszerre utal az erőforrások korlátozottságára (az $x e^{R(1-\frac{x}{K})}$ kifejezés maximuma $\frac{K}{R} e^{R-1}$) illetve a zsúfoltság nehezen elviselhető voltára ($x \rightarrow \infty$ mellett $x e^{R(1-\frac{x}{K})} \rightarrow 0$).

A Ricker által választott iterációs képlet, ellentétben a Beverton–Holt rekurzióval, bonyolult és szembeötlően „szabálytalan” dinamikára vezet. Ez már a $K = R$ speciális esetben is lehetséges. Bevezetve az $A = R e^{R-1}$ jelölést (és K -t mindvégig R -nek választva), a továbbiakban csak ezt az

$$x_0 > 0 \text{ adott, és } x_{n+1} = A x_n e^{-x_n} \quad , \quad n = 0,1,2,\dots \quad (3.5)$$

egyparaméteres rekurziót vizsgáljuk, az A paraméter $A > 0$ értékeire.



3.1. ábra. A (3.6) Ricker leképezés grafikonja az $A > 0$ paraméter bizonyos értékeire

A Ricker leképezés, más szóval az

$$f = f(A, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \quad , \quad x \rightarrow f(x) = A x e^{-x} \quad (3.6)$$

függvény — az egyszerűség kedvéért az A paramétert nem mindig írjuk ki — tulajdonságai egyszerűen megállapíthatók:

$$f'(x) = A(e^{-x} - xe^{-x}) \Rightarrow f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{ha } x < 1 \Rightarrow f \text{ növekszik} \\ = 0 & \text{ha } x = 1 \Rightarrow \text{maximumhely} \\ < 0 & \text{ha } x > 1 \Rightarrow f \text{ csökken} \end{cases}$$

$$f''(x) = A(x-2)e^{-x} \Rightarrow f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{ha } x < 2 \Rightarrow f \text{ konkáv} \\ = 0 & \text{ha } x = 2 \Rightarrow \text{inflexiós hely} \\ > 0 & \text{ha } x > 2 \Rightarrow f \text{ konvex} \end{cases}$$

Az f függvénynek két fixpontja van: a 0 mint fixpontot leszámítva (ha egy faj a kezdeti időpontban nem volt jelen, akkor később sem lesz — ez minden migrációmentes populációdinamika alaptulajdonsága) $x^* = \log(A)$ (már amennyiben $\log(A) > 0 \Leftrightarrow A > 1$) az egyetlen nemtriviális fixpont. Mivel $f'(\log(A)) = 1 - \log(A)$, ez a fixpont a 3.1. Tétel [S] része szerint $1 < A < e^2$ esetén stabil és vonzó, [U] része szerint $e^2 < A$ esetén instabil és taszító ($A = e^2$ esetén pedig további vizsgálat szükséges). Az A paraméter $A = e^2$ értékénél az (A -val együtt növekvő) x^* fixpont elveszti stabilitását. A számítógépes szimulációk pókháló-diagramja szerint a stabilitás áttevődik egy, az x^* fixpontból lefűződő kettő-periodusú pályára, amely a paraméter további növekedésével négy-periodusú stabil pályába megy át, és így tovább ... amíg a perióduskettőző bifurkációk sorozata, kicsivel a paraméter $A = 15$ értéke előtt el nem tűnik egy, az eddigieknél sokkal bonyolultabb dinamikában. A káosz kialakulásának egyik prototípusát értük tetten.

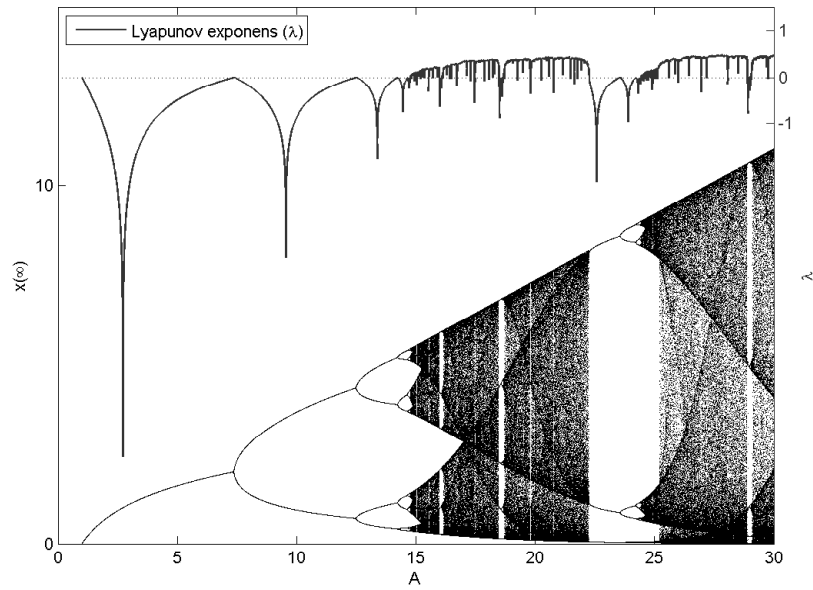
A mögöttes matematikát jól lehet szemléltetni az f , az f^2 , az f^4 , az f^8 etc. függvények grafikonján, a fixpontok — ahol ezek a függvénygrafikonok metszik az átlót — az A paraméter növekedése által okozott változásainak tanulmányozásával. (Meg is tesszük ezt, de nem a legelső, a káoszt először „kifejlesztő” perióduskettőző bifurkációk sorozatában, hanem a kaotikus paramétertartományon belüli periodikus ablakok egyikében — amint az a 3.4., 3.5. és 3.6. Ábrákon pontosan követhető.) Magától értetődő, hogy f^2 fixpontjai f -nek vagy fixpontjai, vagy pedig kettő-periodikus pontjai, f^4 fixpontjai pedig f -nek vagy fixpontjai, vagy kettő-, illetve négy-periodikus pontjai. Általában is, $f^N(x_0^*) = x_0^*$ esetén

$$x_0^* \xrightarrow{f} x_1^* = f(x_0^*) \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} x_N^* = f^N(x_{N-1}^*) = x_0^* \text{ periodikus pálya, és}$$

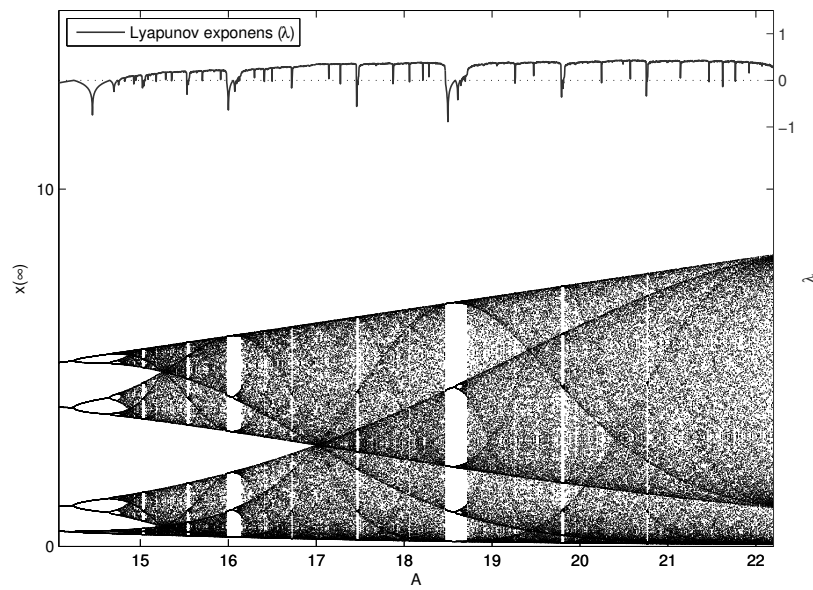
a minimális periódus a legkisebb egynél nagyobb osztója az $N > 1$ egésznek.

A periodikus pálya stabilitása azon múlik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^N(x_0^*) &= f'(f^{N-1}(x_0^*)) \cdot f'(f^{N-2}(x_0^*)) \cdot \dots \cdot f'(f^2(x_0^*)) \cdot f'(f(x_0^*)) \cdot f'(x_0^*) \\ &= f'(x_{N-1}^*) \cdot f'(x_{N-2}^*) \cdot \dots \cdot f'(x_2^*) \cdot f'(x_1^*) \cdot f'(x_0^*) \end{aligned}$$



(a) Az $1 < A < 30$ paramétertartomány



(b) A $14 < A < 22$ paramétertartomány

3.2. ábra. Ljapunov exponens és bifurkációs ábra a (3.6) Ricker leképezésre

abszolút értékben kisebb-e (aszimptotikus/exponenciális stabilitás) vagy nagyobb-e (instabilitás, exponenciális taszítás) egynél. Ha $|\frac{d}{dx}f^N(x_0^*)| = 1$, akkor további vizsgálatra van szükség.

A 3.2. Ábrán látható bifurkációs diagram a szó szigorú értelmében csak az A paraméter kicsivel 15 előtti értékeire tekinthető bifurkációs diagramnak, egészen addig, amíg a káosz a perióduskettőző bifurkációk végtelen sorozatának végére meg nem születik. Jóllehet most a tananyagban kicsit előre szaladunk, a diagram nagyobb része az *időátlag* = *térátlag* ergodikus hipotézishez kapcsolható. A diagram — 1-valószínűséggel teljesen mindegy, hogy melyik konkrét $x_0 \in [0, \frac{A}{e}]$ kezdőértékből indulunk — a (3.5) Ricker iterációval kapott

$$\{x_{200}(A), x_{201}(A), \dots, x_{800}(A)\} \quad (\text{ahol is } x_0(A) \equiv x_0 = 0.2)$$

véges pontsorozatokat ábrázolja, természetesen az A paraméter lassú léptetése mellett. Az úgynevezett periodikus ablakokban — például a 3.2. Ábra szerinti $A \approx 16.05$, $A \approx 18.6$, $A \approx 23.5$ értékeknél — is van káosz, de csak *taszító káosz*, nulla-mértékű halmazokon.

A Ljapunov exponens (külön a maximális Ljapunov exponensről egy dimenzióban nem beszélhetünk) legegyszerűbben úgy érthető meg, mint ennek a periodikus pályákra vonatkozó stabilitási kritérium kézenfekvő általánosítása. A (2.4) becslés utáni, autonóm közönséges differenciálegyenlet-rendszerekre vonatkozó

$$\lambda_{Ljap}(x_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\Phi'_x(t, x_0)\|$$

formula egydimenziós, diszkrét idejű dinamikus rendszerekre vonatkozó változata

$$\lambda_{Ljap}(x_0) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |f'(f^{N-1}(x_0)) \cdot f'(f^{N-2}(x_0)) \cdot \dots \cdot f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)|.$$

A numerikus tapasztalat arra utal, hogy — a (3.6) Ricker leképezésre (a „méréselt” x_0 -ok $[0, \frac{A}{e}]$ intervallumán) — a limes superior 1-valószínűséggel limes, és $\lambda_{Ljap}(x_0)$ értéke független x_0 -tól. A fizikusok a Ricker leképezést azokra az A paraméterekre mondják kaotikusnak, amelyekre $\lambda_{Ljap} > 0$.

Egy dinamikus rendszer kaotikussága egyszerűen annak bonyolultságát jelenti,

- topológiai — kezdeti feltételektől való érzékeny függés
- kombinatorikus — mindkét irányban végtelen 0–1 ($L-R$, $L-N-R$ etc.) sorozatokkal történő kódolhatóság
- mértékelméleti — az időben aszimptotikus viselkedés kapcsolata térbeli eloszlásfüggvényekkel

szempontból. Nyomatékosan ismételjük, hogy ebben a jegyzetben kizárólag determinisztikus káoszról, determinisztikus dinamikus rendszerek kaotikusságáról van szó. A topológiai és a kombinatorikus szempontokról az 1.31. Tétel, pontosabban a $\ddot{x} + \frac{1}{10}\dot{x} + x = \cos(t)$ differenciálegyenlet kapcsán már beszéltünk. A mértékelméleti szempontokra³ is csak egy konkrét, nemtriviális példa – az $a = 4$ paraméterű logisztikus leképezés – erejéig térünk ki. Jöjjön tehát a logisztikus leképezés tárgyalása, elsőként mértékelméleti szempontból.

Nagy ritkaság, hogy egy leképezés kaotikus voltát zárt alakban is megadható képletek fejezik ki. Ez a helyzet az

$$F : [0,1] \rightarrow [0,1], \quad x \rightarrow 4x(1-x)$$

logisztikus leképezéssel, amelyre *időátlag = térátlag, alkalmas súlyfüggvénnyel*:

3.2. Tétel Neumann János és Stanislaw Ulam, 1947 *Van olyan $E \subset [0,1]$ kivételes (exceptional), nulla-mértékű halmaz, hogy minden $[a, b] \subset [0,1]$ intervallumra a logisztikus leképezés által indukált $x_{n+1} = F(x_n)$ rekurzió rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq n \leq N \mid x_n \in [a, b]\}}{N+1} = \int_a^b \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx \quad \forall x_0 \in [0,1] \setminus E.$$

Ezt az eredményt emésztienünk kell, azzal együtt, hogy a gázokra vonatkozó *időátlag = térátlag* Boltzmann féle *ergodikus hipotézis* nem ismeretlen a számunkra.⁴ A gázdinamikában ergodikus hipotézisről beszélnek, nem pedig ergodikus tulajdonságról, mert még soha senkinek sem sikerült a statisztikus fizika mikroszkopikus ütközési modelljeiből a (3.7) határérték-létezését és határérték-relációt levezetnie.

³annak megjegyzésén túl, hogy a dinamikaileg triviális aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzet a triviális, egy pontra koncentrált Dirac-mértékkel hozható kapcsolatba

⁴Képzeld el, hogy egy, a környezetétől hermetikusan zárt tartályban oxigén van, amely sok-sok, egymással, és a tartály falával véletlenszerűen és rugalmasan ütköző molekulát jelent. Az oxigén-molekulák egyikét megkülönböztetjük a többitől, és csak rá figyelünk. Hogy izgalmasabb legyen a dolog, legyen ez az egyetlen molekula piros színű, a többi pedig színtelen. A kérdés az, hol van a piros molekula a térben és az időben, amikor annak mikroszkopikus mozgását, az egymás utáni ütközéseket etc. nem ismerjük. Minden egyes eltelt perc után, egy teljes éven keresztül külön-külön fényképet készítünk a tartály elülső, középső, és hátulsó egyharmadáról. Ez $3 \times (365 \times 24 \times 60)$ fénykép, amelyeket három csoportba gyűjtünk, annak megfelelően, hogy a tartály elülső, középső, és hátulsó egyharmadát mutatják. Kézenfekvő arra gondolni, hogy a fényképek mindhárom csoportjában a piros molekulát nagyjából $365 \times 24 \times 60$ fényképen látjuk viszont. Minden józan megfontolás mellett szól, hogy minél tovább várok, a piros molekula egyre inkább $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ relatív gyakorisággal tartózkodik a tartály elülső, középső, és hátulsó egyharmadában — igazából persze csak az számít, hogy a tartályt három egyforma térfogatú részre osztottuk. Bárhogyan is választjuk ki a tartály egy $mesh(V)$ térfogatú V részét, azt reméljük, hogy egy-valószínűséggel

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq n \leq N \mid \text{position}(n) \in V\}}{N+1} = \frac{mesh(V)}{mesh(container)}, \quad (3.7)$$

ahol $\text{position}(n)$ a piros molekula helyzetét jelenti az n -edik másodpercben, $n = 0, 1, 2, \dots$

A 3.2. Tétel bizonyítása nem is olyan rettenetesen nehéz. Abból a megfigyelésből indulunk ki, hogy az F leképezés, vagy ami ugyanaz, az $x_0 \in [0,1]$, $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ rekurzió összes trajektóriája felírható az

$$x_n = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}2^n c\right), \quad n = 0,1,2,\dots, \quad c \in [0,1]$$

paraméteres alakban. Vegyük észre azt is, hogy az egymástól különböző N -periodikus pontok száma (ahol most $N \geq 1$ nem a minimális periódust jelenti, hanem azon pontokra utal, amelyek minimális periódusa osztója az N számnak) pontosan 2^N . Fel is lehet őket sorolni őket, mint az

$$x_N = x_0 \in [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\pi}{2}2^N c = \frac{\pi}{2}2^0 c + k\pi \\ \frac{\pi}{2}2^N c = \pi - \frac{\pi}{2}2^0 c + k\pi \end{cases}$$

egyenlet (a fentiek szerint két különböző osztályba tartozó) $x_0 = \sin^2\left(\frac{k\pi}{2^{N\pm 1}}\right)$ (illetve $c \in [0,1]$), $k = 0,1,2,\dots,2^{N-1} - 1$ megoldásait. (A felsorolás képlete az $N = 1$ esetben nem értelmezett. Az $N = 1$ periódusú pontok a fixpontok, nevezetesen $x_0 = 0$ és az $x_0 = \frac{3}{4}$.)

A logisztikus leképezés mind a Ljapunov-exponens $\lambda_{Ljap} = \ln(2) > 0$ tulajdonsága szerint, mind a káosz (matematikusok által közkedvelt) Devaney féle definíciója szerint a teljes $[0,1]$ intervallumon kaotikus.

3.3. Definíció Legyen (X, d) kompakt metrikus tér és legyen $f : X \rightarrow X$ folytonos leképezés. Az f iteráltjai által generált dinamika az X halmazon (az X halmaz egészén) Devaney értelemben kaotikus⁵, ha teljesül az alábbi három tulajdonság:

- kezdeti feltételektől való érzékeny függés
 $\exists \eta_0 \forall \varepsilon \forall x \exists N \exists \tilde{x}$, hogy $d(\tilde{x}, x) < \varepsilon$ és $d(f^N(\tilde{x}), f^N(x)) > \eta_0$
- a hosszú periódusú pályák sűrűek
 $\forall \varepsilon \forall x \forall N \exists \tilde{x} \exists \tilde{N}$, hogy $d(\tilde{x}, x) < \varepsilon$, $\tilde{N} > N$ és $f^{\tilde{N}}(\tilde{x}) = x$
- létezik sűrű pálya
 $\exists x^* \forall \varepsilon \forall x \exists N$, hogy $d(f^N(x^*), x) < \varepsilon$

Devaney káosz-definíciója folytonos idejű dinamikus rendszerekre minimális változtatásokkal fogalmazható át.

⁵amúgy a káosznak nincsen igazi, mindenki által egységesen és kizárólagosan elfogadott definíciója. Vannak standard példák, mint a Smale-patkó, a szolenoid-leképezés, a logisztikus leképezés, Arnold macskája etc. Ha egy dinamikus rendszer sok olyan tulajdonsággal rendelkezik, mint ezen alappéldák egyike-másika, akkor kaotikusnak tekintendő. A legismertebb kaotikus differenciálegyenletek a Lorenz-rendszer és a Chua-kör. Mindkettőt tárgyalni fogjuk, de csak érintőlegesen, a szinkronizációkról szóló példák egyikeként.

A tipikus egyébként az, hogy a pályák valószínűségszámítási és topológiai értelemben vett óriási többsége sűrű. Egy kaotikus halmazon belül teljes az összevisszaság, de maga a kaotikus halmaz egésze, mint szuperstruktúra, gyakorta kifejezetten stabil. Sőt az is lehet, hogy a pontos definíció teljes értelmében, strukturálisan stabil. Egy dinamikus rendszer teljes fázistere a Devaney definíció értelmében tartalmazhat több, egymás mellett létező sőt egymástól független kaotikus halmazt.

3.3. Káosz egy dimenzióban. A legegyszerűbb tételek

A korlátos és zárt intervallumokat önmagukba képező folytonos függvények — röviden *intervallumleképezések* — iterációinak három-periodikus pontjai különleges jelentőségűek. Fontosságukat két klasszikus eredmény mutatja.



3.3. ábra. Sarkovszkij neve, lengyel átírásban (II. János Pál pápa kézírása)

3.4. Tétel Sarkovszkij⁶, 1964, egyszerűsített változat *Legyen $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ folytonos leképezés. Abból a tényből, hogy f -nek van (nemtriviális, tehát nem fixpont) három-periodikus pontja, már következik, hogy tetszőleges N pozitív egész esetén van N -periodikus pontja is, ahol N a minimális periódus.*

3.5. Tétel \gg Period Three Implies Chaos \ll (Tien-Yien) Li és Yorke, 1971 *Legyen $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ folytonos leképezés. Abból a tényből, hogy f -nek van (nemtriviális, tehát nem fixpont) három-periodikus pontja, már következik, hogy (legalábbis az $[a, b]$ intervallum egy részhalmazán) f kaotikus.*

A most következőkben először azt igazoljuk, hogy elegendően nagy A esetén Ricker (3.5) modelljének van három-periodikus pontja. Ezután is a periodikus pontok maradnak a figyelem középpontjában. Jóllehet törekedni fogunk bizonyos általánosságra, a Ricker (3.5) modellhez, pontosabban a Ricker féle (3.6) függvényhez időről időre visszatérünk

⁶Mielőtt betegsége komolyra fordult volna, II. János Pál pápa vendégül látta a Krakói Jagelló Egyetem néhány tanárát, akiket régóta ismert. Egyikük, Krzysztof Ciesielski — akitől ezt a történetet hallottam — kis könyvecskét vitt magával ajándékba: sok ábrával, afféle középiskolás matematika szakköri füzetet, amelynek társszerzője volt. Amikor két vagy három nappal később (mindannyian tudták, immár véglegesen) elbúcsúztak az egykori egyetemi lelkésztől, a pápa szóba hozta az ajándékba kapott szakköri füzetet. \gg Átlapoztam azt a kis könyvecskét a káoszról — mondta — igazán érdekes volt. Hogy is hívják azt az ukrán matematikust? \ll A kérdezt eltátotta száját és egy hang nem sok, annyi sem jött ki a torkán. De meglepetése csak fokozódott. Még az épületen belül voltak, amikor egy fiatal férfi utolérte őket. Egy A4-es papírlap volt a kezében, és a papírlapon egyetlen szó, az ukrán matematikus neve.

majd. Így a tárgyalásmód, minden absztrakció ellenére, csakúgy mint a jogrend Angliában, precedens/példa alapú.

3.6. Tétel *A Ricker féle (3.6) leképezés harmadik iteráltjának létezik nemtriviális fixpontja, amennyiben $A > 55$.*

Bizonyítás. Három-periodikus pálya kereséséhez az $x^* = f^3(x^*)$ fixpontegyenlet (amelyet egy három-periodikus $x_0 \xrightarrow{f} x_1 \xrightarrow{f} x_2 \xrightarrow{f} x_3 = x_0$ pálya minden egyes $x_0, x_1, x_2, x_3 = x_0$ pontja kielégít) kell megoldani, arra is vigyázva, hogy $x^* \neq f(x^*)$ legyen. Az $x \rightarrow f(x) = Axe^{-x}$ Ricker függvény második és harmadik iteráltjának

$$f^2(x) = A^2xe^{-x}e^{-Axe^{-x}} \quad \text{és} \quad f^3(x) = A^3xe^{-x}e^{-Axe^{-x}}e^{-A^2xe^{-x}e^{-Axe^{-x}}}$$

képleteit nem nehéz felírni, de azok kezelhetetlenül bonyolultak.

Így a bizonyítás csak a függvényvizsgálat szokásos és jól ismert módszerein alapulhat. Elsőként azt vegyük észre, hogy Ricker (3.5) leképezése a $[0, \frac{A}{e})$ intervallumot önmagába viszi, hiszen amint már megállapítottuk,

$$\operatorname{argmin}_{x \in [0, \infty)} f(x) = 0 \quad \text{és} \quad f(0) = 0, \quad \operatorname{argmax}_{x \in [0, \infty)} f(x) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = \frac{A}{e},$$

ugyanakkor

$$f\left(\frac{A}{e}\right) = \frac{A^2}{e} e^{-\frac{A}{e}} \quad \text{roppant kicsiny, ha } A \text{ nagyon nagy.}$$

Ez adja az ötletet, hogy az $x_0, x_1, x_2, x_3 = x_0$ három-periodikus trajektóriát az $x_0 < x_1 = f(x_0) < x_2 = f(x_1) \approx 1$ és $x_0 = x_3 \approx f(1)$ feltételek teljesítésével nyerjük.

Bolzano tétele értelmében elegendő kimutatnunk, hogy alkalmasan választott $0 < x_0 < \tilde{x}_0 < \log(A)$ esetén $f^3(x_0) < x_0$ és $f^3(\tilde{x}_0) > \tilde{x}_0$.

Ez utóbbi a könnyebb: az $\tilde{x}_0 = \log(A) - \varepsilon$ választással — itt $A > e^2$ és $\varepsilon > 0$ elegendően kicsiny állandó — a 3.1. Tétel [U] része szerint $f(\tilde{x}_0) > \log(A)$, $f^2(\tilde{x}_0) < \log(A)$, $f^3(\tilde{x}_0) > \log(A)$ és készen is vagyunk.

Ami az x_0 választást illeti, próbálkozzunk az $A = e^\gamma$ és az $x_0 = e^{-\gamma}$ értékekkel, ahol $\gamma > 0$ később meghatározandó paraméter. A minden $x \in \mathbb{R}$ esetén érvényes $e^{-x} \geq 1 - x$ egyenlőtlenséget (ami csak annyit jelent, hogy az e^{-x} mint konvex függvény a (0,1) ponton átmenő érintője felett helyezkedik el) alkalmazva

$$1 > x_1 = f(x_0) = e^{-e^{-\gamma}} \geq 1 - e^{-\gamma} = \xi > 0.$$

Mivel az f növekvő függvény a $[0, 1]$ intervallumon, ebből

$$\Rightarrow x_2 = f(x_1) \geq f(\xi) = e^\gamma(1 - e^{-\gamma})e^{-(1 - e^{-\gamma})} > \frac{e^\gamma - 1}{e} > 1 \quad (\text{ha } \gamma > 2)$$

adódik. Mivel f csökkenő függvény a $[1, \infty)$ félegyenesen, azt kapjuk, hogy

$$\Rightarrow x_3 = f(x_2) \leq f(f(\xi)) < e^\gamma \frac{e^\gamma - 1}{e} e^{-\frac{e^\gamma - 1}{e}} < e^{2\gamma - e^{\gamma-1}} < e^{-\gamma} \quad (\text{ha } \gamma > 4),$$

mert ekkor a kitevők összehasonlításával $3\gamma - e^{\gamma-1} < 0$. Végig „nagyvonalú egyenlőtlenségekkel” számoltunk, így az $A = e^\gamma > e^4 = 54.59 \dots$ választás bőven elegendő. \square

A számítógép itt is óriási előnyben van. A $\text{plot}(f)$ numerikus vizsgálatok szerint az $x^* = f^3(x^*)$ egyenletnek pontosan akkor van nemtriviális (tehát az f függvény 0 és $\log(A)$ fixpontjaitól különböző) megoldása, ha $A \geq A_*$, ahol $A_* = 22.265 \dots$ (három tizedesjegy közelítéssel). A 3.6. Tétel ennél jóval gyengébb eredményt bizonyít.)

A következő két Lemma együttesen arról szól, hogy intervallumleképezések esetén egyetlen három-periodikus pont létezése hogyan implikálja a periodikus pontok egy sokkal gazdagabb, megszámlálható számosságú családjának létezését. Jóllehet a 3.8. Lemma I_1, I_2, \dots, I_N intervallumainak mindegyike választható a 3.7. Lemma-beli L és R halmazok bármelyikének, a 3.8. Lemma nem a 3.7. Lemma közvetlen folytatása: a (3.8) tulajdonság szerint a 3.8. Lemma F függvénye a 3.7. Lemma F függvényének önmagával vett kompozíciója, az $F \circ F = F^2$ függvény.

Ricker modelljéhez visszatérve mindebből az következik, hogy $A > 55$ esetén tetszőleges N pozitív egész számhoz Ricker (3.6) leképezésének legalább 2^N egymástól páronként különböző $2N$ -periodikus pontja van (s közöttük olyanok is, amelyeknek $2N$ a minimális periódusa: szép és nem nehéz feladat meghatározni ez utóbbiak pontos számát).

3.7. Lemma *Legyen $[a, b]$ az \mathbb{R} számegyenes korlátos és zárt intervalluma. Legyen továbbá*

$$F : [a, b] \rightarrow [a, b]$$

folytonos függvény, és legyen

$$x_0 \xrightarrow{F} x_1 \xrightarrow{F} x_2 \xrightarrow{F} x_3 = x_0 \quad \text{három-periodikus pálya,}$$

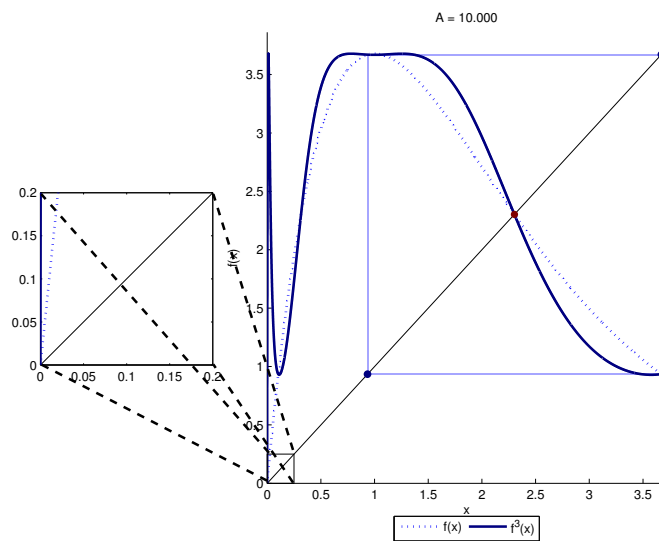
melynek három a minimális periódusa. Ekkor léteznek olyan $L, R \subset [a, b]$ korlátos és zárt, diszjunkt intervallumok, hogy

$$F^2(L) \supset L \cup R \quad \text{és} \quad F^2(R) \supset L \cup R. \quad (3.8)$$

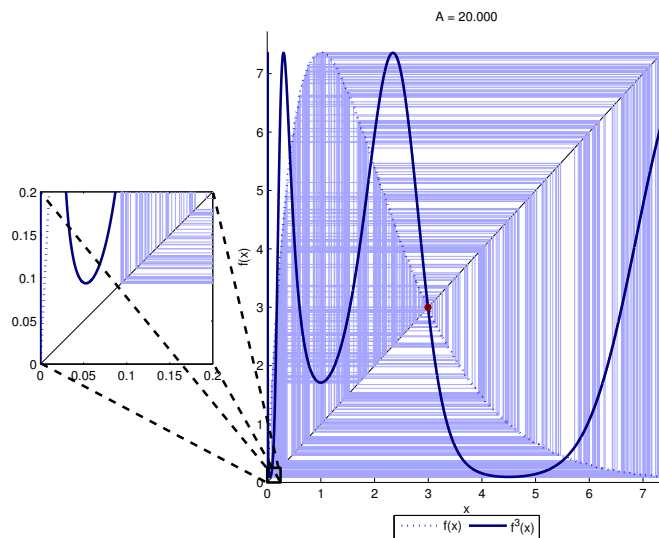
Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül⁷ feltehető, hogy $x_1 < x_2 < x_3$ és (ha szükséges, az x tengely irányítását megfordítandó)

$$F(x_1) = x_2, \quad F(x_2) = x_3, \quad F(x_3) = x_1. \quad (3.9)$$

⁷A (3.9) hármas-ciklus tulajdonság az x_1, x_2, x_3 pontok tetszőleges nagyság szerinti sorrendjét engedi meg. A $3! = 6$ különböző sorrend az $x_1 < x_2 < x_3$, $x_2 < x_3 < x_1$, $x_3 < x_1 < x_2$ illetve az $x_3 < x_2 < x_1$, $x_2 < x_1 < x_3$, $x_1 < x_3 < x_2$ csoportosításnak megfelelően kétféle típusra esik szét.

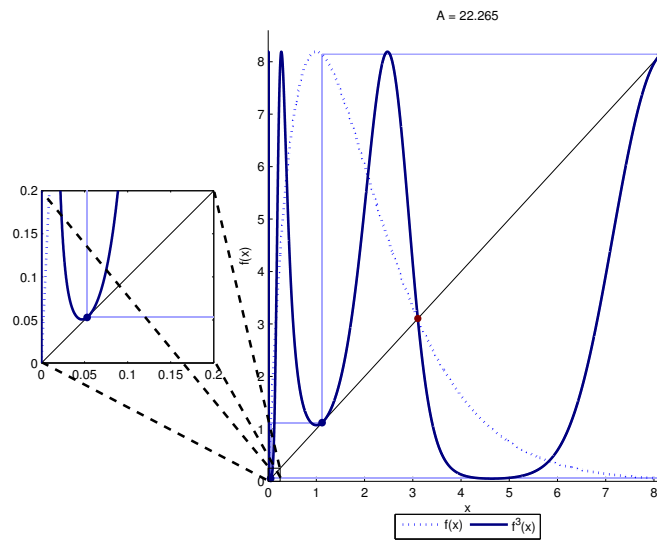


(a) $A = 10$: a dinamika még nem kaotikus

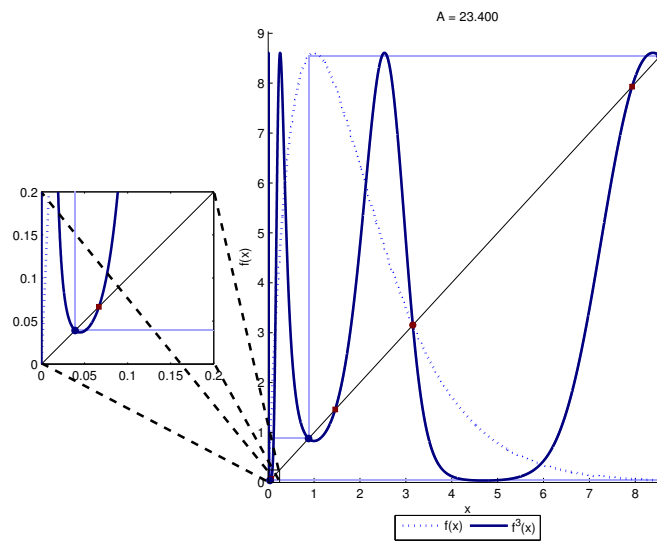


(b) $A = 20$: a dinamika már kaotikus

3.4. ábra. Ezen és a következő két ábrán a pontozott vonal az f grafikonja, a vastag vonal az $f^3 = f \circ f \circ f$ grafikonja. A három-periodikus pont az $A_* = 22.265$ paraméterértéknél jelenik meg és az összes ennél nagyobb A értékre is megmarad

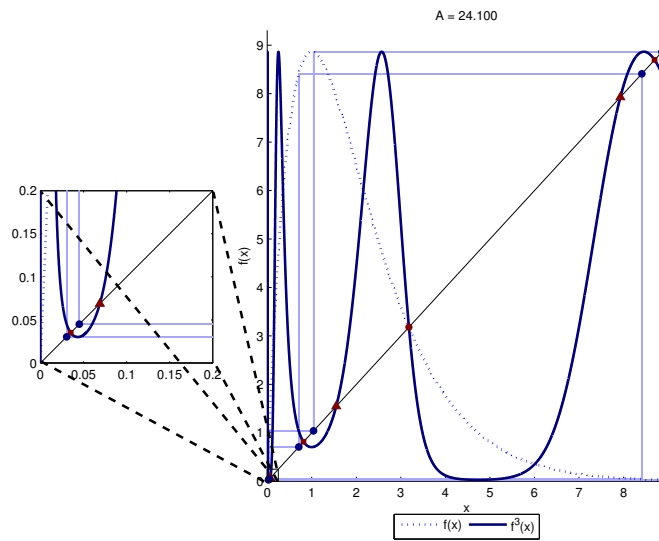


(a) $A = 22.265$: nyereg-csomó bifurkáció három pontban egyszerre

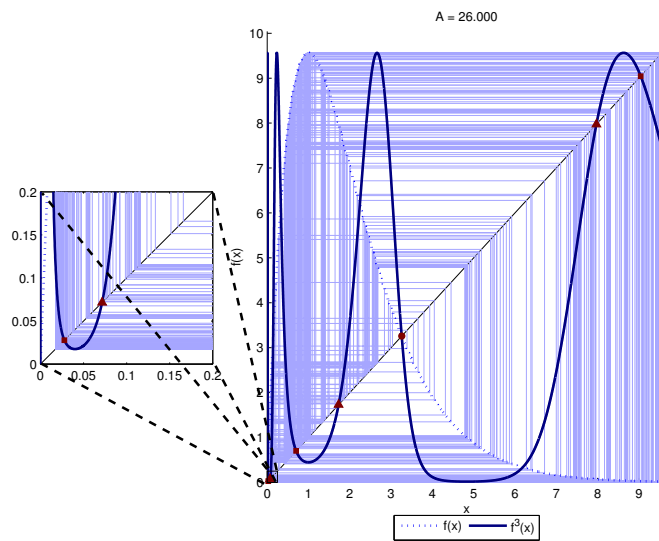


(b) $A = 23.4$: a három-periodikus stabil pálya dominál

3.5. ábra. A frissen született három-periodikus pálya azonnal szétesik egy stabil és egy instabil három-periodikus pályára a periodikus ablakban



(a) $A = 24.1$: az első perióduskettőződés, háromról hatra



(b) $A = 26$: kifejlett káosz

3.6. ábra. A $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow \dots$ perióduskettőző bifurkációsorozat végét vet a periodikus ablaknak. Kicsivel később kialakul a kifejlett káosz

Mivel $F(x_2) > x_2$ és $F(x_3) < x_3$, az F függvény grafikonja az x_2 és az x_3 pontok között metszi az origón áthaladó 45 fokos egyenest. Így az F függvénynek létezik fixpontja az (x_2, x_3) intervallumban. Jelöljük ezt a fixpontot z -vel és vegyük észre, hogy $F(x_1) < z$ és $F(x_2) > z$. Ismét csak Bolzano tételét használva, létezik olyan $y \in (x_1, x_2)$ pont, amelyre $F(y) = z$.

Mivel $F([a, b]) \subset [a, b]$, az F függvényt lehet iterálni. Tekintsük a $\varphi = F^2$ második iterált-leképezést az $[y, z]$ intervallumon. A konstrukció szerint

$$\varphi(y) = F(z) = z, \quad \varphi(x_2) = F(x_3) = x_1 < y, \quad \varphi(z) = F(z) = z.$$

Bolzano tétele most olyan $u \in (y, x_2)$ és $v \in (x_2, z)$ pontok létezésére vezet, amelyre $\varphi(u) = \varphi(v) = y$. Az $L = [y, u]$ és az $R = [v, z]$ választással $\varphi(L), \varphi(R) \supset [y, z] \supset L \cup R$. \square

3.8. Lemma *Legyen $N \geq 1$ egész szám, és legyenek I_1, I_2, \dots, I_N az \mathbb{R} számegegyenes korlátos és zárt, páronként nem feltétlenül diszjunkt intervallumai. Legyen továbbá $I_0 = I_N$ és legyen*

$$F : \cup\{I_k \mid k = 1, 2, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}$$

folytonos függvény. Bevezetve az $I_{k-1} \xrightarrow{F} I_k$ jelölést is, tegyük fel, hogy

$$I_{k-1} \xrightarrow{F} I_k \quad \Leftrightarrow \quad F(I_{k-1}) \supset I_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Ekkor létezik olyan

$$x_0 \xrightarrow{F} x_1 \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} x_N = x_0 \quad \text{periodikus pálya, melyre } x_k \in I_k, \quad k = 1, \dots, N.$$

Bizonyítás. A kiindulás tehát

$$I_0 \xrightarrow{F} I_1 \xrightarrow{F} \dots \xrightarrow{F} I_{N-2} \xrightarrow{F} I_{N-1} \xrightarrow{F} I_N = I_0.$$

A Bolzano tétel egy, a szokásosnál kicsit igényesebb alkalmazása az $I_{N-1} \xrightarrow{F} I_N = I_0$ feltevés alapján olyan $J_{N-1} \subset I_{N-1}$ zárt intervallumhoz vezet, amelyet az F pontosan a $J_N = I_N = I_0$ intervallumra képez: $F(J_{N-1}) = J_N$. Megismételve az érvelést, létezik olyan $J_{N-2} \subset I_{N-2}$ zárt intervallum, amelyre $F(J_{N-2}) = J_{N-1}$. És így tovább, lefelé haladó indukcióval. Az utolsó előtti és az utolsó lépésben azt kapjuk, van olyan $J_1 \subset I_1$ zárt intervallum, amelyre $F(J_1) = J_2$ és van olyan $J_0 \subset I_0$ zárt intervallum, amelyre $F(J_0) = J_1$. A konstrukció azt is mutatja, hogy az F függvény N -edik iteráltja értelmezve van a J_0 (korlátos és) zárt intervallumon, valamint azt is, hogy $F^k(J_0) = J_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Mivel $J_N = I_N = I_0 \supset J_0$, a $k = N$ választással az adódik, hogy $F^N(J_0) \supset J_0$, más szóval $J_0 \xrightarrow{F^N} J_0$.

Most ismét a Bolzano tétel egy, a szokásosnál már csak nagyon kicsinyég igényesebb alkalmazása következik: az $F^N : J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek létezik $x_0 \in J_0$ fixpontja, $F^N(x_0) = x_0$. Amint azt már igazoltuk, $F^k(J_0) = J_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. Így $x_k = F^k(x_0) \in J_k \subset I_k$, $k = 1, 2, \dots, N$. \square

A fejezet fő eredménye azt mondja ki, hogy egy dimenzióban bizonyos, könnyen ellenőrizhető feltételek esetén az egymástól bal–jobb sorozatok által kombinatorikusan megkülönböztethető trajektóriák számossága kontinuum. A 3.6. Tétel, valamint a (3.10) és a (3.8) tulajdonságok összehasonlítása azt mutatja, hogy a konklúzió $A > 55$ esetén igaz a Ricker féle (3.6) leképezésre is.

Az 1.31. Tétel és a 3.9. Tétel szerkezeti azonossága természetesen nem a véletlen műve. Az egyszerűség kedvéért azt mondjuk, hogy a $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sorozat mindkét irányban végtelen L – R sorozat, ha $Q_k \in \{L, R\}$ minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén.

3.9. Tétel *Legyenek $L, R \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt, diszjunkt intervallumok. Legyen*

$$F : L \cup R \rightarrow \mathbb{R}$$

olyan folytonos függvény, amelyre

$$F(L) \supset L \cup R \quad \text{és} \quad F(R) \supset L \cup R. \quad (3.10)$$

Legyen most a $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tetszőleges, mindkét irányban végtelen L – R sorozat. Ekkor van olyan $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ pontsorozat, hogy

$$x_k \in Q_k \quad \text{és} \quad x_{k+1} = F(x_k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

Más szóval létezik olyan, mindkét irányban végtelen trajektória, amely az L és az R intervallumokat az előre meghatározott sorrendben látogatja végig.

Bizonyítás. Első pillantásra meglepő, hogy a kérdéses trajektória mindkét irányban végtelen, jóllehet az F leképezés (3.10) miatt nem invertálható. Ezért először azt a speciális esetet bizonyítjuk, amikor $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tetszőleges, de csak az időben előre irányba végtelen L – R sorozat. Csak ha ezzel készen vagyunk, akkor kezdünk bele az általános eset tárgyalásába.

Tekintsünk tehát egy tetszőleges, de csak az időben előre irányba végtelen L – R sorozatot. Legyen ez $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Írjuk fel ennek első egy, két, három, négy etc. elemét egy-egy sorban, rendre egymás alá:

$$\begin{array}{cccccc} Q_0 & & & & & \\ Q_0 & Q_1 & & & & \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & & & \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

Majd soronként periodikusan, ismételjük meg az ottani egy, két, három, négy etc. elemet:

$$\begin{array}{cccccccccc} Q_0 & Q_0 & Q_0 & Q_0 & Q_0 & Q_0 & Q_0 & Q_0 & Q_0 & Q_0 & \dots \\ Q_0 & Q_1 & Q_0 & Q_1 & Q_0 & Q_1 & Q_0 & Q_1 & Q_0 & Q_1 & \dots \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_0 & \dots \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_0 & Q_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Ismét csak soronként egyesével, alkalmazzuk az előző Lemmát, rendre az $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ választással. Léteznek tehát egy-, kettő-, három- négy- etc.-periodikus trajektóriák, rendre az

$$\begin{array}{ll}
 x_0^1 \xrightarrow{F} x_1^1 = x_0^1 & \text{és } x_0^1 \in Q_0 \\
 x_0^2 \xrightarrow{F} x_1^2 \xrightarrow{F} x_2^2 = x_0^2 & \text{és } x_0^2 \in Q_0, x_1^2 \in Q_1 \\
 x_0^3 \xrightarrow{F} x_1^3 \xrightarrow{F} x_2^3 \xrightarrow{F} x_3^3 = x_0^3 & \text{és } x_0^3 \in Q_0, x_1^3 \in Q_1, x_2^3 \in Q_2 \\
 x_0^4 \xrightarrow{F} x_1^4 \xrightarrow{F} x_2^4 \xrightarrow{F} x_3^4 \xrightarrow{F} x_4^4 = x_0^4 & \text{és } x_0^4 \in Q_0, x_1^4 \in Q_1, x_2^4 \in Q_2, x_3^4 \in Q_3 \\
 \dots \dots \dots & \dots \dots \dots
 \end{array}$$

tulajdonságokkal. Ezután már alig maradt teendő, csak a Bolzano–Weierstrass tételt és a folytonosság sorozatokkal történő definícióját kell alkalmazni.

Rendezzük el a kapott periodikus trajektóriák pontjait a legelső táblázatnak megfelelően, de most explicit módon feltüntetjük az $N = k$ esetet is:

$$\begin{array}{cccccc}
 x_0^1 & & & & & \\
 x_0^2 & x_1^2 & & & & \\
 x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & & & \\
 x_0^4 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 x_0^k & x_1^k & x_2^k & x_3^k & \dots & x_{k-1}^k \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \downarrow & & & & & \\
 x_0 & & & & &
 \end{array}$$

Ebben a táblázatban már van egy lefelé mutató nyíl is — Q_0 korlátos és zárt intervallum lévén, az $\{x_0^k\}_{k \geq 1} \subset Q_0$ sorozatról az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy konvergens (és határértéke, az x_0 pont benne van a Q_0 halmazban). Mivel $x_1^k = F(x_0^k) \in Q_1$ minden $k \geq 2$ mellett, a $k \rightarrow \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy az $\{x_0^k\}_{k \geq 1}$ sorozattal együtt az $\{x_1^k\}_{k \geq 2}$ sorozat is konvergens, s az $x_1 \in Q_1$ határértékre $x_1 = F(x_0)$. Megismételve a gondolatmenetet, $x_2^k = F(x_1^k) \in Q_2$ minden $k \geq 3$ mellett és ebből $x_2 = F(x_1) \in Q_2$, majd $x_3^k = F(x_2^k) \in Q_3$ minden $k \geq 4$ mellett és így $x_3 = F(x_2) \in Q_3$, és ez vég nélkül folytatható:

$$\begin{array}{cccccccc}
 x_0^1 & & & & & & & \\
 x_0^2 & x_1^2 & & & & & & \\
 x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & & & & & \\
 x_0^4 & x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & & & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\
 x_0^k & x_1^k & x_2^k & x_3^k & \dots & x_{k-1}^k & & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \downarrow & \dots \\
 x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k & x_{k+1} & \dots
 \end{array}$$

először a középső, a nulladik oszlopban képezzük. Ez igazából az $\{x_0^k\}_{k \geq 1}$ sorozat egy részsorozatára való áttérést jelent. Ez az első nyíl. Ezután a(z indexek) részsorozat(ának) részsorozatát véve, a nulladik oszloptól közvetlenül balra lévő, mínusz egy sorszámú oszlopban vesszük a határértéket. Ez a második nyíl és így tovább, egyre csak balra. A Cantor féle átlós eljárás értelmében a részsorozatok részsorozatai soha nem fogynak el. A nulladik oszloptól balra lévő nyilak mindegyikének megrajzolása után a jobbra lévő nyilakat már úgy kapjuk, mint a $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ speciális esetben. \square

Az eddigiek némi ízelítőt adnak az egydimenziós leképezések káosz-elméletének elemeiből. Maga Sarkovszkij egyébként már 1964-ben is többet bizonyított.

3.10. Definíció *A pozitív egész számok Sarkovszkij féle rendezését azok*

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright 11 \triangleright \dots \triangleright 6 \triangleright 10 \triangleright 14 \triangleright 18 \triangleright 22 \triangleright \dots \triangleright 12 \triangleright 20 \triangleright 28 \triangleright 36 \triangleright 44 \triangleright \dots \triangleright 2^k \cdot 3 \triangleright 2^k \cdot 5 \triangleright 2^k \cdot 7 \triangleright 2^k \cdot 9 \triangleright 2^k \cdot 11 \triangleright \dots \triangleright 2^N \triangleright \dots \triangleright 16 \triangleright 8 \triangleright 4 \triangleright 2 \triangleright 1$$

alakú felsorolása definiálja. Az $n \triangleright \tilde{n}$ képletet úgy olvassuk ki, hogy n nagyobb mint \tilde{n} a Sarkovszkij féle rendezésben.

Mivel a pozitív egész számok egyértelműen írhatók fel kettő-hatványok és páratlan egész számok szorzataként (azaz $n = 2^k p$, ahol k nemnegatív egész, p pedig páratlan szám), a definícióban megadott felsorolásban minden pozitív egész szám pontosan egyszer szerepel. (A kipontozások jelentését a \triangleright (szigorú rendezési) reláció

$$n = 2^k p \triangleright 2^{\tilde{k}} \tilde{p} = \tilde{n} \Leftrightarrow \begin{cases} (p = \tilde{p} = 1 \ \& \ k > \tilde{k}) \text{ vagy } (p > \tilde{p} = 1 \ \& \ \forall k, \forall \tilde{k}) \\ \text{vagy } (p \geq \tilde{p} > 1 \ \& \ k < \tilde{k}) \text{ vagy } (\tilde{p} > p > 1 \ \& \ k \leq \tilde{k}) \end{cases}$$

formális megadása teszi teljesen egyértelművé.)

3.11. Tétel Sarkovszkij, 1964, eredeti változat *Legyen $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ folytonos leképezés. Ha $n \triangleright \tilde{n}$ és f -nek van n -periodikus pontja, akkor \tilde{n} -periodikus pontja is van. (Mind az n , mind az \tilde{n} esetében periódus alatt itt a minimális periódus értendő.)*

Kezdve Li és Yorke 1971-es *Period Three Implies Chaos* cikkétől, a káosz szó hatalmas karriert futott be mind (a matematikára hivatkozó) közbeszédben, mind magában a matematikában. Sarkovszkij „csupán” a sok ciklus együttes létezését vette észre, Li és Yorke a kaotikus következményt is. A káosz matematikai felfedezője egyértelműen Smale, az ő 1960-as *patkó*-konstrukciója (Smale horseshoe) volt a legelső, teljesen megértett példa kaotikus dinamikára. A villamosmérnök Van der Pol és Van der Mark már 1927-ben hallották a determinisztikus káosz hangját egy áramkörben. A debreceni Barna Béla, aki az ötvenes évek elején negyedfokú polinomok gyökeit kereste a Newton módszer segítségével⁸, is egyike a káosz-elmélet jeles előfutárainak. Legfontosabb felfedezését a következő alfejezet a 3.16. Tételként ismertetjük.

⁸ahogyan Tamássy Lajos, a debreceni matematikusok doyenje néhány éve mesélte: „a szőnyeg feltekerve, a bútorok félretolva, a Béla — egyik kezében ceruza, másik kezében hosszú, vékony, egyenes lécs — ott hasal egy nagy lepedőnyi csomagolópapíron és huzigálja az érintőket”.

3.4. Fraktálok és Newton módszer

Newton módszer alatt Newton klasszikus (3.13) érintő-módszerét és ennek magasabb dimenziós, természetes általánosítását értjük.

3.12. Példa Tekintsük a $z^3 + 1 = 0$ egyenletet a komplex síkon. Ha ezt a $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 + 1}{3z_n^2}$ Newton módszerrel oldjuk meg, akkor egy valószínűséggel minden $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex számból indulva a keletkező sorozat a -1 szám köbgyökeinek, tehát a $z_1^* = -1$, $z_{2,3}^* = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ számok egyikéhez tart. A dinamikának így három attraktora van, amelyek egyenként egy-egy pontból állnak. A z_1^* , z_2^* , z_3^* attraktorok $A(z_1^*)$, $A(z_2^*)$, $A(z_3^*)$ vonzási tartományai nyílt, de nem összefüggő, megszámlálhatóan végtelen sok komponensből álló halmazok. A vonzási tartományokat (azokat a cellákat kell az egyre finomodó rácsokból egybegyűjteni, amelyek N iteráció után már elegendően közel vannak a három pont-attraktor egyikéhez) három különböző színnel színezve azt kapjuk, hogy az attraktorok medencéinek határai bonyolult szerkezetűek és ahol szomszédosak, ott mind a három tartomány mindkét másikkal határos. Szép és viszonylag egyszerű számítógépes feladat, amely a valós és a képzetes részeket $z_n = x_n + iy_n$ szerint az

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 + 1}{3z_n^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + \frac{x_n^2 - y_n^2}{3(x_n^2 + y_n^2)^2} \\ y_{n+1} = \frac{2y_n}{3} - \frac{2x_n y_n}{3(x_n^2 + y_n^2)^2} \end{cases}$$

koordinátákra szétválasztott alakjukban is jól kezeli. A három színes tartomány Cantor jellege (és persze a százhusz fokos forgási szimmetria) rögtön szembeötlő.

Az absztrakt matematika mindenben megerősíti a számítógépes tapasztalatokat. A vonzási tartományok határaitra

$$\mathcal{J} = \partial A(z_1^*) = \partial A(z_2^*) = \partial A(z_3^*), \tag{3.12}$$

és ez a (Gaston Julia francia matematikus tiszteletére elnevezett) \mathcal{J} Julia halmaz nulla-mértékű. A \mathcal{J} halmaz a Newton módszer $N_f(z) = \frac{2z}{3} - \frac{1}{3z^2}$ leképezése taszító periodikus pontjai halmazának lezártja. Belső szerkezetének bonyolultságát a boxdimenzió fogalmával lehet számszerűsíteni.

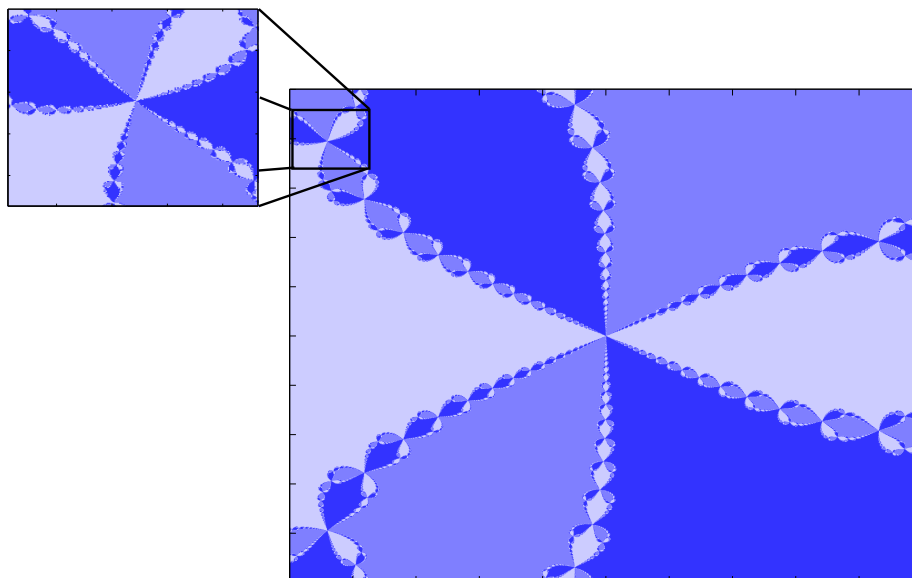
3.13. Definíció Legyen \mathcal{C}_ε az \mathbb{R}^d tér $\varepsilon > 0$ oldalhosszúságú kockákkal történő szokásos rácsebontása. Az egyes kockákat/cellákat C jelöli. Legyen továbbá $A \subset \mathbb{R}^d$ korlátos halmaz. Az A alsó illetve felső boxdimenziója

$$\dim_B^-(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \quad , \quad \dim_B^+(A) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)}$$

ahol

$$N(\varepsilon) = \#\{C \in \mathcal{C}_\varepsilon \mid C \cap A \neq \emptyset\}.$$

Ha a limes inferior és a limes superior megegyeznek, akkor boxdimenzióról beszélünk.



3.7. ábra. A klasszikus Newton módszer a $z^3 + 1 = 0$ egyenletre a komplex síkon: a különböző színárnyalatok a z_1^* , z_2^* , z_3^* gyökök mint attraktorok vonzási tartományait jelzik. A három vonzási tartomány közös határa a Julia halmaz. Az ábra (részben) önhasonló jellege világosan felismerhető.

A klasszikus esetben visszakapjuk a megszokott dimenzió számértékét. Valóban, a d dimenziós és $N_0 \in \mathbb{N}$ oldalhosszúságú $A = [0, N_0]^d$ kockát a $\mathcal{C}_{1/k}$ kockarács $(N_0 k)^d$ darab cellája fedi le, tehát

$$\dim_B([0, N_0]^d) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln((N_0 k)^d)}{\ln(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d(\ln(N_0) + \ln(k))}{\ln(k)} = d.$$

Ha egy $A \subset \mathbb{R}^d$ korlátos halmaznak van belső pontja, akkor a boxdimenzió szintén létezik és d .

Ha egy $A \subset \mathbb{R}^d$ korlátos halmaz boxdimenziója létezik és nem egész szám, azaz ha $\dim_B(A) \notin \mathbb{N}$, akkor az A halmazt sokan fraktálnak nevezik. A magunk részéről vitatjuk a szóhasználat illetően jogosságát. A híres–nevezetes

$$S_M = \{c \in \mathbb{C} \mid a \ z_0 = 0, \ z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ rekurzív sorozat korlátos} \}$$

Mandelbrot halmaz határa, (a belső ponttal nem rendelkező) ∂S_M halmaz ugyancsak töredezett/fragmentált, sőt egy egész sor látványos önhasonlósági tulajdonsággal is rendelkezik, de a roppant nehéz $\dim_B(\partial S_M) = 2$ tulajdonság miatt nem volna fraktál.

A *fraktál* szónak a szakirodalomban nincs egységes definíciója. Ugyanaz a helyzet, mint a káosz elnevezéssel. Ha egy dinamikus rendszer sok olyan tulajdonsággal rendelkezik, mint a Smale–patkó, a szolenoid–leképezés, a logisztikus leképezés, a Lorenz–rendszer, a Chua–kör vagy éppen Arnold macskája etc., akkor kaotikusnak tekintendő. Ha \mathbb{R}^d egy A részhalmaza sok olyan tulajdonsággal rendelkezik, mint

- a $z^3 + 1 = 0$ egyenlet Newton módszerrel képzett \mathcal{J} Julia halmaza
- az S_M Mandelbrot halmaz ∂S_M határa
- a $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(5^n x)}{2^n}$ valós függvény grafikonja
- egy iterált függvényrendszer attraktora (pld. a Barnsley páfrány)

objektumok egyike vagy másika, akkor A fraktálnak tekintendő.⁹

Jóllehet a b függvény képlete Weierstrass zsenialitását dicséri, a hozzávezető konstrukció geometriáját már Bolzano is részletesen kidolgozta majd ötven évvel korábban. Minden olyan $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonja, amely *mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható* — köztük a b függvényé is — fraktál. Az önhasonlóság, a *felnagyított kicsi részek lényegi hasonlósága a nagyobb részekhez* tulajdonság a fenti példák mindegyikében markánsan megjelenik. Az *önhasonlóság* egyszerre utal a fraktálszerkezet bonyolultságára, de paradox módon arra is, hogy az önhasonló szerkezet információtartalma (számos fraktált lehet egyszerű képletekkel leírni) viszonylag csekély.

A soronkövetkező fejezet teljes egészében iterált függvényrendszerekről fog szólni.

A fraktálok a természetben gyakran előfordulnak. Mandelbrot (aki egyike volt Neumann János utolsó tanítványainak) első példái: “Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.” A Práter utca leendő mérnökeihez egy össze–vissza hajtogatott nano–antenna, egy fraktálkondenzátor, a felületkémia bizonyos bevonatai, a nyálkahártyákat borító baktériumflóra biofilmjei, vagy éppen a piramissejtek dendrit–fái bizonyára sokkal közelebb állnak. Amik egy matematikushoz is nagyon közel állnak, azok a Kékes északi lejtőjének különböző színű korallgombái — csak óvatosan, van közöttük ehető és nem ehető egyaránt; mindannyian védelem alatt állnak: hadd gyönyörködjenek mások is bennük.

Ahogy a pozitív Ljapunov exponens káosz–indikátor, úgy a nem egész számú boxdimenzió fraktál–indikátor. Az egydimenziós esetet leszámítva sajnos mind λ_{Ljap} , mind \dim_B meghatározása kemény számítógépes feladat: a megfelelő határértékekhez történő konvergencia, ha egyáltalán konvergenciát tapasztalunk, notóriusan lassú szokott lenni. Mind a káosz–, mind a fraktál–indikátoroknak se szeri, se száma. A boxdimenzió mellett

⁹Ha már az építészet a kőbe vésett zene és az építészek a megfagyott muzsikuskok ... akkor a fraktál a megfagyott káosz.

gyakran használatos a Hausdorff és a hasonlósági dimenzió fogalma is, amelyek szintén fraktál-indikátorok. De $\dim_B(\{0, 1, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots, n^{-1}, \dots\}) = 0.5$ — vannak megkeletések!

A **3.12.** Példa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \rightarrow z^3 + 1$ függvénye után most a Newton módszer konvergenciáját általában, divergenciáját pedig a számegegyenesen, külön is megvizsgáljuk.

Legyen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ kétszer folytonosan deriválható függvény. A Newton módszer — ha már elegendően közel vagyunk az $f(x) = 0$ egyenlet egy $x^* \in \mathbb{R}^d$ gyökéhez —

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{csak a } d = 1 \text{ esetben}) \quad (3.13)$$

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n) \quad (\text{tetszőleges } d \geq 1 \text{ esetén}) \quad (3.14)$$

kényelmesen implementálható, gyorsan konvergáló eljárást szolgáltat az x^* gyök megkeresésére.

Az egyszerűség kedvéért legyen $d = 1$ és tegyük fel, hogy f az $[x^*, x_0]$ intervallumon monoton növekvő, szigorúan konvex függvény. (Ekkor $f'(x_n) \neq 0$, és így x_n -nel együtt $x_{n+1} \in (x^*, x_n)$ is végig definiált, $n = 0, 1, 2, \dots$) Azt is kikötjük, hogy $f'(x^*) \neq 0$.

Induljunk ki az x_n pontbeli érintő egyenes (az elsőrendű Taylor polinom) hibájára vonatkozó Lagrange féle maradéktag integrálos alakjából:

$$f(x^*) - f(x_n) - [f'(x_n)](x^* - x_n) = \int_0^1 (1 - \tau) f''(x_n + \tau(x^* - x_n)) d\tau \cdot (x^* - x_n)^2.$$

Az n -edik iteráció hibájára bevezetve a $H_n = |x_n - x^*|$ jelölést, a (3.13) definiáló formula szerint

$$x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n) - f(x^*)}{f'(x_n)} = \frac{1}{f'(x_n)} (f(x^*) - f(x_n) - f'(x_n) \cdot (x^* - x_n)),$$

és így

$$H_{n+1} \leq Q H_n^2 \quad \text{ahol} \quad Q = \frac{M}{2m}, \quad (3.15)$$

$$m = \min\{f'(x) \mid x^* \leq x \leq x_0\}, \quad M = \max\{f''(x) \mid x^* \leq x \leq x_0\}.$$

(Az f függvényre tett egyszerűsítő feltételek miatt $m = f'(x^*) > 0$.) Amennyiben $H_0 = |x_0 - x^*|$ olyan kicsiny, hogy $q = Q H_0 < 1$, akkor (3.15) kvadratikus konvergencia-becslést,

$$H_{n+1} \leq Q^{2^n - 1} H_0^{2^n} \quad \Leftrightarrow \quad H_{n+1} \leq q^{2^n - 1} H_0 \rightarrow 0 \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

pedig elképesztően gyors konvergenciát jelent.¹⁰ A (3.14) iteráció (3.15) formulához hasonló kvadratikus konvergencia-becslésének levezetése ugyanezt az utat követi. A kérdések kérdése természetesen az $x_0 \in \mathbb{R}^d$ kezdőérték megválasztása.

¹⁰Vannak magasabb-rendű, a gyökkeresésre alkalmas módszerek (például az

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left(1 + \frac{f(x_n) f''(x_n)}{2(f'(x_n))^2} \right)$$

3.14. Megjegyzés Ha $d = 1$ és $f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(k)}(x^*) = 0$, de $f^{(k+1)}(x^*) \neq 0$, akkor a (3.13) Newton módszer konvergenciasebessége kvadratikus helyett csak lineáris és

$$\frac{H_{n+1}}{H_n} \rightarrow \frac{k}{k+1} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{és persze „sikeres” } x_0 \text{ esetén.}$$

A (3.13) iteráció vizsgálatára vezessük be (ahol csak definiálható) az

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \text{függvényt és vegyük észre, hogy} \quad \frac{d}{dx} N_f(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^2}.$$

Ebből azonnal látszik, hogy x^* egy kicsiny környezetében N_f kontrakció (hiszen ott $f(x) \approx f(x^*) = 0$ miatt $q = \left| \frac{d}{dx} N_f \right| \ll 1$) és a kontrakciós állandó a környezet zsugorodása esetén nullához tart.

3.15. Példa Könnyű példát mutatni arra, hogy a (3.13) Newton iterációnak lehet aszimptotikusan stabil kettő-periodikus trajektóriája. Az

$$f(x) = x^3 - 2x + 2 \quad , \quad N_f(x) = x - \frac{x^3 - 2x + 2}{3x^2 - 2} \quad , \quad \frac{d}{dx} N_f(x) = \frac{6x(x^3 - 2x + 2)}{(3x^2 - 2)^2}$$

választás megfelelő, hiszen $N_f(0) = 1$, $N_f(1) = 0$ miatt $0 \xrightarrow{f} 1 \xrightarrow{f} 0$ és

$$\frac{d}{dx} N_f^2(0) = \frac{d}{dx} N_f(N_f(0)) \cdot \frac{d}{dx} N_f(0) = \frac{d}{dx} N_f(1) \cdot \frac{d}{dx} N_f(0) = 6 \cdot 0 = 0.$$

A Newton iteráció nem-konvergens pontjai halmazának szerkezetét a valós függvények egy tág osztályára először Barna Béla fejtette meg.

3.16. Tétel Barna Béla, 1953 *Legyen f olyan negyedfokú polinom, amelynek négy különböző valós gyöke van. Ekkor*

$$\{x_0 \in \mathbb{R} \mid \text{az onnan induló (3.13) Newton iteráció nem konvergens}\} = B \cup C,$$

ahol B izolált pontok egy megszámlálható halmaza, C egy nulla-mértékű Cantor halmaz, és $B \cap C = \emptyset$.

Householder féle harmadrendű módszer), de nem szokás használni őket. A konkrét alkalmazásokban a Newton-módszer abszolút prioritást élvez. Mivel a (3.13) de különösen a (3.14) iterációk leginkább számolásigényes része a derivált reciprokának illetve a deriváltmátrix inverzének meghatározása, a gyakorlatban inkább az

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

és az

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} = x_n - [f'(x_0)]^{-1} f(x_n)$$

eljárásokat használják — különösen akkor, ha már viszonylag közel vagyunk a meghatározandó gyökhöz.

Jóllehet a káosz-terminológia akkor még egyáltalán nem létezett, ez bizony (a fő eredményt kísérő megjegyzéseket összerakva) káoszt, és pedig taszító káoszt jelent a javából! Smale *On the efficiency of algorithms of analysis* (Bull. Amer. Math. Soc. 13(1985), 87–121.) cikkében több mint egy oldal hosszan ismerteti Barna Béla *Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen* (Publ. Math. Debrecen 3(1953), 109–118.) dolgozatát és kicsit később publikált további eredményeit. (Az akkor már 76 esztendő nyugalmazott matematika-tanárt még éppen idejében érte a nemzetközi elismerés.)

Fraktálokkal már az 1.31. Tétel kapcsán végzett számítógépes kísérletekben is találkoztunk. Az ottani (1.31) egyenlet 2π -időperiódusához tartozó $\Phi(2\pi, 0, \cdot) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ megoldó-operátor globális attraktorának a tranziens káoszért felelős, nyeregyszerű része maga is fraktál. Ezt a halmazt az $\{(t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2\}$ háromdimenziós térben úgy lehet tettenérni, mint a fékezett, periodikusan gerjesztett (1.31) inga/hajóhinta aszimptotikusan stabil F_k^{per} , $k \in \mathbb{Z}$ periodikus megoldásaihoz tartozó $A(F_k^{per})$ vonzási tartományok közös részét. Ez a végtelen sok vonzási tartomány a *fractal basin boundary* elve szerint gabalyodik egymásba. A

$$J = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \partial A(F_k^{per}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \quad (3.16)$$

Julia halmaz pontjai mindegyikének minden környezetéből az aszimptotikusan stabil F_k^{per} periodikus megoldások mindegyikéhez indul trajektória.

Ez több is, kevesebb is, mint a $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 + 1}{3z_n^2}$ Newton iteráció (3.12) Julia halmazának tulajdonságai a komplex számsíkon. Ha a Newton módszert a $z^3 + 1 = 0$ komplex egyenlet helyett az $x^3 + 1 = 0$ valós egyenletre alkalmazzuk, akkor sem kaotikus, sem fraktál jelenségeket nem tapasztalunk. A Barna Béla által felfedezett tulajdonságokkal a harmadfokú $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomok egyike sem rendelkezik.

A Newton módszer vizsgálatát fejezzük be egy, csírájában már a babiloni matematika által is ismert példával.

3.17. Példa Saját első féléves analízis tanulmányainkból is emlékezhetünk rá, hogy a $\sqrt{2}$ közelítő értékét az

$$x_0 = 2 \quad \text{adott,} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

rekurzió alapján lehet kiszámítani. Ez a rekurziós formula nem más, mint a (3.13) képlet, ha azt az $x^2 - 2 = 0$ egyenletre (tehát az $f(x) = x^2 - 2$ esetre) alkalmazzuk.

Mi a teendő, ha $\sqrt[3]{7}$ értékere vagyunk kíváncsiak?

3.5. Iterált függvényrendszerek. Halmazértékű és véletlen iterációk

Az egész matematikai analízis egyik alapvető módszere kontrakciók fixpontjának iterációkkal történő közelítése. Láttuk, hogy ez az eljárás természetes módon fordul elő egy egész sor feladatban, úgymint

- speciális szerkezetű lineáris egyenletrendszerek megoldásakor
— Gauss–Seidel iteráció, Jacobi iteráció
- nemlineáris egyenlet(rendszer)ek gyökeinek meghatározásakor
— Newton módszer
- közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldásánál
— implicit Euler módszer, Picard féle szukcesszív approximáció
- közönséges differenciálegyenletek fázisportréjának megrajzolásakor
— nyeregpont instabil, stabil sokaságának numerikus előállítása

Most egy újabb, a képtömörítésben is használatos módszer mögöttes matematikáját ismertetjük. Lényegében ugyanez az eljárás vezet a legegyszerűbb fraktálok számítógépes előállításához is.

A teljesség kedvéért idézzük fel magát a kontrakciós fixponttételt is, amely a 2.21.. sorszámot viseli. Célunk a kontrakció fogalmának kiterjesztése halmazértékű leképezésekre. Ehhez először a Bolzano–Weierstrass tétel általánosítására van szükség.

Jelölje \mathbb{R}^d nem-üres, korlátos és zárt részhalmazainak rendszerét \mathcal{S} . Ha $S, \tilde{S} \in \mathcal{S}$, akkor távolságukat a Hausdorff által bevezetett

$$d_H(S, \tilde{S}) = \max\{ \max\{d(\tilde{s}, S) \mid \tilde{s} \in \tilde{S}\}, \max\{d(s, \tilde{S}) \mid s \in S\} \} \quad (3.17)$$

képlet definiálja. Itt $d(s, \tilde{S}) = \min\{d(s, \tilde{s}) \mid \tilde{s} \in \tilde{S}\}$ az s pont és az \tilde{S} nem-üres, korlátos és zárt halmaz távolsága, $d(s, \tilde{s}) = |s - \tilde{s}|$ pedig az s és az \tilde{s} pontoké.

3.18. Tétel *A d_H Hausdorff távolság az \mathcal{S} halmazt teljes metrikus térré teszi.*

Igaz továbbá, hogy az (\mathcal{S}, d_H) tér tetszőleges korlátos sorozatának van konvergens rész-sorozata. Más szóval ha az $\{S_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ sorozat korlátos, akkor van olyan $S^ \in \mathcal{S}$ halmaz és van olyan $S_{n'}$, hogy $d_H(S_{n'}, S^*) \rightarrow 0$ ha $n' \rightarrow \infty$.*

Magát a Hausdorff távolságot \mathbb{R}^d két nem-üres, korlátos részhalmaza között (sőt általában egy metrikus tér két nem-üres, korlátos részhalmaza között) is lehet definiálni — de ekkor a (3.17) képlet kapcsos zárójelén belül lévő két max helyett sup, az utána következő $d(s, \tilde{S})$ képletben pedig min helyett inf veendő.

Az $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pont $\varepsilon > 0$ sugarú nyílt és zárt

$$\mathcal{B}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - x_0| < \varepsilon\} \quad , \quad \mathcal{B}[x_0, \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - x_0| \leq \varepsilon\}$$

gömbjeinek mintájára, $S \in \mathcal{S}$ esetén vezessük be a

$$\mathcal{B}(S, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, S) < \varepsilon\} \quad , \quad \mathcal{B}[S, \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, S) \leq \varepsilon\}$$

jelöléseket. A $\mathcal{B}(S, \varepsilon)$ halmaz az S halmaz $\varepsilon > 0$ sugarú nyílt, a $\mathcal{B}[S, \varepsilon]$ halmaz pedig $\varepsilon > 0$ sugarú zárt környezete.

Ha $S, \tilde{S} \in \mathcal{S}$, akkor Hausdorff távolságuk a (3.17) képlettel teljesen egyenértékű, de kicsit másfajta szemléltetést lehetővé tevő

$$d_H(S, \tilde{S}) = \min\{\varepsilon > 0 \mid S \subset \mathcal{B}[\tilde{S}, \varepsilon] \text{ és } \tilde{S} \subset \mathcal{B}[S, \varepsilon]\} \quad (3.18)$$

formulával is megadható.

3.19. Definíció Legyenek $F_\ell : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\ell = 1, 2, \dots, L$ kontrakciók, a $q_\ell < 1$ kontrakciós állandóval. Az $\{F_\ell\}_{\ell=1}^L$ kontrakciók családját iterált függvényrendszernek hívjuk, amely iterált függvényrendszer az (\mathcal{S}, d_H) téren az indukált \mathcal{F} halmazértékű leképezéshez vezet. Ez utóbbit az

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \quad , \quad S \rightarrow \mathcal{F}(S) = \cup\{F_\ell(S) \mid \ell = 1, 2, \dots, L\}$$

képlet definiálja.

3.20. Lemma Az $\{F_\ell\}_{\ell=1}^L$ iterált függvényrendszer által az (\mathcal{S}, d_H) téren indukált halmazértékű \mathcal{F} leképezés kontrakció.

Bizonyítás. Azt fogjuk igazolni, hogy tetszőleges $S, \tilde{S} \in \mathcal{S}$ esetén

$$d_H(\mathcal{F}(S), \mathcal{F}(\tilde{S})) \leq q d_H(S, \tilde{S}), \quad \text{ahol } q = \max\{q_\ell \mid \ell = 1, 2, \dots, L\}. \quad (3.19)$$

A (3.19) kontrakciós egyenlőtlenség két lépésben ellenőrizhető:

$$\begin{aligned} d_H(\mathcal{F}(S), \mathcal{F}(\tilde{S})) &= d_H\left(\bigcup_{\ell=1}^L F_\ell(S), \bigcup_{\ell=1}^L F_\ell(\tilde{S})\right) \\ &\leq \max_{1 \leq \ell \leq L} d_H(F_\ell(S), F_\ell(\tilde{S})) \leq \left(\max_{1 \leq \ell \leq L} q_\ell\right) d_H(S, \tilde{S}). \end{aligned}$$

Természetesen meg kell mutatnunk, hogy

$$d_H\left(\bigcup_{\ell=1}^L S_\ell, \bigcup_{\ell=1}^L T_\ell\right) \leq \max\{d_H(S_1, T_1), \dots, d_H(S_L, T_L)\} \quad \forall S_1, \dots, T_L \in \mathcal{S}$$

és

$$\begin{aligned} d(F_\ell(s), F_\ell(\tilde{s})) &\leq q_\ell d(s, \tilde{s}) \quad \forall s, \tilde{s} \in \mathbb{R}^d \\ \Rightarrow d_H(F_\ell(S), F_\ell(\tilde{S})) &\leq q_\ell d_H(S, \tilde{S}) \quad \forall S, \tilde{S} \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

A szimmetria és a Hausdorff távolság tartalmazásos, (3.18) által történő definíciója miatt a fenti két tulajdonság az

$$S_\ell \subset \mathcal{B}[T_\ell, \varepsilon_\ell] \quad \forall \ell \Rightarrow \bigcup_{\ell=1}^L S_\ell \subset \bigcup_{\ell=1}^L \mathcal{B}[T_\ell, \varepsilon_\ell] \subset \mathcal{B}[T_1 \cup \dots \cup T_L, \max_{1 \leq \ell \leq L} \varepsilon_\ell]$$

és az

$$\tilde{S}_\ell \subset \mathcal{B}[S_\ell, \varepsilon_\ell] \Rightarrow F_\ell(\tilde{S}_\ell) \subset F_\ell(\mathcal{B}[S_\ell, \varepsilon_\ell]) \subset \mathcal{B}[F_\ell(S_\ell), q_\ell \varepsilon_\ell]$$

következtetésekre egyszerűsödik (érdeemes ezeket lerajzolni!!) és már készen is vagyunk. \square

3.21. Tétel Hutchinson Az $\{F_\ell\}_{\ell=1}^L$ iterált függvényrendszer által a (\mathcal{S}, d_H) téren indukált halmazértékű \mathcal{F} leképezésnek egyetlen $S^* \in \mathcal{S}$ fixpontja — ha úgy teszük, egyetlen

$$S^* = \mathcal{F}(S^*) \quad \Leftrightarrow \quad S^* = \cup \{F_\ell(S^*) \mid \ell = 1, 2, \dots, L\} \quad (3.20)$$

tulajdonságú — „fixponthalmaza” van, és tetszőleges $S \in \mathcal{S}$ halmazból indulva $\mathcal{F}^n(S) \rightarrow S^*$ ha $n \rightarrow \infty$.

Világos, hogy a kontrakciós fixponttétel azonnali, egyszerű alkalmazásáról van szó. A kérdéses konvergenciára (2.5) szerint a

$$d_H(\mathcal{F}^n(S), S^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d_H(\mathcal{F}(S), S)$$

hibabecslés érvényes. Az $S^* \subset \mathbb{R}^d$ nem-üres, korlátos és zárt halmaz az iterált függvényrendszer attraktora. Szokásos az $\mathcal{A} = S^*$ jelölés is.

Amennyiben az $\{F_\ell\}_{\ell=1}^L$ iterált függvényrendszer kontrakciói mindannyian kölcsönösen egyértelmű, oda-vissza folytonos leképezések, és az \mathcal{A} attraktor legalább két pontot tartalmaz, akkor a (3.20) fixpont-tulajdonság szerint az \mathcal{A} attraktor önhasonló halmaz.

3.22. Definíció Egy $H \subset \mathbb{R}^d$ nem-üres, korlátos és zárt halmaz önhasonló halmaz¹¹, ha léteznek olyan kölcsönösen egyértelmű, oda-vissza folytonos $\phi_\ell : H \rightarrow H$, $\ell = 1, 2, \dots, L$ ($L \geq 2$ pozitív egész) leképezések, hogy

$$H = \cup \{\phi_\ell(H) \mid \ell = 1, 2, \dots, L\} \quad \text{és} \quad \phi_\ell(H) \neq H, \quad \ell = 1, 2, \dots, L.$$

¹¹A definíció értelmében a sík bármely négyzete is önhasonló halmaz. Hogy az ehhez hasonló triviális eseteket kizárjuk, az önhasonlóság fogalmát azokra a halmazokra tartjuk fent, amelyek fraktáldimenziója nem egész szám.

Az önhasznóság szemléletes, a részletek, akárhanyadszor is nagyítjuk fel őket, mind egymásra emlékeztetnek tartalma a definícióban megkövetelt tulajdonság

$$H = \cup\{(\phi_k \circ \phi_\ell)(H) \mid k, \ell = 1, 2, \dots, L\},$$

$$H = \cup\{(\phi_k \circ \phi_\ell \circ \phi_m)(H) \mid k, \ell, m = 1, 2, \dots, L\}$$

etc. következményeiben jelenik meg. Az önhasznóság különösen markáns akkor, amikor a $\{\phi_\ell(H)\}_{\ell=1}^L$ halmazok közül bármely kettő egymást csak véges sok pontban metszi. Iterált függvényrendszerek esetén az $\mathcal{A} = S^*$ attraktor illetően önhasznóságához elegendő, ha ügyesen választott $S_0 \in \mathcal{S}$ halmazra az $\{F_\ell(S_0)\}_{\ell=1}^L$ halmazok páronként egymást csak véges sok pontban metszik.

Legfontosabb az a speciális eset, amikor

$$F_\ell(x) = A_\ell x + b_\ell, \quad \text{ahol } A_\ell \text{ } d \times d \text{ méretű mátrix és } b_\ell \in \mathbb{R}^d, \quad (3.21)$$

$\ell = 1, 2, \dots, L$. Természetesen azt is megköveteljük, hogy a fenti $F_\ell : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezések mindegyike egyúttal kontrakció is legyen. Az $F(x) = Ax + b$ képlettel definiált affin transzformáció (ahol is A adott $d \times d$ méretű mátrix és $b \in \mathbb{R}^d$ adott vektor) pontosan akkor lesz kontrakció, ha a

$$d(F(s), F(\tilde{s})) \leq q d(s, \tilde{s}) \quad \forall s, \tilde{s} \in \mathbb{R}^d \quad \Leftrightarrow \quad |As| \leq q |s| \quad \forall s \in \mathbb{R}^d$$

tulajdonság egy alkalmasan választott $q < 1$ konstanssal teljesíthető. Az

$$|As| \leq q |s| \quad \forall s \in \mathbb{R}^d \quad \Leftrightarrow \quad |As| \leq q \quad \forall (s \in \mathbb{R}^d \ \& \ |s| \leq 1) \quad (3.22)$$

egyenlőtlenségek nem ismeretlenek előttünk. Az A mátrix $\|A\|$ normáját úgy definiáltuk, mint a (3.22) egyenlőtlenségeket kielégítő $q \geq 0$ számok minimumát. Tehát a (3.21) affin függvénycsalád tagjai pontosan akkor lesznek mindnyájan kontrakciók, ha az A_ℓ mátrixok $\|A_\ell\|$ normái ($\ell = 1, 2, \dots, L$) mindnyájan kisebbek mint 1.

Az affin transzformációkból álló (3.21) iterált függvényrendszer attraktorának létezéséhez egyébként szükséges és elegendő feltétel, hogy az A_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, L$) mátrixok mindegyikének összes sajátértéke abszolút értékben egynél kisebb legyen. (Az iterált függvényrendszer attraktorának önhasznóságához a 3.22. Definícióban megkövetelt egy-egyértelműség és oda-vissza folytonosság ebben a speciális esetben nyilván a $\det(A_\ell) \neq 0$, $\ell = 1, 2, \dots, L$ feltételek teljesülését igényli.)

3.23. Megjegyzés *A(z alsó és felső) fraktál (box-, hasonlósági, Hausdorff etc.) dimenzióhoz hasonlóan az önhasznóság fogalma is többféleképpen definiálható. A mögöttes intuíció és a szemléletes tartalom lényegében mindig ugyanaz, de a technikai részletek különbözősége miatt nem, vagy nem minden esetben ekvivalens definíciókat kapunk.*

Az elemi geometria hasonlósági transzformációnak azokat az $F(x) = Ax + b$ képlettel definiált affin leképezéseket nevezi, amelyek mátrixa $A = rM$ alakú, ahol az $r \neq 0$ állandó

(a hasonlóság aránya), az M mátrix pedig ortonormált. Egy iterált függvényrendszer attraktorának önhasonlósága különösen markáns, ha a (3.21) speciális eseten belül még $A_\ell = r_\ell M_\ell$ és $|r_\ell| = q_\ell < 1$, $\ell = 1, 2, \dots, L$ is teljesül. Ilyen például a Sierpinski háromszög, a Koch görbe vagy a klasszikus Cantor halmaz.

Jóllehet az $\{F_\ell\}_{\ell=1}^L$ iterált függvényrendszer $\mathcal{A} = S^*$ attraktorát az (\mathcal{S}, d_H) téren indukált halmazértékű \mathcal{F} leképezés fixpontjaként definiáltuk, a \mathcal{A} konkrét, számítógépes előállítás a gyakorlatban is lehetséges az $F_\ell : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\ell = 1, 2, \dots, L$ leképezés-család segítségével.

A 3.21. Tétel által garantált

$$\text{tetszőleges } S \in \mathcal{S} \text{ halmazból indulva } \mathcal{F}^n(S) \rightarrow S^* = \mathcal{A} \text{ ha } n \rightarrow \infty$$

tulajdonság mellett igaz annak szelekciós, véletlen iterációs általánosítása is. A véletlen iterációk által képzett

$$x_n = (F_{i_n} \circ F_{i_{n-1}} \circ \dots \circ F_{i_3} \circ F_{i_2} \circ F_{i_1})(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

pontsorozat segítségével egy újabb, az $\mathcal{F}^n(S)$ halmzsorozatnál sokkal egyszerűbb

$$H_n = \{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

halmzsorozatot képzünk, amely — szintén az \mathbb{R}^d nem-üres, korlátos és zárt részhalmozainak Hausdorff metrikával ellátott (\mathcal{S}, d_H) terében — ugyancsak az $\{F_\ell\}_{\ell=1}^L$ iterált függvényrendszer \mathcal{A} attraktorához tart:

$$H_n \rightarrow \mathcal{A} \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

A véletlen iterációsorozat $i_1, i_2, i_3, \dots, i_{n-1}, i_n$ indexeinek bármelyike lehet $1, 2, \dots, L$, és pedig rendre a p_1, p_2, \dots, p_L előre rögzített, a $\sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1$ feltételt kielégítő $p_\ell > 0$, $1, 2, \dots, L$ valószínűségekkel.

Ez így persze túl szépen hangzik, hiszen csak 1-valószínűséggel igaz. De kicsire nem adunk, és pontosan a nagy az, ami számít! „Mindig” konvergenciát tapasztalunk — ez a „mindig-konvergencia” mindig látványos. A káosz-játékot, akárhányszor is játszuk, nem ronthatjuk el. Mindig örömünk telik benne.

3.24. Következmény *A káosz-játékot bármely $x \in \mathbb{R}^d$ pontból indítva, a véletlen iterációsorozat $i_1, i_2, \dots, i_n, \dots$ indexeinek 1-valószínűséggel történő választása esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_H(H_n, \mathcal{A}) = 0.$$

Amit a fenti következmény matematikájából igazán fontos megértenünk, az az (\mathcal{S}, d_H) teljes metrikus tér mellett a Borel féle normális szám fogalma. Ez magyarázza el, mit jelent a véletlen iterációsorozat indexeinek 1-valószínűséggel történő megválasztása.

Ösztönösen érezzük, hogy majdnem minden $b \in [0, 1]$ esetén a b szám tizedes-tört reprezentációjában a $0, 1, \dots, 9$ számjegyek mindegyikének relatív gyakorisága $\frac{1}{10}$. Borel normális számokról szóló tétele szerint ennél több is igaz.

3.25. Tétel Van olyan $E \subset [0,1]$ kivételes, nulla-mértékű halmaz, hogy minden $b \in [0,1] \setminus E$ esetén a b szám $\beta = 2, 3, \dots$ egész alapú¹² számrendszerbeli

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n(b)}{\beta^n} \quad , \quad j_n(b) \in \{0, 1, \dots, \beta-1\} \quad (3.23)$$

felbontásában, bármely $K = 1, 2, \dots$ mellett, a K hosszúságú

$$s_1 s_2 \dots s_K \quad , \quad s_k \in \{0, 1, \dots, \beta-1\} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (3.24)$$

szelet (string) előfordulásának relatív gyakorisága β^{-K} .

És most néhány látványos példa, a legismertebbek közül, amikor is az iterált függvényrendszer az \mathbb{R}^d tér $L > 1$ számú affin kontrakciójából áll.

3.26. Példa Barnsley páfrány: $d = 2$ és $L = 4$:

$$\begin{aligned} F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_1 = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix} \\ F_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_2 = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{pmatrix} \\ F_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_3 = \begin{pmatrix} 0.20 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 1.60 \end{pmatrix} \\ F_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_4 = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

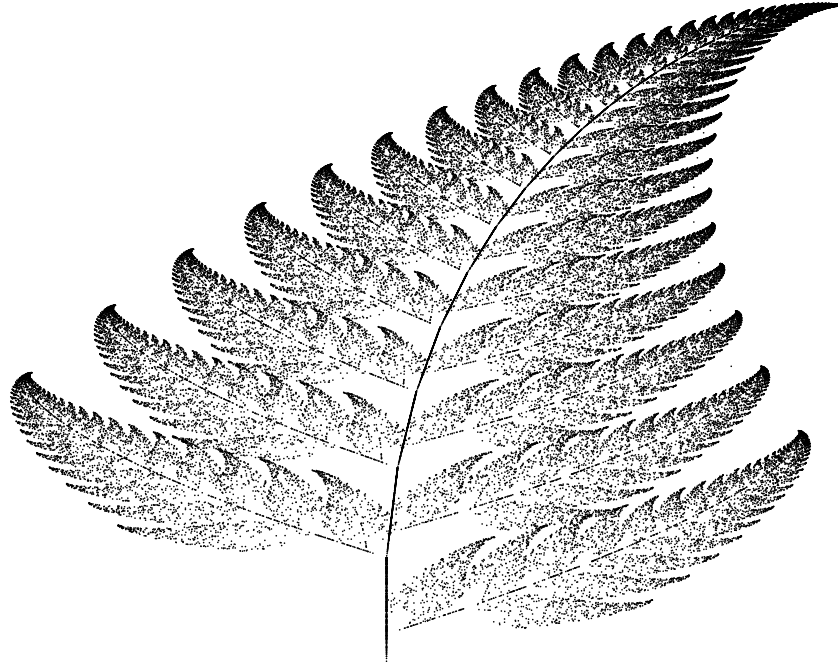
A véletlen iterációsorozat

$$(F_{i_n} \circ F_{i_{n-1}} \circ \dots \circ F_{i_3} \circ F_{i_2} \circ F_{i_1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

ahol az $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ kiindulópont tetszőleges, az $i_1, i_2, i_3, \dots, i_{n-1}, i_n$ indexek bármelyike lehet 1, 2, 3, 4, és pedig rendre a $p_1 = 0.01, p_2 = 0.85, p_3 = 0.07, p_4 = 0.07$ valószínűségekkel.

Érdekes kipróbálni a $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = \frac{1}{4}$ valószínűségeket is. Itt a páfrány erezete épül fel gyorsabban. A limes ugyanaz, ha $\sum_{\ell=1}^4 p_\ell = 1$ és $p_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$ — a nagy, 85 százalékos valószínűséget F_2 -re azért célszerű feltenni, mert ez rajzolja meg a páfránylevélzet külső kontúrját.

¹²Az Olvasó jól érzi, hogy vannak nem egész alapú számrendszerek is. Azt is jól érzi, hogy normális számnak lenni egyfajta ergodikus tulajdonság. A $b \in [0,1] \setminus E$ szám pontosan attól *normális*, hogy tetszőleges $\beta = 2, 3, \dots$ esetén a (3.23) felbontás egyértelmű (a $[0,1]$ intervallumba tartozó β -adikusan racionális számok megszámlálhatóan sokan vannak és mindnyájan beletartoznak a kivételes E halmazba) és a $\{j_n(b)\}_{n=1}^{\infty} = \{j_n(b, \beta)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatban bármely elvileg lehetséges, K hosszúságú (3.24) szelet (string) "időátlag"-a β^{-K} . (A "térátlag" nyilván β^{-K} .)



3.8. ábra. Példa iterált függvényrendszer attraktorára: Barnsley páfrány

3.27. Példa Sierpinski háromszög: $d = 2$ és $L = 3$:

$$F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

A véletlen iterációsorozat

$$(F_{i_n} \circ F_{i_{n-1}} \circ \dots \circ F_{i_3} \circ F_{i_2} \circ F_{i_1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ahol az $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ kiindulópont tetszőleges, az $i_1, i_2, i_3, \dots, i_{n-1}, i_n$ indexek bármelyike lehet 1, 2, 3, és pedig rendre a $p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{3}$ valószínűségekkel.

Ez a szokásos *káosz játék*, amelyben a tetszőleges $P_0 \in \mathbb{R}^2$ pontból elindítható iteráció következő pontját az alábbi szövegű geometriai szabállyal szokás „legyártani”:

Kössük össze a legutoljára megkapott P_{n-1} pontot — rendre $\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$ valószínűséggel — az $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ pontok egyikével, majd vegyük az összekötő szakasz felezőpontját. Legyen ez a P_n pont, $n = 0, 1, 2, \dots$

3.28. Példa hópehely, avagy Koch görbe: $d = 2$ és $L = 4$:

$$\begin{aligned} F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ F_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & \sin(\frac{\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ F_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ F_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= A_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + b_4 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A véletlen iterációsorozat

$$(F_{i_n} \circ F_{i_{n-1}} \circ \dots \circ F_{i_3} \circ F_{i_2} \circ F_{i_1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ahol az $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ kiindulópont tetszőleges, az $i_1, i_2, i_3, \dots, i_{n-1}, i_n$ indexek bármelyike lehet 1, 2, 3, 4, és pedig rendre a $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{4}$, $p_4 = \frac{1}{4}$ valószínűségekkel.

Ez is egy káosz játék, ha úgy tetszik. Tetszik?¹³ — Sikerül-e a geometria nyelvén is definiálni?

Befejezésül a klasszikus $d = 1$, $L = 2$ Cantor halmaz, ahol

$$F_1(x) = A_1x + b_1 = \frac{1}{3}x + 0 \quad \text{és} \quad F_2(x) = A_2x + b_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Az ehhez tartozó véletlen iterációsorozat természetesen

$$(F_{i_n} \circ F_{i_{n-1}} \circ \dots \circ F_{i_3} \circ F_{i_2} \circ F_{i_1})(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

ahol $x \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen választható, az $i_1, i_2, i_3, \dots, i_{n-1}, i_n$ indexek bármelyike lehet 1, 2, és pedig rendre a $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ valószínűségekkel.

És mit kapunk, ha $F_1(x) = 2^{-1}x$ és $F_2(x) = 2^{-1}(x+1)$?

¹³További szép és hálás feladatok: $\dim_B(\text{Sierpinski-triangle}) = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$, $\dim_B(\text{Koch-curve}) = \frac{\ln(4)}{\ln(3)}$, $\dim_B(\text{Cantor-set}) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$, és a Barnsley-páfrány ≈ 1.45 (képlet híján – nehézkes és rettenetesen lassú számítógépes közelítéssel), valamint az első három példa módszerével $\dim_B(\text{Sierpinski-tetrahedron}) = 2$.



(a) Textilmintás kúpcsigája (Conus textile)



(b) Sárga korallgomba (Ramaria flava)

3.9. ábra. Azt gondolja a természetet nem esmérő ember, hogy a penész csak valami rusnya por és pelyhes nyálkásság, melly a romlásnak és rothadásnak következése: holott mindaz, ami nekünk ilyennek látszik, egynehány ezer apró plántákból össze csoportozott erdőcske, amellynek gyökerei, szárai, ágai, virági és magvai vagynak, s amellyet jó nagyítóüvegen szemlélni kibeszélhetetlen gyönyörűség. — Csokonai: Dorottyia (Jegyzetek No.77)

3.6. Iterált függvényrendszer és képtömörítés

Tudjuk már, hogy minden iterált függvényrendszernek van attraktora. Az attraktor szükségképpen az \mathcal{S} halmazcsaládba tartozik, azaz nem-üres, korlátos és zárt részhalmaza az \mathbb{R}^d euklideszi térnek.

Az előző példákban szereplő alakzatok egy-egy iterált függvényrendszer attraktorai a síkon, illetve az egyenesen. Ezek az alakzatok első pillantásra meglehetősen bonyolultnak tűnnek, de az általuk hordozott információ kevés. Ahelyett, hogy magukat az alakzatokat tárolnánk, elegendő az őket származtató iterált függvényrendszereket tárolni. Barnsley páfrányát például négy kétszer kettes mátrix és négy síkbeli vektor határozza meg. Ezeket elég ismerni: segítségükkel maga a páfrány — legalábbis tetszőleges, előre adott pontosságig — mindig újra és újra előállítható.

Természetes módon merül fel a kérdés: ha adott egy $A \in \mathcal{S}$ halmaz, létezik-e (ez a matematikusok tipikus kérdése) olyan iterált függvényrendszer, amelynek az adott A halmaz az attraktora. A matematikusok tudják a választ: létezik olyan nem-üres, korlátos, zárt és összefüggő síkbeli halmaz, amely egyetlen iterált függvényrendszernek sem attraktora.

A mérnökök és az informatikusok kérdése sokkal gyakorlatiasabb: A képtömörítés kontextusában merül fel. Hogyan lehet megkonstruálni egy olyan iterált függvényrendszert, amelynek az attraktora ha nem is maga az A halmaz, de legalább közel van hozzá. Az A tárolása helyett (amely A halmaz számunkra képként, pontosabban egy fekete-fehér kép fekete részeként van adva) elegendő az öt jó közelítéssel előállító iterált függvényrendszert tárolni.

A most következő megfontolások alkalmazhatók egyszínű, fekete-fehér, illetve színes képekre is. Egy fekete-fehér kép¹⁴ a 0–1 értékeket felvevő karakterisztikus függvényként, egy színes kép pedig, a három alapszínnek megfelelően, jó közelítéssel három lépcsős függvény segítségével írható le.

3.29. Tétel Minden $A \in \mathcal{S}$ halmazhoz és minden ε számhoz van olyan, kontraktív hasonlósági transzformációkból álló $\{F_\ell\}_{\ell=1}^{L_\varepsilon}$ iterált függvényrendszer, amelynek S_ε^* attraktorára $d_H(S_\varepsilon^*, A) \leq \varepsilon$.

Bizonyítás. Egy fapados konstrukciót mutatunk be, amely képtömörítésre közvetlenül nem alkalmas, hiszen végső elemzésben a pixeleket veszi csak egyenként számba. A képtömörítésre alkalmas hatékony algoritmusok — ha van közülük az iterált függvényrendszerekhez, ha nincs — bőven tartalmaznak heurisztikus lépéseket is.

Elegendő olyan iterált függvényrendszert konstruálnunk, hogy az általa meghatározott \mathcal{F}_ε halmazértékű leképezésre $d_H(\mathcal{F}_\varepsilon(A), A) \leq (1 - q)\varepsilon$ teljesüljön. Valóban, ekkor

$$d_H(S_\varepsilon^*, A) \leq d_H(\mathcal{F}_\varepsilon(S_\varepsilon^*), \mathcal{F}_\varepsilon(A)) + d_H(\mathcal{F}_\varepsilon(A), A)$$

¹⁴A (grayscale) szürke ötven árnyalatát külön nem taglaljuk — ha valakinek van néhány ezer Forint kidobandó pénze, akkor vegye meg a hasonló című bestsellert.

$$\Leftrightarrow d_H(S^*_{\varepsilon}, A) \leq q \cdot d_H(S^*_{\varepsilon}, A) + (1-q)\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad d_H(S^*_{\varepsilon}, A) \leq \varepsilon.$$

A gondolatmenet a 2.22. Következmény bizonyításához hasonló, amelynek az iterált függvényrendszerek körében külön neve van: *kollázs-tételnek* hívják.

Az egyszerűség kedvéért legyen $d = 2$ és tegyük fel, hogy $A \subset Q$, ahol $Q = [0,1] \times [0,1]$ az egységnyezet. Tekintsük a Q halmaz k^{-1} ($k = 1, 2, \dots$) oldalhosszúságú négyzetekre való szokásos rácsfelbontását, majd gyűjtsük ki azokat a cellákat, amelyek belemetszenek az A halmazba:

$$C_{k,\ell} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{i_\ell(k)}{k} \leq x_1 \leq \frac{i_\ell(k)+1}{k} \text{ és } \frac{j_\ell(k)}{k} \leq x_2 \leq \frac{j_\ell(k)+1}{k} \right\}.$$

Itt $i_\ell(k), j_\ell(k)$ az A halmaz által meghatározott nemnegatív egész számok és $\ell = 1, 2, \dots, N(k^{-1})$, ahol

$$N(k^{-1}) = \#\{C \mid C \text{ a rácsfelbontás cellája és } C \cap A \neq \emptyset\}.$$

Legyen most $F_{k,\ell}$ olyan hasonlósági transzformáció, amely a Q egységnyezetet ráhúzza a $C_{k,\ell}$ cellára. A legegyszerűbb választás

$$F_{k,\ell} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{k} \begin{pmatrix} i_\ell(k) \\ j_\ell(k) \end{pmatrix}, \quad \ell = 1, 2, \dots, N(k^{-1})$$

és legyen

$$\mathcal{C}_k = \cup\{C_{k,\ell} \mid \ell = 1, 2, \dots, N(k^{-1})\}, \quad \mathcal{F}_k = \cup\{F_{k,\ell} \mid \ell = 1, 2, \dots, N(k^{-1})\}.$$

A Hausdorff távolság közvetlenül (3.19) után megfogalmazott tulajdonsága miatt

$$d_H(\mathcal{F}_k(\mathcal{C}_k), \mathcal{C}_k) = d_H(\cup_\ell F_{k,\ell}(\mathcal{C}_k), \cup_\ell C_{k,\ell}) \leq \max_{\ell=1,2,\dots,N(k^{-1})} d_H(F_{k,\ell}(\mathcal{C}_k), C_{k,\ell})$$

s mivel az $A \subset Q$ egyszerűsítő feltevés révén $F_{k,\ell}(\mathcal{C}_k) \subset F_{k,\ell}(Q) \subset C_{k,\ell}$, az utolsó egyenlőtlenség jobb oldala legfeljebb a $C_{k,\ell}$ cella átmérője, azaz (az euklideszi normában számolva) $\frac{\sqrt{2}}{k}$. Így magát a (3.19) egyenlőtlenséget használva

$$d_H(\mathcal{F}_k(A), A) \leq d_H(\mathcal{F}_k(A), \mathcal{F}_k(\mathcal{C}_k)) + d_H(\mathcal{F}_k(\mathcal{C}_k), \mathcal{C}_k) + d_H(\mathcal{C}_k, A)$$

s mert a \mathcal{C}_k definíciója miatt (szintén az euklideszi normában számolva) $d_H(\mathcal{C}_k, A) \leq \frac{\sqrt{2}}{k}$, a végső becslés a

$$d_H(\mathcal{F}_k(A), A) \leq \frac{1}{k} d_H(A, \mathcal{C}_k) + \frac{\sqrt{2}}{k} + d_H(\mathcal{C}_k, A) \leq \left(\frac{1}{k} + 1\right) \frac{\sqrt{2}}{k} + \frac{\sqrt{2}}{k}$$

alakot ölti, és így a kollázs-tétel értelmében készen is vagyunk. \square

Első pillantásra is — miután lecsontoztuk a matematika technikai részleteit — világos, hogy a bizonyításban leírt konstrukció ugyanaz a módszer, mint amellyel a boxdimenzió fogalmát definiáltuk.

3.7. Példasorozat szinkronizációra. Különféle szempontok

1.) *Alappélda* (szinkronizáció az átlóhoz)

Legyen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, amely eleget tesz az $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ Lipschitz egyenlőtlenségnek. A csatolási paraméter $k \geq 0$ értékei mellett tekintsük az

$$\dot{x} = f(x) + k(y - x) \quad , \quad \dot{y} = f(y) + k(x - y) \quad (3.25)$$

egyenletrendszert és a $V(x, y) = (x - y)^2$ segédfüggvényt. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} &= 2(x - y)(\dot{x} - \dot{y}) \Big|_{t=0} = 2(x - y)(f(x) - f(y) - 2k(x - y)) \\ &\leq 2L(x - y)^2 - 4k(x - y)^2 = 2(L - 2k)(x - y)^2 < 0 \quad \forall x, y \neq x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

amennyiben $k > \frac{L}{2}$. A V függvény tehát Ljapunov függvény, ha a $k \geq 0$ csatolási paramétert elegendően nagyra választjuk.

A rögzített $(x(t), y(t))$ megoldásra definiált $v(t) = (x(t) - y(t))^2$ függvény a fentiek szerint eleget tesz a $\dot{v}(t) \leq -2(2k - L)v(t)$ egyenlőtlenségnek, amelyből

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} \leq -2(2k - L) &\Rightarrow \int_0^T \frac{\dot{v}(t)}{v(t)} dt \leq \int_0^T -2(2k - L) dt \\ \Rightarrow \ln(v(t)) \Big|_0^T &\leq -2(2k - L)T \Rightarrow v(T) \leq v(0)e^{-2(2k - L)T} \quad \forall T \geq 0. \end{aligned}$$

A szimmetria miatt a $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$ invariáns halmaz, így a levezetés érvényes a $v(0) = 0$ esetben is (sőt $v(0) \neq 0 \Rightarrow v(T) \neq 0 \quad \forall T \geq 0$). A gondolatmenetnek külön neve van, a (2.7) Gronwall Lemma differenciálos változatának hívják.

Tehát a (3.25) differenciálegyenlet valamennyi megoldása exponenciális sebességgel jut be a Δ átló (diagonal) bármely előre megadott kicsiny környezetébe és ott is marad, a $\Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mint halmaz exponenciálisan stabil.

Ugyanezt az eredményt az

$$A = x + y, \quad C = y - x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{A - C}{2}, \quad y = \frac{A + C}{2} \quad (3.26)$$

koordináta-transzformáció után kapott

$$\dot{A} = f\left(\frac{A - C}{2}\right) + f\left(\frac{A + C}{2}\right), \quad \dot{C} = f\left(\frac{A - C}{2}\right) - f\left(\frac{A + C}{2}\right) - 2kC$$

differenciálegyenlet $\lim_{T \rightarrow \infty} C(T) = 0$ tulajdonságaként is kifejezhetjük.

2.) *Ugyanez magas dimenzióban* (a csatolási mátrix szerepe)

Tegyük fel, hogy az $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ függvényre teljesül az $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ Lipschitz egyenlőtlenség. A (3.25) egyenlet általánosításaként tekintsük az

$$(E) \quad \dot{x} = f(x) + K(y - x) \quad , \quad \dot{y} = f(y) + K(x - y)$$

egyenletet. A K csatolási mátrixról azt tesszük fel, hogy szimmetrikus és pozitív definit:

$$K = K^T \quad \Leftrightarrow \quad \langle Kx, y \rangle = \langle x, K^T y \rangle = \langle x, Ky \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d ,$$

$$\lambda_1 |x|^2 \leq \langle Kx, x \rangle \leq \lambda_d |x|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d ,$$

ahol $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_d$ a sajátértékek (és ahol a pozitív definitást a Rayleigh elv segítségével írtuk fel).

A $V(x, y) = \langle x - y, x - y \rangle = |x - y|^2$ segédfüggvény most is Ljapunov függvénynek bizonyul, amennyiben a legkisebb sajátérték is elég nagy. A $\lambda_1 > \frac{L}{2}$ feltevés mellett azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(E)}(x, y) &= \langle \dot{x} - \dot{y}, x - y \rangle + \langle x - y, \dot{x} - \dot{y} \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \langle f(x) - f(y) - 2K(x - y), x - y \rangle + \langle x - y, f(x) - f(y) - 2K(x - y) \rangle \\ &\leq 2L|x - y|^2 - 4\lambda_1|x - y|^2 = 2(L - 2\lambda_1)|x - y|^2 < 0 \quad \forall x, y \neq x \in \mathbb{R}^d . \end{aligned}$$

Az egydimenziós esethez hasonlóan a $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid y = x\}$ átló most is exponenciálisan stabil invariáns halmaznak bizonyul. (Attraktornak csak azért nem nevezzük, mert az attraktor elnevezést a kompakt invariáns halmazokra tartottuk fenn.)

Ha $\lambda_1 \gg \frac{L}{2}$, akkor sokkal erősebb állítást is kimondhatunk. Az egyes trajektóriák/mozgások nemcsak úgy általában tartanak a átlóhoz, hanem mindegyikük egy kiválasztott, az átlón megvalósuló konkrét, egyedi mozgáshoz tart. A most következő tétel a *Periodikus pályák vizsgálata* alfejezet legvégén tárgyalt aszimptotikus fázis fogalmát általánosítja.

3.30. Tétel *Tekintsük az (E) egyenletet a $\lambda_1 \gg \frac{L}{2}$ feltétellel együtt. Tegyük fel, hogy az $\dot{x} = f(x)$ egyenlet végtelen távoli pontja taszító¹⁵.*

Ekkor létezik olyan folytonos $\mathcal{F}: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ leképezés és olyan $\omega > 0$ állandó, hogy

$$|\Phi(t, x, y) - \Phi(t, \mathcal{F}(x, y), \mathcal{F}(x, y))| \leq \text{const}(x, y) \cdot e^{-\omega t} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d .$$

Az egyazon általánosított aszimptotikus fázishoz tartozó *isochrone* pontok

$$\mathcal{F}_{x_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mid \mathcal{F}(x, y) = x_0\} , \quad x_0 \in \mathbb{R}^d$$

¹⁵amit technikailag például a (2.28) tulajdonság biztosít, ha azt egy rögzített $R_0 > 0$ helyett minden $R_0 \geq R_* > 0$ esetre, a $d = 2$ helyett pedig az általános d -re kötjük ki

halmaza d -kodimenziós felületet határoz meg, amelyet az $x_0 \longleftrightarrow (x_0, x_0)$ azonosítás után a Δ átló pontjaival is lehet indexelni. A $\{\mathcal{F}_{x_0}\}_{x_0 \in \mathbb{R}^d}$ felületcsalád az $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ tér egyrétű fedését adja.

3.) *A csatolási paraméter növelése* (bifurkációk a szinkronizációig)

Most a (3.25) egyenlet egy speciális,

$$\dot{x} = x - x^3 + k(y - x) \quad , \quad \dot{y} = y - y^3 + k(x - y)$$

alakú esetét vizsgáljuk a $k \geq 0$ csatolás ereje növekedésének függvényében. Azt tapasztaljuk, hogy a szinkronizáció egymás utáni bifurkációk egy sorozatán keresztül valósul meg, egészen addig, amíg a teljes struktúra rá nem roskad az átlóra. A teljes folyamatot egyszerűbb a (3.26) koordináta-transzformáció révén nyert

$$\dot{A} = A \left(1 - \frac{A^2 + 3C^2}{4} \right) \quad , \quad \dot{C} = C \left(1 - \frac{8k + 3A^2 + C^2}{4} \right)$$

differenciálegyenlet-rendszerre bemutatni:

- $C = 0$ & $A = 0$ amennyiben $0 \leq k$
- $C = 0$ & $A = \pm 2$ amennyiben $0 \leq k$
— a (fő)átlón mindig ugyanaz a három egyensúlyi helyzet van
- $A = 0$ & $C^2 = 4(1 - 2k)$ amennyiben $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$
— a mellékátlón maximum még kettő egyensúlyi helyzet lehet
- $A^2 = 1 - 3k$ & $C^2 = 1 + k$ amennyiben $0 \leq k \leq \frac{1}{3}$
— az átlókon kívül maximum még négy egyensúlyi helyzet lehet

$$\#\{\text{egyensúlyi helyzetek}\} = \begin{cases} 9 & \text{ha } 0 \leq k < \frac{1}{3} \\ 5 & \text{ha } \frac{1}{3} \leq k < \frac{1}{2} \\ 3 & \text{ha } \frac{1}{2} \leq k \end{cases}$$

A paraméter növekedésével csökken az egyensúlyi helyzetek száma. Csupa szimmetrikus, de alaposan elfajult bifurkáció van, hiszen minden egyes esetben három egyensúlyi helyzet olvad össze. Ha pontosan öt egyensúlyi helyzet van (azaz ha $\frac{1}{3} \leq k < \frac{1}{2}$), azok közül kettő elfajult. Az origó mindvégig nyeregpont, a Δ (fő)átlón lévő másik két egyensúlyi helyzet mindvégig stabil csomó.

4.A) Szinkronizáció kaotikus megoldáshoz (két csatolt Lorenz rendszer)

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X) , \dot{Y} = rX - Y - XZ , \dot{Z} = XY - bZ \\ X(0) &= X_0 , Y(0) = Y_0 , Z(0) = Z_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) , \dot{y} = rX - y - Xz , \dot{z} = Xy - bz \\ x(0) &= x_0 , y(0) = y_0 , z(0) = z_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

Most két Lorenz rendszert csatolunk egymással, de a csatolás markánsan aszimmetrikus. Az első (a „master”) független a másodiktól és önmagában is teljesen értelmes, a második (a „slave”) függ az elsőtől. Az első Lorenz rendszer megoldásának X koordinátafüggvénye megjelenik a második Lorenz rendszer utolsó két egyenletében. Ami történik, teljes meglepetés: a második rendszer — függetlenül saját $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$ kezdeti értékeinek megválasztásától — aszimptotikusan átveszi az első rendszer viselkedését, szinkronizálódik hozzá.

A bizonyítás mindössze néhány sor. Bevezetve az

$$\alpha = X - x , \beta = Y - y , \gamma = Z - z$$

különbségeket, a rájuk vonatkozó differenciálegyenlet-rendszerben a csatolást megvalósító $X = X(t)$ függvény két helyen is szerepel:

$$(E) \quad \dot{\alpha} = \sigma(\beta - \alpha) , \dot{\beta} = -\beta - X\gamma , \dot{\gamma} = X\beta - b\gamma .$$

Az (E) tehát önmagában, az első, a „master” Lorenz rendszer nélkül meg sem oldható. Mégis előbbre vagyunk, mert egy ügyesen választott¹⁶ Ljapunov függvény garantálja a globális aszimptotikus stabilitást:

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \right)$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{(E)}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha(\beta - \alpha) + \beta(-\beta - X\gamma) + \gamma(X\beta - b\gamma)$$

$$\Rightarrow \dot{V}_{(E)}(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 - b\gamma^2 = -\frac{1}{2} (\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha - \beta)^2) - b\gamma^2 .$$

Jól ismert, hogy a klasszikus $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ paraméterválasztásnál a Lorenz rendszer kaotikus. A szinkronizáció tehát az $X(0) = X_0, Y(0) = Y_0, Z(0) = Z_0$ kezdeti értékek által „kijelölt” kaotikus megoldáshoz történik.

¹⁶a V segédfüggvény megválasztása nagyon is természetes: a $\dot{\beta} = -\beta - X\gamma$ egyenletet β -val, a $\dot{\gamma} = X\beta - b\gamma$ egyenletet γ -val szorozva, majd a két egyenletet összeadva $\dot{\beta}\beta + \dot{\gamma}\gamma = -\beta^2 - b\gamma^2$, azaz $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 \right) = -\beta^2 - b\gamma^2$ adódik. És ez, matematikai reflexeink szerint aligha lehet más, mint egy Ljapunov függvénnyel történő számolás egy részlete. Innen a sikeres $V(\alpha, \beta, \gamma)$ képlete már csak egy macskaugrás. A globális aszimptotikus stabilitás a 2.56. Tétel B.) következménye.

4.B) Titkos üzenet küldése nyilvános csatornán (Lorenz adó, Lorenz vevő)

A (3.27) Lorenz adó a tőle sokszáz kilométerre levő (3.28) Lorenz vevőnek rádióüzenet formájában átküldi az $X(t)$ és az $Y(t) + m(t)$ egyaránt kaotikus jeleket, amelyeket bárki szabadon meg-, illetve lehallgathat. Nem sokra megy egyikükkel sem ... Viszont a vevő, aki az $X(t)$ átvétele után képes az $Y(t)$ rekonstruálására, az $(Y(t) + m(t)) - Y(t)$ művelet elvégzésével hozzá tud férni az $m(t)$ jelhez, ami a tényleges titkos üzenet. Mindebben egy másik titok is szerepet játszott: a teljes szinkronizációhoz az kellett, hogy az adó és a vevő σ , r és b paraméterei páronként megegyezzenek egymással. (Szerencsére a (3.27) Lorenz rendszer kaotikus viselkedését garantáló (σ, r, b) paramétertartomány viszonylag nagy részalmlaza az \mathbb{R}^3 -nak.)

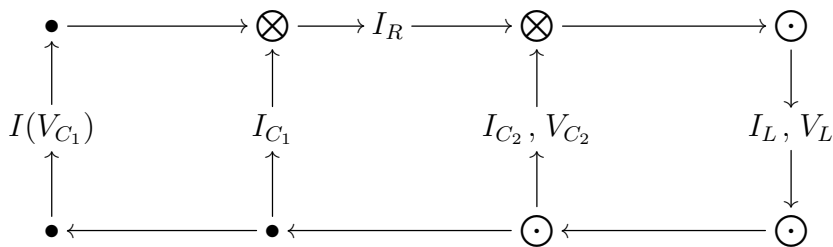
5.) Az eddigiek összefoglalása (két csatolt Chua-kör)

A villamosmérnöki tudományokban a káosz prototípusa a Chua-kör, amelynek differenciálegyenlete

$$\dot{x} = \alpha(y - x - g(x)) \quad , \quad \dot{y} = x - y + z \quad , \quad \dot{z} = -\beta y \quad (3.29)$$

és amelyet kifejezetten könnyű elektromos hálózatként megvalósítani. Mindössze egy tekercs, egy ellenállás, két kondenzátor, és egy Chua-diódának nevezett feszültség-vezérelt nemlineáris áramköri elem szükséges hozzá. Ez utóbbi $I = g(V)$ karakterisztikáját a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény határozza meg, amelynek a matematikai modellben szokásos alakjai — az eredeti változót x -el jelölve, a továbbiakban ennél maradunk — $g(x) = g_1x + g_3x^3$ (vagy az ezt jól közelítő szakaszonként lineáris függvények egyike). Ismeretes, hogy a klasszikus $g_1 = -\frac{8}{7}$, $g_3 = \frac{4}{63}$, $\alpha = \frac{19}{2}$, $\beta = 15$ paraméterválasztásnál a Chua-kör kaotikus és attraktora egy kettős-tekercs (double-scroll).

A teljesség kedvéért bemutatjuk a Chua-kör kapcsolási rajzát és vázoljuk a Chua-kört leíró differenciálegyenlet-rendszer levezetését is:



ahol a \otimes illetve \odot jelölések Kirchoff csomóponti törvényének kétszeri illetve huroktörvényének egyszeri alkalmazására utalnak. Tehát

$$\text{a Chua-kör alapegyenletei : } I(V_{C1}) + I_{C1} = I_R \quad , \quad I_{C2} + I_R = I_L \quad , \quad V_{C2} + V_L = 0.$$

Innen a lineáris RLC kör (1.1) egyenletrendszerének levezetésekor is használt $\dot{V}_C = \frac{1}{C}I_C$, $V_R = RI_R$ és $V_L = L\dot{I}_L$ alapvető összefüggések (esetünkben $V_R = V_{C_2} - V_{C_1}$) felhasználásával a V_{C_1} , V_{C_2} , I_L ismeretlenekre az

$$I(V_{C_1}) + C_1\dot{V}_{C_1} = \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{R}, \quad C_2\dot{V}_{C_2} + \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{R} = I_L, \quad V_{C_2} + LI_L = 0$$

egyenletrendszer adódik, ami az $x \sim V_{C_1}$, $y \sim V_{C_2}$ és $z \sim I_L$ alkalmasan választott lineáris helyettesítések (skalázás) után a Chua-kör szokásos (3.29) alakjára vezet. (A g nemlinearitást az $I = I(V_{C_1})$ képletéből kapjuk.)

A kereskedelmi forgalomban is kapható Chua-készlet (Chua circuit kit) az

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(y_1 - x_1 - g(x_1)), \quad \dot{y}_1 = x_1 - y_1 + z_1 + k(y_2 - y_1), \quad \dot{z}_1 = -\beta y_1 \\ \dot{x}_2 &= \alpha(y_2 - x_2 - g(x_2)), \quad \dot{y}_2 = x_2 - y_2 + z_2 + k(y_1 - y_2), \quad \dot{z}_2 = -\beta y_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha(x_2 - x_1 - g(x_1)), \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 + k(y_2 - x_2), \quad \dot{x}_3 = -\beta x_2 \\ \dot{y}_1 &= \alpha(y_2 - y_1 - g(y_1)), \quad \dot{y}_2 = y_1 - y_2 + y_3 + k(x_2 - y_2), \quad \dot{y}_3 = -\beta y_2 \end{aligned} \right.$$

(formában modellezhető) változat megépítésére alkalmas, ami két egyforma Chua-kör egyaránt jobb oldali \otimes pontjának összekötésével valósítható meg. Az *összekötés erejét* kifejező $k = k_{cs} \geq 0$ paraméter (az alsó index a coupling strength kifejezés két szavának kezdőbetűire utal) egy változtatható extra ellenállás révén szabályozható. (A veszteségek pótlására két kilenc Voltos telepre is szükség van, amelyek mindegyike a megfelelő Chua-dióda részét képezi.)

Az áramkörü kísérletekben a $k > 0.8$ paraméterértékekre figyelhető meg szinkronizálódás, részleges vagy teljes¹⁷ (a csatolás konkrét erősségétől, és az aktuális állapottól függően), amely hosszabb-rövidebb idő után mindig elállítódik.

A Ljapunov függvényes érvelés most nem vezet érdemi eredményre:

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = V(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{\alpha}(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \frac{1}{\beta}(x_3 - y_3)^2 \right) \right)$$

¹⁷A szinkronizáció teljes, ha $|x_1(t) - y_1(t)| \rightarrow 0$, $|x_2(t) - y_2(t)| \rightarrow 0$ és $|x_3(t) - y_3(t)| \rightarrow 0$ ha $t \rightarrow \infty$. A szinkronizáció részleges, ha a nullához tartás csak a koordinátafüggvény-különbségek egy részére teljesül. Világos, hogy az aszimptotikus, $t \rightarrow \infty$ szimmetria különféle fajtáiról van szó. Ha a csatolások nélküli rendszer például $\dot{x}_i = f_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, 8$, akkor az $x_3 = x_7 = x_8$ altérhez történő részleges szinkronizáció alatt a $t \rightarrow \infty$ melletti $|x_3(t) - x_7(t)| \rightarrow 0$, $|x_3(t) - x_8(t)| \rightarrow 0$ aszimptotikák teljesülését értjük. Maga az átló ebben az esetben az $x_1 = x_2 = \dots = x_8$ hatdimenziós altér (pontosabban $6d$ dimenziós, hiszen $x_1, x_2, \dots, x_8 \in \mathbb{R}^d$, $d > 1$ is minden további nélkül lehetséges). A teljes szinkronizáció ez esetben is az átlóhoz (a főátlóhoz) történik. A fenti fogalmak mindegyike kiterjeszhető arra az esetre is, amikor nem teljesen egyforma dinamikákat csatolunk, amikor tehát a magukra hagyott cellák viselkedését az $\dot{x}_i = b(x_i) \Leftrightarrow \dot{x}_i = f_i(x_i)$ differenciálegyenletekkel modellezzük. Az elektromos vagy biológiai hálózatok úgymond "elemi cellái" soha nem lehetnek teljesen egyformák. Az elméleti matematika számára az $|f_i - f_j| \ll 1$, $i, j = 1, 2, \dots, 8$ típusú feltételek kezelése roppant nehéz. A számítógépes szimulációk lehetőségei összehasonlíthatatlanul tágabbak.

$$\Rightarrow \dot{V}_{(E)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(x_1 - y_1)(g(x_1) - g(y_1)) - ((x_1 - y_1) - (x_2 - y_2))^2 - 2k(x_2 - y_2)^2,$$

ami csak nem akar negatív lenni. A nehézséget a $-(x_1 - y_1)(g(x_1) - g(y_1)) = -(x_1 - y_1)^2(g_1 + g_3(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2))$ főtag jelenti, amely a megadott $g_1 = -\frac{8}{7}$ és $g_3 = \frac{4}{63}$ értékek mellett ugyancsak vegyes előjelű, amit a másik két összeadandó nem mindig tud kompenzálni. Ha lenne egy $-\kappa(x_1 - y_1)^2$ összeadandó is elegendően nagy $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 > 0$ paraméterrel ... de sajnos nincsen. — De bizony van, csak ehhez máshogyan kell csatolni:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1 - g(x_1) + \kappa_1(y_1 - x_1)) , & \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 , & \dot{x}_3 = -\beta x_2 \\ \dot{y}_1 = \alpha(y_2 - y_1 - g(y_1) + \kappa_2(x_1 - y_1)) , & \dot{y}_2 = y_1 - y_2 + y_3 , & \dot{y}_3 = -\beta y_2 \end{cases} .$$

Az eddigi $k \geq 0$ paraméter értékét $k=0$ -ra állítottuk. A $\kappa_1=0$ eset a 4.) pontbeli master-slave típusú szinkronizációhoz vezet. Látjuk azt is, hogy a 2.) pontbeli rendszernek is van aszimmetrikus, $\dot{x} = f(x) + K_1(y - x)$, $\dot{y} = f(y) + K_2(x - y)$ változata.

3.31. Megjegyzés *Azt látjuk, hogy két identikus Lorenz rendszerben, csakúgy mint két identikus Chua-körben a teljes szinkronizáció létre tud jönni egyetlen koordináta-pár csatolásával.*

Takens attraktor-rekonstrukciós tétele azt mondja ki, hogy egy kaotikus attraktor — és most egyetlen Lorenz rendszer vagy egyetlen Chua-kör kaotikus attraktorára kell gondolnunk — jellemezhető egyetlen megoldás egyetlen koordináta-függvényének viselkedése alapján.

Hogy egészen konkrét legyek, az El Niño jelenség

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = By - C(x + p) \\ \dot{y} = xz - y \\ \dot{z} = -xy - z + 1 \end{array} \right\} , \text{ ahol } B = 102 , C = 3 , p = 0.83$$

alakú Vallis modelljének (ez lényegében egy aszimmetrikus Lorenz rendszer) kaotikus attraktorát az $(x(t), y(t), z(t))$ megoldás első, $x(t)$ koordináta-függvényéből képzett

$$\{(x(t), x(t - T_*), x(t - 2T_*)) \in \mathbb{R}^3 \mid t \geq 0\}$$

térgörbe az $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ kezdeti feltételek és a $T_ > 0$ időkésltetés (time-lag) paraméter tetszőleges választása mellett 1-valószínűséggel jól jellemzi.*

Egy viszonylag friss Práter utcai informatika PhD dolgozat Takens attraktor-rekonstrukciós tételének idősoros változatát epilepsziás betegek EEG jeleihez tartozó kaotikus attraktorok keresésére használta. És mindezt hét és nyolc dimenzióban.

Érdekes dolgok ezek. De az idő múlásával egyre kevésbé fognak különlegesnek vagy különösnek számítani.

6.) *Szinkronizáció az elemi cellák outputjai alapján (példa a valóságból?)*

Amint azt a 2.17. Példa már elővételezte, a

$$\dot{x}_i = b(x_i) + \sum_{j=1}^N w_{ij} f(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

feladat-osztályt különösen sokat vizsgálják. A klasszikus, fázisszög szerinti szinkronizáció (legyen szó bár áramköri, idegrendszeri, vagy éppen spin-oszcillátorokról) abban a speciális esetben jelenik meg, amikor minden egyes $\dot{x}_i = b(x_i)$ vagy általánosabban, $\dot{x}_i = b_i(x_i)$ cella-egyenletnek van saját belső, aszimptotikusan stabil $p_i \equiv p$ illetve p_i periodikus megoldása. Az általános, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{Nd}$ vektorváltozóról ilyen esetekben — bizonyos feltételek teljesülése esetén — áttérhetünk a $p_i \equiv p$ illetve a p_i periodikus megoldások $\phi \in \mathbb{R}^N$ fázisszög-vektorváltozójára. Ez az

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{Nd} \longrightarrow \phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) \in \mathbb{R}^N$$

áttérés matematikailag elképesztően nehéz, mert egyszerre igényel analitikus, mátrixalgebrai és kombinatorikus módszereket. És nem kevés számolási trükköt, amelyek csírájukban a relaxációs oszcillációk vizsgálatánál is már megjelennek. (Mindezek mélyén ugyanaz a normál-hyperbolicitás van, amely a 2.) pontbeli Tétel bizonyításában is lényeges szerepet játszik.)

Szabad (és sikamlós) a pálya a szimulációs kísérletek előtt!

Ennél is keményebb dió a *csatolások topológiája versus szinkronizációs mintázatok* kérdéskör, amelynek aktualitását újra és újra hangsúlyozzuk. Maga a természet úgy tűnik, kifejezetten jól kezeli ezeket a problémákat mind az idegrendszer, mind a bonyolultnál bonyolultabb, ember-alkotta nano-áramkörök szintjén.

Gondolhatunk Huygens inga-óra tapasztalatára, amely minden szinkronizációs példa ősmintája. Költői kérdés: mi történik a falban, Huygens mester műhelyének falában¹⁸, amely minden egyes ingaóra hatását az összes többi felé közvetíti?

De az a legjobb, ha saját élményünket elevenítjük fel: tucatnyi tiktakkoló metronóm egy üveglapon.

¹⁸a véletlen tapasztalatot Huygens tudatos kísérlettel erősítette meg. Két támlás-széket egymásnak háttal szembefordított, egy deszkát tett rájuk, amelyre két inga-órát helyezett. De adjuk át a szót neki magának: "... It is quite worth noting that when we suspended two clocks so constructed from two hooks imbedded in the same wooden beam, the motions of each pendulum in opposite swings were so much in agreement that they never receded the least bit from each other and the sound of each was always heard simultaneously. Further, if this agreement was disturbed by some interference, it reestablished itself in a short time. For a long time I was amazed at this unexpected result, but after a careful examination finally found that the cause of this is due to the motion of the beam, even though this is hardly perceptible." — Scholarpédia, szó szerinti átvétel

3.8. Lotka–Volterra típusú modellek

Tekintsük az

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x \left(1 - \frac{x}{2} - y\right) \\ \dot{y} &= y(-1 - y + x) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \dot{x} &= x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \dot{y} &= y(-1 - y) + xy \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

differenciálegyenlet-rendszert. Négy egyensúlyi helyzet van, és pedíg

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A Jacobi-, más szóval a derivált-mátrix értéke az egyensúlyi helyzetekben

$$J = \begin{pmatrix} 1 - x - y & -x \\ y & -1 - 2y + x \end{pmatrix}$$

alapján rendre

$$J(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J(P) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J(Q) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}, \quad J(R) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jóllehet az egyensúlyi helyzetek egyike sem elfajult és így a lokális fázisportrék szépen felrajzolhatók, a teljes fázisportré felrajzolásához más módszerekre is szükség van. A (3.30) egyenletrendszer $\dot{x} = x\alpha(x, y)$, $\dot{y} = y\beta(x, y)$ szerkezete jön segítségünkre, amely egyúttal annak biológiai jelentéséhez is elvezet.

Az egyenletrendszer jobb oldala olyan vektormezőt határoz meg, amelyik az x tengely minden pontjában vízszintes, az y tengely minden pontjában pedig függőleges. Így mindkét tengely invariáns, azaz az x tengely pontjain áthaladó trajektóriák nem lépnek ki az x tengelyről és hasonlóképpen, az y tengely is teljes trajektóriákból áll. Mivel a trajektóriák nem metszik át egymást, az x és y tengelyek a síkot olyan síknegyedekre bontják, amelyek maguk is invariánsak.

A biológiai interpretáció kézenfekvő, hiszen az x tengelyen az erőforráskorlátos növekedés Verhulst-féle (3.2) egyenletének $\dot{x} = x(1 - \frac{x}{2})$ speciális esetét kapjuk vissza, ahol $x \geq 0$ egy faj (nagyszámú egyedének) összesített testtömegét jelenti. Kézenfekvő tehát, hogy $y \geq 0$ egy másik faj (nagyszámú egyedének) összesített testtömegét, pongyola szóhasználatlaltal annak ‘egyedszámát’ jelentse. Ez a másik faj azonban egyedül nem képes megélni, hiszen akkor rá az $\dot{y} = y(-1 - y)$ egyenlet vonatkozna, speciálisan $y > 0$ esetén $\dot{y} < 0$ volna, amiből $y(t) \rightarrow 0$ adódna $t \rightarrow \infty$ mellett, bármely $y(0) = y_0 > 0$ kezdeti állapotból indulva. Az első faj jelenléte azonban — amint arra az xy csatolás pozitív előjele utal — \dot{y} előjelét $x > y + 1$ esetén pozitívvá teszi, és így legalábbis elvi lehetőséget teremt a második faj fennmaradására. A $-xy$ csatolás negatív előjele azt jelenti, hogy két faj kölcsönhatása az első faj számára kedvezőtlen. Így az x faj a zsákmány, az y faj pedig a ragadozó. Az

egyszerűség kedvéért használhatjuk a nyulak és a rókák elnevezéseket is. Természetesen a rókák nemcsak nyulakat esznek, és a nyulakra más ragadozók is vadásznak. A modellalkotás szempontjából azonban a növényevők–nyulak, ragadozók–rókák azonosítás egy határig jól védhető.

A több faj esetére vonatkozó általánosítás az

$$\dot{x}_k = x_k \alpha_k(x_1, x_2, \dots, x_d), \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (3.31)$$

Kolmogorov rendszer — de minél inkább általánosítunk, annál inkább beleütközünk az $\alpha_k : \mathbb{R}_+^d \rightarrow \mathbb{R}$ függvények meghatározásának nehézségeibe. Maradjunk tehát a nyulak és a rókák együttélésének (3.30) matematikai modelljénél.

Ha nincsenek rókák, akkor a nyulak $x = x(t)$ összesített testtömege $t \rightarrow \infty$ mellett 2-höz tart, hiszen az x tengelyen az $\dot{x} = x \left(1 - \frac{x}{2}\right)$ egyenlet érvényes, és \dot{x} előjele $0 < x < 2$ esetén pozitív, $2 < x < \infty$ esetén pedig negatív. A csatolási tag $\pm xy$ választása arra utal, hogy a nyúl–róka „kölcsonhatás” (gondolhatunk akár az egyedek találkozásának gyakoriságára is) egyenesen arányos mindkét faj úgymond ‘egyedszámával’.

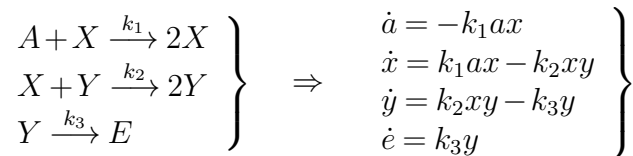
A biológiai valóság összehasonlíthatatlanul bonyolultabb, mint ez az egyszerű modell. Ami az

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x(c_1 + a_1x + b_1y) \\ \dot{y} &= y(c_2 + a_2x + b_2y) \end{aligned} \right\} \text{ ahol } c_1, c_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad (3.32)$$

alakú, úgynevezett állandó együtthatós¹⁹ Lotka–Volterra kétfajmodellek helyességét illeti, azok jobbára csak egy Petri-csészében vagy egy tengerben érvényesek. (Az együtt-hatók előjele és nagysága tekintetében nagy a szabadság, de azért tetszőlegesen nem lehetnek. Az erőforrások korlátos volta megköveteli, hogy a megoldások $t \rightarrow \infty$ mellett korlátosak maradjanak. Biológiai szempontból a legfontosabb a b_1 és a a_2 csatolási együtthatók előjele, hiszen ezek fejezik ki, hogy az egyik faj jelenléte serkenti-e avagy gátolja a másik faj gyarapodását.) A matematikus Volterra egyébként halbiológus vejének segített annak a jelenségnek a megértésében, hogy az Adria növényevő és ragadozó halainak aránya markánsan elmozdult az 1915 és 1919 közötti években. Hogyan s miért, milyen matematikai elvek alapján okozhatta–okozta ezt a halászat háború miatti szüneteltetése: Volterra eredetileg erre a kérdésre keresett és talált is választ. Modellje arra is alkalmas volt, hogy annak révén — a halállományok védelmében — a halászati hatóságok időről időre lehalászási kvótákat határozzanak meg. Mintegy harminc éven keresztül, egészen az ötvenes évek elejéig ez utóbbi volt a populációdinamika első számú alkalmazási területe. Lotka demográfiával és kémiai kinetikával foglalkozott: más kérdéseket vizsgálva és más úton jutott el a ma kettejük nevét viselő differenciálegyenlet–rendszerekhez.

¹⁹nem jelenti az általánosság megszorítását, ha az együtthatók közül hármat ± 1 -nek választunk (de nem tetszőlegesen kiválasztott hármat, sőt az 1-esek \pm előjelei sem lehetnek tetszőlegesen) — erre a t független és az x, y függő változók egyenkénti lineáris helyettesítései nyújtanak lehetőséget: ugyanezt a módszert alkalmaztuk egyébként a Van der Pol egyenlet (1.4) normálalakjának levezetésekor is

3.32. Példa (Lotka egyik első példája)



Figyeljük meg, hogy a paraméterek $k_1a = \frac{1}{3}$, $k_2 = 1$, $k_3 = \frac{4}{3}$ választása esetén az x és az y belső reaktánsokra vonatkozó $\dot{x} = k_1ax - k_2xy$, $\dot{y} = k_2xy - k_3y$ rendszer és (3.36) matematikailag azonos egymással.

Most a rókák és nyulak együttélése matematikai modelljéhez azzal a kérdéssel térünk vissza, hogy a nyulak és a rókák vadászata — halak esetében a halászat — hogyan építhető be a (3.30) differenciálegyenlet-rendszerbe? A kézenfekvő

$$\dot{x} = x \left(1 - \frac{x}{2} - y \right) - h_1x \quad , \quad \dot{y} = y(-1 - y + x) - h_2y \quad (3.33)$$

módosítás annak a feltételezésnek felel meg, hogy a halászat állandó és egyenletes abban az értelemben, hogy a lehalászott mennyiség mindenkor arányos a meglévő állomány nagyságával. A módosított egyenlet maga is Lotka–Volterra alakú marad, mindössze az történt, hogy a régi 1 helyére $1 - h_1$, a régi -1 helyére pedig $-1 - h_2$ került, ahol $h_1, h_2 \geq 0$ állandók.

A vadászat jellemzően szezonális tevékenység. Rókák és nyulak esetében amúgy is, az évszakok váltakozásának megfelelően, már az eredeti rendszer együtthatóit is érdemes lett volna periodikus függvényeknek választani. Természetesen ekkor h_1 és h_2 is az időben periodikus függvények. Annak sincs akadálya, hogy a vadászat időben pontszerű jellegét is figyelembe vegyük, ami lényegében a (3.30) egyenletrendszer hirtelen megváltoztatott kezdeti érték(ek)ből történő újraindítását jelenti. (Az ugrásszerű újraindítások mindennaposak az orvosi gyakorlatban: egy intravénás injekció azonnal megemeli a véráramban lévő gyógyhatású anyag koncentrációját. A gyógyszeradagolás időbeli tervezésének és szabályozásának komoly matematikai szakirodalma van. A folyamatos gyógyszerbevitelt lehetővé tevő tapaszok kifejlesztése a hatóanyagkoncentráció stabilizálása érdekében történt.)

A tér-, pontosabban a síkbeliséget legegyszerűbben a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u(c_1 + a_1u + b_1v) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v(c_2 + b_2u + c_2v)$$

formában vehetjük figyelembe, ahol x és y a két helykoordináta, az $u = u(t, x, y)$ és $v = v(t, x, y)$ változók pedig a nyulak és a rókák — ez most ugyancsak erőltetett: jobb

kétfajta baktérium együttélésére gondolni egy Petri-csészében²⁰ — testtömegének tér-időbeli elhelyezkedését írják le. Szokásos az

$$u'_t = d_1(u''_{xx} + u''_{yy}) + u(c_1 + a_1u + b_1v) \quad , \quad v'_t = d_2(v''_{xx} + v''_{yy}) + v(c_2 + a_2u + b_2v)$$

valamint az

$$u'_t = d_1\Delta u + u(c_1 + a_1u + b_1v) \quad , \quad v'_t = d_2\Delta v + v(c_2 + a_2u + b_2v)$$

jelölések használta is, ahol Δ a helyváltozók szerinti Laplace operátor rövidítése. Az egy, illetve a kétdimenziós Laplace operátor ezekben az általánosításokban a diffúzió törvényszerűsége miatt jelenik meg. A $d_1 > 0$ és a $d_2 > 0$ állandókat diffúziós együtthatóknak nevezzük. Az együtthatók konstans voltában a környezet térbeli és időbeli inhomogenitása (ha a környezet olyanak tekinthető) jut kifejezésre.

Magától értetődő, hogy a most bevezetett parciális differenciálegyenletek mindegyikét el kell látni a megfelelő kezdeti- és peremfeltételekkel. Ugyanez vonatkozik minden később tárgyalandó parciális differenciálegyenletre is.

A térbeliség figyelembe-vételének egyszerűbb változata, ha csak egyetlen térkoordinátával dolgozunk. Ekkor az y változó elmarad, Δ egyszerűen az x szerinti kétszeres parciális derivált képzésének $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operátorát jelöli, maga az egyenletrendszer pedig a

$$u'_t = d_1u''_{xx} + u(c_1 + a_1u + b_1v) \quad , \quad v'_t = d_2v''_{xx} + v(c_2 + a_2u + b_2v)$$

alakot ölti. Kérdés persze, hogy a térváltozót vehetjük-e egydimenziósnak nyulak és rókák (vagy akárcsak baktériumok) esetében. Hosszú és keskeny, fűvel borított szigetre gondolhatunk éppen, de ezzel együtt érezzük, hogy az egydimenziós sziget gondolata mennyire irreális. Világos ugyanakkor, hogy a nyulak és a rókák szempontjából a pontszerű sziget mint egyszerűsítő feltételezés kapóra jön, hiszen ez teszi indoklhatóvá mind a térbeliség, mind pedig a további fajok elhanyagolhatóságát. A térbeliség valóságos körülményei között ha a nyulak valahol nagyon elszaporodnak, akkor a rókák messze földről odaindulnak (először a közelebbiek, majd érezve a szomszédok eltűnését, a távolabb levők is). A nyulak pedig megpróbálnak elvándorolni azokról a területekről, ahol sok a róka. Ezeket az úgymond akaratlagos mozgásokat a diffúziós u''_{xx} és v''_{xx} tagok nem modellezik, ez utóbbiak csak az egyes fajoknak a rendelkezésre álló területen történő egyenletes eloszlásának irányába hatnak.

²⁰körkörös/radiális szimmetria esetén polárkoordinátarendszert célszerű használni. A síkbeli Laplace operátor transzformációs szabálya a $\mathcal{U}(r, \varphi) = u(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$ helyettesítésnél ... sok-sok számolás a láncszabály segítségével ... :

$$u''_{xx} + u''_{yy} \Leftrightarrow \mathcal{U}''_{rr} + \frac{1}{r}\mathcal{U}'_r + \frac{1}{r^2}\mathcal{U}''_{\varphi\varphi}.$$

Téves azonban arra gondolni, hogy a diffúziós tagok hozzáadása mindig homogenizál. Az ezzel kapcsolatos rossz beidegződések valós tényeken alapulnak, de azokat némelyek hibásan extrapolálják. (Gauss óta tudjuk, hogy sem a $\Delta u = 0$, sem az $u'_t = \Delta u$ egyenletekben sincsenek hő- vagy hidegzugok és — amennyiben az u valós változót nem hőmérsékletként, hanem folyadékban oldott anyag koncentrációjaként interpretáljuk — a koncentráció spontán összesűrűsödései és ritkulásai ugyancsak lehetetlenek.)

3.33. Megjegyzés (Diffúzió és Turing instabilitás/mintázatok/morphogenesis) *A változók szétválasztása módszer vektoros alkalmazásával nem nehéz igazolni, hogy az*

$$u'_x(t,0) = u'_x(t,\pi) = 0 \quad , \quad v'_x(t,0) = v'_x(t,\pi) = 0 \quad \forall t > 0$$

(Carl) Neumann féle homogén peremfeltétellel ellátott

$$u'_t = u''_{xx} + 4u + 2v \quad , \quad v'_t = 17v''_{xx} - 26u - 8v \quad \forall t > 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$$

parciális differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_{1,1} e^t \cos(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{exponenciálisan lecsengő tagok} \quad , \quad c_{1,1} \in \mathbb{R}$$

alakú. Az eredmény a matematikai kémia/biológia egyik legfontosabb ágazatára nyit kaput. Interpretációja messzire vezet.

Egy újonnan betelepülő ragadozó faj megjelenése, inváziója által okozott hatások modellezése különösen izgalmas feladat. A térbeliség figyelembevételének legegyszerűbb módja, ha néhány nagy rétet képzelünk el, amelyen nyulak és rókok élnek együtt. Az egyes rétek elkülönülnek egymástól, de a szomszédos rétek között (túl-, vagy alulnépesedés esetén) migráció lehetséges.

Egydimenziós térváltozóval leginkább egy hosszú és vékony kémcsőben van dolgunk, amelyben reakció és diffúzió zajlik egyszerre. A diffúzióhoz valamely oldat vagy gáz jelenléte szükséges. A reakció kémiai átalakulás, a fogyó és keletkező anyagok pedig diffúzióval terjednek. Ilyen folyamatokat az

$$u'_t = d_1 u''_{xx} + f(u, v, \mu) \quad , \quad v'_t = d_2 v''_{xx} + g(u, v, \mu) \quad (3.34)$$

szerkezetű parciális differenciálegyenlet-rendszerekkel szokás modellezni, ahol u és v az egyes anyagok koncentrációját jelölik, az $f(u, v, \mu)$ és a $g(u, v, \mu)$ úgynevezett reakciótagok a kémiai kinetikából jönnek, $\mu \in \mathbb{R}^k$ pedig a bifurkációs paraméter. A térbeliséget nem figyelembevéve, a kémiai reakciót az $\dot{u} = f(u, v, \mu)$, $\dot{v} = g(u, v, \mu)$ közönséges differenciálegyenlet-rendszer írja le. A folyamatok az $0 \leq u \ll 1$, $0 \leq v \ll 1$ koncentráció-tartományban zajlanak le. Vegyük észre, hogy a 3.33. Megjegyzés egyenletrendszere is a (3.34) osztályba tartozik.

3.34. Megjegyzés *Parciális differenciálegyenlet-rendszerek segítségével vizsgálhatjuk a chemotaxis jelenségét is, amikor a Petri-csészében élő anyag, mondjuk egy baktériumfaj is van, amely önálló mozgásra képes, és nemcsak a diffúzió révén mozog. A másik szereplő lehet egy mérgeanyag, amely a $\dot{w} = h(w)$ reakcióban keletkezik, és diffúzióval terjed. A mérgeanyag w koncentrációjának téridő-beli változását a*

$$w'_t = d_3(w''_{xx} + w''_{yy}) + h(w)$$

reakció–diffúzió egyenlet írja le. Az $u = u(t, x, y)$ baktériumkoncentrációra vonatkozó egyenlet ehhez képest egyetlen új tagot tartalmaz, amely azt fejezi ki, hogy minden egyes baktérium saját mozgása a mérgekonzentráció gradiensevel ellentétes irányú: a baktérium menekül a mérge elől, és a mérgekonzentráció szintvonalaira merőlegesen, tehát a mindenkori $\text{grad}(w)$ iránnyal ellentétesen mozog. Így az advekción tag $-\chi u \text{grad}(w)$, ahol $\chi > 0$ a chemotaxis együtthatója. Tehát az u baktériumkoncentráció egyenlete az

$$u'_t = d_4(u''_{xx} + u''_{yy}) - \chi \text{div}(u \text{grad}(w)) + j(u, w)$$

alakot ölti. Tulajdonképpen a Laplace operátor is $\Delta = \text{div grad}$ alakban kerül be az egyenletre. Az alapegyenlet ugyanis

$$u'_t = -\text{div}(\underline{F}) + f(u),$$

ahol \underline{F} az anyagáramlás (a hőtanban a hőáramlás) vektora, ami a tiszta diffúzió esetén $-d \text{grad}(u)$, diffúzió és advekción esetén (amikor is közegnek saját \underline{v} sebessége is van) pedig $-d \text{grad}(u) + au \underline{v}$. Reakció–diffúzió egyenletek szempontjából a chemotaxis nem más, mint az advekción egy speciális fajtája. Szokás reakció–diffúzió–advekción, illetve reakció–diffúzió–chemotaxis egyenletekről is beszélni.

Olyan modellek is vannak, amelyek a nyulakat és a rókákat egyenként veszik figyelembe. Ezek az úgynevezett *ágens–alapú modellek* családjába tartoznak, amelyek általában probabilisztikusak, és elsődlegesen szimulációs kísérletek céljára vezetnek be őket. Tipikusan ilyenek a járványterjedési modellek ágens–alapú változatai, amelyeket gyakran vizsgálnak véletlen gráfokon.

Nyulaknál és rókáknál maradva, képzeljünk el egy nagy, mondjuk ezerszer ezres méretű zöld sakktáblát, amelyen szürke nyulak és vörös rókák a következő szabályok szerint élnek és halnak együtt.

- Egyetlen mezőn sem állhat egyszerre két állat. Ez igaz a kiindulási állapotra is, amely a nulla időponthoz tartozik. Az idő diszkrét.
- Minden állat a szomszédos szabad mezők egyikére léphet csak, egyforma valószínűséggel. A rókák szempontjából azok a mezők is szabadok, amelyeken nyúl áll. Minden nyúl egyszerre lép, és minden róka is egyszerre lép, rókák a páratlan, nyulak a páros időpontokban — de a nem-egyértelműség „karambolait” elkerülendő,

a nyulaknak is, és a rókáknak is a saját fajukon belül van egy meghatározott sorrendjük. Egyetlen nyúl sem léphet olyan mezőre, amelyen róka áll. Aki nem tud lépni, helybenmarad.

- A ‘játék’-ot a rókák kezdik. Ha egy róka olyan mezőre lép, ahol éppen egy nyúl áll, akkor azt azonnal felfalja és p valószínűséggel egy utódja is születik. Az utód egyforma valószínűséggel kerül a szomszédos olyan mezőkre egyikére, amelyen ott és akkor nem áll sem nyúl, sem róka. Ha ilyen szomszédos mező nincsen, akkor a szaporodás elmarad. Ha m egymást követő lépésben egy róka nem jut élelemhez, akkor elpusztul.
- A nyulak q valószínűséggel minden egyes lépésük megtétele előtt egyet fialnak. Az utód egyforma valószínűséggel kerül a szomszédos olyan mezőkre egyikére, amelyen ott és akkor nem áll sem nyúl, sem róka. Ha ilyen szomszédos mező nincsen, akkor a szaporodás elmarad.

Jóllehet a szomszédos mező fogalma többféleképpen is definiálható (a nyulak és a rókák saját fajukon belüli sorrendjéről nem is beszélve), világos, hogy a most megadott szimulációs játék a tényleges róka–nyúl együttélés számos komponensét legalábbis elfogadhatóan modellezi. Ha a p és a q valószínűségeket, valamint a maximális koplalási napok m számát jól állítjuk be, akkor a róka– és a nyúlpopuláció markáns ingadozásait, valamint jellegzetes front–kifejlődéseket, utazó hullámokat tapasztalunk. A kiindulási állapotot egy véletlen–szám generátor segítségével állíthatjuk be.

A most leírt játék és annak variánsai jó példák diszkrét idejű, diszkrét és véges állapotterű, sztochasztikus automatára.

Jó messzire elkalandoztunk az egyszerű (3.30) Lotka–Volterra ragadozó–zsákmány egyenlettől, de szerettem volna egyszer a modellalkotás folyamatára és annak néhány specialitására is rámutatni:

- A dinamikus rendszerek szinte minden fajtája alkalmas lehet egy s ugyanazon populáció–dinamika folyamat modellezésére.
- Hogy ezek melyikét választjuk, arra nincsen általános recept. A puding próbája az evés: Az a modell bizonyul jónak, amelyet a biológiai valóság — tapasztalatok és bevált jóslatok formájában — minél többször és minél pontosabban, kvalitatíve és kvantitatíve egyaránt visszaigazol. (Az a modell, amelyet a mindig és viszonylag olcsón rendelkezésre álló numerikus szimulációk sem igazolnak vissza, nem tekinthető jónak és módosításra szorul.)
- Tényleges tapasztalati–kísérleti adatok nélkül a modellalkotás kockázatos és kétséges vállalkozás. Az úgynevezett ‘*bio-inspired*’ modellek nagyobb része tisztán spekulatív és terméketlen marad.

3.35. Megjegyzés (A KOLLEKTÍV VISELKEDÉS EGY ÁGENS–ALAPÚ MODELLJE) *Tizenöt-húsz évvel ezelőtt komoly meglepetést okozott, hogy a sok egyforma egyed mindegyikére egyenként érvényes néhány individuális, és nagyon egyszerű szabály hatására az egyedek összessége úgy viselkedik, mintha egy központi, logikus tervezés érvényesülne. A kísérő szöveg nagy állatkolóniákról beszél. A klasszikus rovarkolóniák közös viselkedése okainak megértése mindig is a legnagyobb kihívások egyike volt az etológia tudománya számára. Karl von Frisch 1973-ban Nobel-díjat kapott a méhek tánc-nyelvének megfejtéséért (a hivatalos indoklás szerint az összehasonlító viselkedésfiziológiában elért eredményeiért, valamint a rovarok kommunikációja terén végzett úttörő munkásságának elismeréseként). Az, amit a kollektív viselkedés matematikája hozzá tud tenni ezekhez a biológiai kutatásokhoz, valószínűleg nem sok, de arra mindenképpen rávilágít, hogyan születhet valami nagyon összetett a nagyon sok egyforma viszonylag egyszerűből. A morzsagyűjtő hangyák feladata a leglátványosabb példák egyike. A modell megalkotásához egy gyakran megfigyelhető jelenség adta a kiindulási pontot. A kérdés az volt, hogy a megtámadott hangyakolónia milyen belső programozottság alapján menekíti el bábjaikat a betolakodó ellenséges támadás elől: ez a kollektív viselkedés is tervezettnek, központilag irányítotttnak tűnik.*

A hangyák mozgását pontosan ugyanúgy modellezzük, mint kicsivel korábban a szürke nyulakét a nagy zöld négyzetrácson. Rókák nincsenek, hanem morzsák vannak, a mezők egy részén, a kezdeti, $t_0 = 0$ időpillanatban még nagy összevisszaságban. Egy mezőn több morzsa is lehet egyszerre. Egy hangya egyszerre csak egyetlen morzsát tud cipelni. Két egyszerű morzsagyűjtési szabály van.

- *Ha egy morzsát nem cipelő hangya olyan mezőre lép, ahol (egy vagy több) morzsa van, onnan felvesz egyetlen morzsát és azt attól kezdve viszi magával.*
- *Egészen addig magával viszi, ameddig egy olyan mezőre nem jut, ahol már van (egy vagy több) morzsa, és ott leteszi, majd onnantól kezdve morzsa nélkül lép tovább.*

Az eredmény meglepő: az egyes hangyák Brown-mozgása ide vagy oda, nem a rendezetlenség növekszik, hanem a rend. Ha elegendően sokáig várunk (és a mezők, a hangyák, és a morzsák számának aránya „jól van beállítva”), akkor meglepően kis számú és meglepően nagy morzsakupac alakul ki.

Jóllehet sokmindent nem értünk az úgynevezett óriás komponensek kialakulásában („giant components”, legtöbbször egyes számban, mert általában csak egy van belőlük), a statisztikus fizika határeloszlás-tételei alapvetően magyarázni tudják a most leírt jelenséget.

Természetesen a morzsagyűjtő hangyák dinamikája is diszkrét idejű, diszkrét és véges állapotterű, sztochasztikus automata (amelyet a szürke nyulak és a vörös rókák feladatával együtt négyzetrács helyett gráfokon is lehet értelmezni — sőt maguk a dinamikát hordozó gráfok is változhatnak dinamikusan etc. etc.).

De nemcsak az állati, az emberi viselkedésnek is vannak hasonló *mintázatai* — nevezetes példa a vastags kialakulása, amely egyúttal szinkronizációs modellként is tárgyalható.

Itt a legfőbb ideje, hogy visszatérjünk oda, ahonnan kiindultunk.

Tekintsük tehát az $\dot{x} = x(1 - \frac{x}{2} - y)$, $\dot{y} = y(-1 - y + x)$ differenciálegyenlet-rendszert az \mathbb{R}^2 sík biológiailag releváns, az $x \geq 0$, $y \geq 0$ egyenlőtlenségekkel jellemzett $\mathbb{R}_+^2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$ részén. Az R egyensúlyi helyzettel tehát nem kell foglalkoznunk. A tengelyek invarianciája miatt magától értetődő, hogy a $J(O)$ mátrix sajátvektorai $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, és az is, hogy a $J(P)$ mátrix egyik sajátvektora az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor. A $J(P)$ mátrix másik sajátvektora a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor, amely a -1 sajátértékhez tartozik. Mind az O , mind a P nyeregpontra. A $J(Q)$ mátrix karakterisztikus polinomja $p_Q(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{2}{3}$, sajátértékei tehát negatív valós részű komplex számok. Okoskodhattunk volna a T-D diagram alapján is: a Q pont stabil fókusz.

Nézzük először a trajektóriák korlátosságát $t \rightarrow \infty$ mellett. Ha $x = 3$, akkor $\dot{x} = 3(1 - \frac{3}{2} - y) < 0$ minden $y \geq 0$ esetén, s az érvelés működik $x = 3$ helyett az $x = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ értékekre is. Ha viszont $0 \leq x \leq 2 + \varepsilon$ és $y = 1 + 2\varepsilon$, akkor $\dot{y} = (1 + \varepsilon)(-2 - 2\varepsilon + x) < -\varepsilon$. A vektormező tehát a $[0, 2 + \varepsilon] \times [0, 1 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ téglalapok még szabad határvonalain balra, illetve lefelé mutat, a (3.30) rendszer trajektóriái tehát előbb–utóbb mind bejutnak ezen téglalapok mindegyikébe (hiszen pld. sebességük lefelé mutató komponense a $0 < x < 2 + \varepsilon$ sávban legalább ε nagyságú). A most bemutatott érvelés természetesen utólagos. Olyan $[0, a] \times [0, b]$ téglalapokat kerestünk — az angol kifejezés a roppant szemléletes „trapping region” —, amelyek nem engednek ki magukból semmilyen trajektóriát. A *ha benne vagyok, benne is maradok* tulajdonságot a szaknyelv pozitív invarianciának nevezi. De nemcsak az jött ki, hogy a $[0, 2 + \varepsilon] \times [0, 1 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ téglalapok mindegyike pozitíven invariáns, hanem egyúttal az is, hogy a kívülről induló trajektóriák mindegyikét is ezek a téglalapok magukba szippantják. És hogy miért az $x = 3$ érték kipróbálásával kezdtem? Mert emlékeztem rá, hogy a Verhulst-féle erőforráskorlát az x tengelyen a 2 volt.)

A trajektóriáknak menniük kell valahová. Most már csak az a kérdés maradt, hogy a nemnegatív \mathbb{R}_+^2 ortáns belsejéből, azaz az $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = y_0 > 0$ kezdeti értékekből induló trajektóriák mindegyike a Q ponthoz tart-e. Látni fogjuk, valóban ez történik, tehát a Q pont aszimptotikus stabilitása globális. De ki kell zárunk még azt az esetet, hogy a Q pontot akárcsak egy periodikus pálya is körülveszi. Ez egy emelettel nehezebb, mint az eddigiek, mert ehhez nem-lokális érvelésre van szükség.

Ami segít, az a

$$V(x, y) = x - \frac{4}{3} \ln(x) + y - \frac{1}{3} \ln(y) \quad (3.35)$$

segédfüggvény bevezetése. Látni fogjuk, hogy a $V : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ segédfüggvényre nézve a (3.30) egyenlet úgy viselkedik, mint az (1.16) egyenlet $b = \frac{3}{2}$ speciális esete az 1.16. Példa a módosított $V(x, y) = \frac{17}{12}x^2 + xy + \frac{2}{3}y^2$ energiafüggvényére nézve. Világos, hogy a

$$v : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \rightarrow x - \frac{4}{3} \ln(x)$$

képlettel bevezetett v függvény konvex, szigorú minimuma van az $x_0 = \frac{4}{3}$ pontban, továbbá mind $x \rightarrow 0$, mind $x \rightarrow \infty$ esetén $v(x) \rightarrow \infty$. Ugyanezek igazak a V függvény y változós részére is, azzal a különbséggel, hogy az ottani minimum helye $y_0 = \frac{1}{3}$. A V függvénynek tehát szigorú minimumhelye van az $(x_0, y_0) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ pontban, szintvonalai pedig az ezt a pontot körbevevő zárt görbék. Ez utóbbi tény szigorú bizonyításához az implicit függvény tételt kell használni. De ennél a bizonyításnál sokkal fontosabb, hogy a V függvény értéke szigorúan monoton csökken a trajektóriák mentén. Valóban,

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = \left(\dot{x} - \frac{4\dot{x}}{3x} + \dot{y} - \frac{1\dot{y}}{3y} \right) \Big|_{t=0}$$

$$x \left(1 - \frac{x}{2} - y \right) - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{x}{2} - y \right) + y(-1 - y + x) - \frac{1}{3}(-1 - y + x),$$

amit — és ez igazolja vissza a segédfüggvény megválasztását — teljes négyzetté lehet alakítani. A végeredmény az, hogy

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 - \left(y - \frac{1}{3} \right)^2 < 0 \quad \text{ha} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

és persze $x, y > 0$. A Q pont globális aszimptotikus stabilitása tehát igazolást nyert.

Már csak az a kérdés, hogyan lehetett rájönni a (3.35) segédfüggvényre? A formális válasz az, hogy egy kvadratikus polinom együtthatóit lehetett optimalizálni, mármint a fenti gondolatmenet *teljes négyzetté alakítható*-e részében. Ez a határozatlan együtt-hatók módszere, amit jól ismerünk. Az \ln függvény bevetése csak első pillantásra nem természetes, hiszen $\ln(x)$ deriváltja nem polinom, de mivel az $\frac{1}{x}$ tényező ‘magától’ kiesik, remek választás.

Van azonban egy mélyebb ok is, amelyet Volterra jól ismert, hiszen az ő legeslegelső ragadozó-zsákmány modellje az alábbi szerkezetű volt:

$$\dot{x} = x \left(\frac{1}{3} - y \right) \quad , \quad \dot{y} = y \left(-\frac{4}{3} + x \right) . \quad (3.36)$$

Ez az egyenlet pedig zárt, jóllehet implicit alakban is megoldható. Valóban, a két egyenletet egymással elosztva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \left(-\frac{4}{3} + x \right)}{x \left(\frac{1}{3} - y \right)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{3} - y}{y} dy = \frac{-\frac{4}{3} + x}{x} dx ,$$

majd az egyenkénti integrálásokat elvégezve

$$\frac{1}{3} \ln(y) - y = x - \frac{4}{3} \ln(x) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R} .$$

A felismerés, hogy a növényevő és a ragadozó halak aránya normálállapotban egy egyensúlyi helyzet körül periodikusan ingadozik, hol az egyikből van több, hol a másikkól,

nem ellenkezett a halászati adatokkal. A halászat száz évvel ezelőtt már régen az Adriai normálállapotához tartozott. A háború ezen a téren is felborította normalitást. A (3.33) egyenlet mintájára 1919-ben az

$$\dot{x} = x \left(\frac{1}{3} - y \right) + px \quad , \quad \dot{y} = y \left(-\frac{4}{3} + x \right) + py$$

differenciálegyenlet-rendszert kellett megoldani. A lehalászás hiánya miatt mind a növényevő, mind a ragadozó halakból $p > 0$ százalékkal több maradt — nem a tengerben, hanem a populáció dinamikáját leíró differenciálegyenlet jobb oldalán. Ez pedig nemcsak az egyensúly, hanem a ragadozó és a növényevő halak arányának

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right) \longrightarrow \left(\frac{4}{3} - p, \frac{1}{3} + p \right)$$

elmozdulását is jelentette. Így magyarázta meg Volterra halbiológus veje meglepő számadatait, s ezzel a felfedezéssel született meg a populációdinamika modern tudománya.

Ha Volterra világszép leánya nem halbiológust választott volna, az én mesém is tovább tartott volna.

4. fejezet

A számítógépes matematika dicsérete

ROLES FOR COMPUTERS IN MATHEMATICS¹

- Heuristics

Gaining insight and intuition

Discovering new patterns and relationships

Using graphical displays to suggest underlying mathematical principles

- Refining and evaluating conjectures

Testing and, especially, falsifying conjectures

Exploring a possible result to see if it is worth for a formal proof

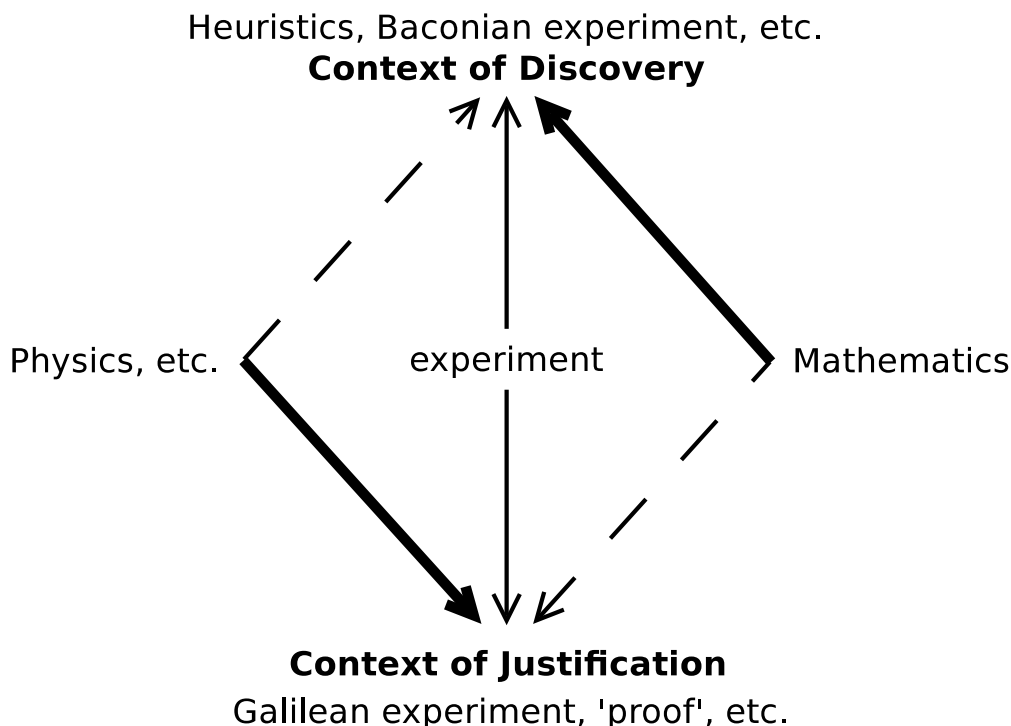
- Aiding in the procedure of proving conjectures

Suggesting approaches for formal proof

Replacing lengthy hand derivations with computer-based derivations

Confirming analytically derived results

¹J.Borwein & D.Bailey, Mathematical Experiments: Plausible Reasoning in the 21st Century, Peters, Natick, 2004



The uses of experimentation is changing both in the sciences and in mathematics. The thick arrows indicate traditional embeddings of experiments in science (justification) and mathematics (discovery). The dashed arrows indicate new roles for experiments, and the vertical arrows are meant that changes in the notion of experiment are blurring the distinction between the contexts of discovery and justification. Importantly because the traditional views of the two types of science are different, the new roles for exploratory experiments also differ.

²H.K.Sorensen, Explanatory experimentation in experimental mathematics: A glimpse at the PSLQ algorithm, In Philosophy of Mathematics. Sociological Aspects and Mathematical Practice (Eds. B.Löwe, T.Müller), College Publications, London, 2010.

³PSLQ (acronym for Partial Sum of Least sQuares) is a polynomial time, numerically stable integer relation algorithm. The simple formula $\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$ discovered with PSLQ makes it possible to calculate the n -th binary digit of π without computing any of the first $n - 1$ digits and do the computation with very little computing power.

⁴Francis Bacon (1561–1626); unbiased recordings of contrived (a szó sokadik magyar jelentése: meg-élt/átélt) facts of nature that can be subsequently be subjected to inductive arguments

⁵Galileo Galilei (1564–1642); a critical experiment – one that discriminates between possibilities and, in doing so, either gives us confidence in the view we are taking or makes us think it in need of correction

KI TUDJUK–E SZÁMOLNI AZ ALÁBBI EGYENLETEK MEGOLDÁSÁT?⁶

ORIENTÁCIÓS VÁLASZOK:⁷

# egyenlet	ALG lineáris	ALG nemlin	KDE lineáris	KDE nemlin	PDE lineáris	PDE nemlin
egy	triv	triv	triv	triv	nehéz	épphogy
kevés	könnyű	nehéz	könnyű	nehéz	épphogy	ltetlen
sok	nehéz	épphogy	nehéz	épphogy	ltetlen	ltetlen
rengeteg	épphogy	ltetlen	épphogy	ltetlen	ltetlen	ltetlen

⁶A táblázatot, amelynek eredetijét Lakshmikantham egy könyvének belső borítóján láttam sok évvel ezelőtt, emlékezetből — bizonyára kisebb, de a lényegét nem befolyásoló eltérésekkel — adom vissza. A linearizáció mint általános módszer a szimpla függőleges vonalakon történő balra-áthaladást jelent. A diszkretizáció a dupla függőleges vonalak balra történő átlépését jelenti: de most csak balra nem lehet, lefelé is kell menni. Végül is az esetek többségében a számítógépes numerika az alkalmazott analízis feladatait a táblázat bal alsó *épphogy* mezőjébe viszi. Ugyanoda, ahová az adatfeldolgozás és a statisztika feladatainak jelentős része is tartozik. Ezért érdemes igazán numerikus lineáris algebrát tanulni, ami persze tele van kombinatorikus heurisztikával és annyi minden más tudás és tapasztalat is szükségeltetik hozzá.

⁷A „ltetlen” nem lehet más, mint a *lehetetlen* szó rövidítése.

AJÁNLOTT IRODALOM:

A PPKE ITK diákjai az internet alapján tájékozódnak, és ez így is van rendjén. A nyomtatott szakirodalom egyre inkább veszít jelentőségéből. Legyen szabad mégis néhány könyvet ajánlanom, magyar és angol nyelven. A felsorolt magyar nyelvű könyvek különböző szempontok szerint igen kedvesek számomra. A felsorolt angol nyelvű könyvek esetében meg vagyok arról győződve, hogy saját témájukban modern klasszikusok, vagy legalábbis könnyen azzá válhatnak. (Tizenhárom könyvet választottam ki mindösszesen: szinte mindegyikük több, egymással nem teljesen azonos kiadásban is megjelent, alkalmasint különböző kiadóknál. A tizenhárom könyv kiválasztása tudatos, a kiadók és az évszámok esetlegesen.)⁸

ZÁRADÉK:

Az internet — maga a *Big Data* — elképesztően gazdag információforrás mindenki számára. Jaj annak, aki nem szelektál megfelelően vagy aki nem megfelelően szelektál.

⁸A negyedik számú referencia — alcíme szerint „Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba” — valóban az. A könyvhöz példatár készül, Csikja Rudolf közreműködésével.

5. fejezet

Animációk jegyzéke

Az animációk a Szerző számára az egész jegyzet legérdekesebb, legértékesebb részei. Megfejtésükhöz, megértésükhöz — a szükséges készségeket mind a mérnök, mind az informatikus, mind a bionikus oktatás annyi más területen is igényli — jó munkát és jó kedvet kívánok.

5.1 Animáció. http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_1.gif

5.2 Animáció. http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_2.gif

5.3 Animáció. http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_3.gif

5.4 Animáció. http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_4.gif

5.5 Animáció. http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_5.gif

5.6 Animáció. http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_6.gif

5.7 Animáció. http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_7.gif

5.8 Animáció. http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_8.gif

- 5.9 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_9.gif
- 5.10 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_10.gif
- 5.11 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_11.gif
- 5.12 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_12.gif
- 5.13 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_13.gif
- 5.14 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_14.gif
- 5.15 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_15.gif
- 5.16 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_16.gif
- 5.17 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_17.gif
- 5.18 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_18.gif
- 5.19 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_19.gif
- 5.20 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_20.gif
- 5.21 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_21.gif
- 5.22 Animáció.** http://users.itk.ppke.hu/~garay/NDS_jegyzet/animaciok/NDS_garay_jegyzet_anim_22.gif

Irodalomjegyzék

- [1] V.I. Arnold, *Közönséges differenciálegyenletek*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
- [2] Gergó Lajos, *Numerikus módszerek*, Eötvös Kiadó, Budapest, 2010.
- [3] Petz Dénes, *Lineáris analízis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002.
- [4] Simon Péter, Tóth János, *Differenciálegyenletek*, Typotex Kiadó, 2005.
- [5] Stoyan Gisbert, Takó Galina: *Numerikus módszerek I–II–III*, Typotex Kiadó, Budapest, 2002.

- [6] N.F. Britton, *Essential Mathematical Biology*, Springer, Berlin, 2003.
- [7] F. Gabbiani, S.J. Cox, *Mathematics for Neuroscientists*, Academic Press, New York, 2010.
- [8] N. Gershenfeld, *The Nature of Mathematical Modelling*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [9] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [10] A. Iserles, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [11] H. Kantz, T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [12] D. Kaplan, L. Glass, *Understanding Nonlinear Dynamics*, Birkhäuser, Basel, 1995.
- [13] S.H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics And Chaos: With Applications To Physics, Biology, Chemistry, And Engineering*, Boulder, Westview Press, 1994.

Definíciójegyzék

A definíciókhoz tartozó oldalszám a Tárgymutató *Definíció* kulcsszava alatt kereshető vissza.

- 1.18. Definíció: Lineáris differenciálegyenlet stabilitása, aszimptotikus stabilitása
- 2.8. Definíció: Folytonos idejű dinamikus rendszer
- 2.10. Definíció: Diszkrét és folytonos idejű (semi)dinamikus rendszer
- 2.19. Definíció: Korrekt kitűzöttség a matematikai analízisben
- 2.20. Definíció: Kontrakció metrikus térben, kontrakciós állandó
- 2.27. Definíció: Egylépéses, p -edrendű diszkretizációs operátor/módszer
- 2.29. Definíció: Implicit Euler módszer
- 2.31. Definíció: Runge–Kutta diszkretizációs operátor/módszer
- 2.35. Definíció: Egyensúlyi helyzet, fixpont
- 2.36. Definíció: Periodikus pont, periodikus pálya, periodikus megoldás
- 2.37. Definíció: Invariáns halmaz, pozitíven invariáns halmaz
- 2.38. Definíció: Trajektória, omega-határhalmaz, alfa-határhalmaz
- 2.43. Definíció: Attraktor és medencéje, vonzási tartománya
- 2.44. Definíció: Egyensúlyi helyzet vonzási és stabilitási tulajdonságai
- 2.52. Definíció: Egyensúlyi helyzet exponenciális stabilitása
- 2.55. Definíció: Segédfüggvény rendszer szerinti deriváltja
- 2.57. Definíció: (Erős) Ljapunov felület, (erős) Ljapunov függvény

- 2.62. Definíció: Dinamikus rendszerek közötti konjugáció
- 2.63. Definíció: Dinamikus rendszerek közötti topologikus ekvivalencia
- 2.64. Definíció: Differenciálegyenletek közötti topologikus ekvivalencia
- 2.65. Definíció: Autonóm differenciálegyenlet strukturális stabilitása
- 2.68. Definíció: Bifurkáció, bifurkációs paraméter, bifurkációs pont
- 3.3. Definíció: Kaotikusság, káosz Devaney értelemben
- 3.10. Definíció: Sarkovszkij rendezés
- 3.13. Definíció: Boxdimenzió, alsó és felső boxdimenzió
- 3.19. Definíció: Iterált függvényrendszer, indukált halmazértékű leképezés
- 3.22. Definíció: Önhasonlóság (a számos definíció egyike)

Tételjegyzék

A tételekhez tartozó oldalszám a Tárgymutató *Tétel* kulcsszava alatt kereshető vissza.

- 1.3. Tétel: A Van der Pol egyenlet periodikus megoldása és fázisportréja
- 1.7. Tétel: Liouville Tétele a térfogat-változás és a divergencia kapcsolatáról
- 1.19. Tétel: Lineáris differenciálegyenlet exponenciális stabilitása
- 1.21. Tétel: Routh–Hurwitz stabilitási kritérium
- 1.29. Tétel: Linearizált, illetve diszkrétizált fázisportré egyensúlyi helyzet körül: Grobman–Hartman Lemma, nem-formális változat
- 1.31. Tétel: A fékezett, periodikusan gerjesztett inga/hajóhinta mozgásainak kombinatorikus, kaotikus sokfélesége
- 2.1. Tétel: Egzisztencia és unicitás: Picard–Lindelöf Tétel, globális változat
- 2.2. Tétel: Egzisztencia és unicitás: Picard–Lindelöf Tétel, lokális változat
- 2.6. Tétel: Folytonos függés a Picard-Lindelöf Tételben
- 2.7. Tétel: Picard-Lindelöf Tétel, egyoldali Lipschitz-feltétellel
- 2.21. Tétel: Kontrakciós elv: Banach kontrakciós fixpont-tétele konvergencia-becsléssel
- 2.24. Tétel: Gronwall egyenlőtlenség
- 2.28. Tétel: Diszkrétizációs alapbecslés véges időintervallumon
- 2.39. Tétel: Omega-határhalmazok osztályozása a síkon: Poincaré–Bendixson tétel
- 2.40. Tétel: A Poincaré–Bendixson Tétel folytatása: Egyensúlyi helyzet periodikus pálya belsejében
- 2.41. Tétel: Dulac féle divergencia kritérium a síkon

- 2.42. Tétel: Omega-határhalmazok alaptulajdonságai
- 2.47. Tétel: Attraktorok alaptulajdonságai
- 2.48. Tétel: Linearizált, illetve diszkretizált fázisportré egyensúlyi helyzet körül: Grobman–Hartman Lemma, technikai változat
- 2.49. Tétel: Instabil/stabil sokaság tétel
- 2.56. Tétel: Ljapunov Tétéle a(z aszimptotikus) stabilitásról
- 2.58. Tétel: LaSalle elv a Ljapunov függvény rendszer szerinti deriváltjáról és a maximális invariáns halmazról
- 2.66. Tétel: A strukturális stabilitás feltételrendszere a síkon: Andronov–Pontrjagin Tétel
- 2.69. Tétel: Floquet tétele periodikus pálya (Poincaré féle követőfüggvényének) sajátértékeiről
- 2.70. Tétel: Floquet tétele, folytatás
- 2.71. Tétel: A Hopf bifurkáció normálalakja: Andronov–Hopf Tétel
- 2.77. Tétel: Sajátértékek függése a paramétertől
- 2.80. Tétel: A numerikus strukturális stabilitás alaptétele, Ming–Chia Li Tétel
- 3.1. Tétel: Tétel a pókháló diagram fixpontjairól
- 3.2. Tétel: Neumann–Ulam Tétel a logisztikus leképezés időátlag–térátlag tulajdonságáról
- 3.4. Tétel: Sarkovszkij tétele intervallum-leképezések periodikus pontjairól, egyszerűsített változat
- 3.5. Tétel: Period Three Implies Chaos
- 3.6. Tétel: Tétel a Ricker leképezés harmadik iteráltjáról
- 3.9. Tétel: Kombinatorikus káosz egy dimenzióban
- 3.11. Tétel: Tétel a Sarkovszkij rendezésről
- 3.16. Tétel: Barna Béla tétele a negyedfokú polinomokra alkalmazott Newton módszer divergens pontjairól

- 3.18. Tétel: Bolzano–Weierstrass tétel Hausdorff metrikában
- 3.21. Tétel: Hutchinson tétéle iterált függvényrendszer attraktoráról
- 3.25. Tétel: Borel tétéle a normális számokról
- 3.29. Tétel: A képtömörítés határértéktétele
- 3.30. Tétel: Isochrone szinkronizációs struktúra-tétel

Tárgymutató

- ágens–alapú modell
 - adócsalás, 75
 - morzsagyűjtő hangyák, 225
 - nyulak és rókák, 223
- árnyék versus szellem, 97
- aszimptotikus fázis
 - isochrone fázis néven, 139, 211
- attraktor, 107, 108
 - attraktor medencéje, 108, 127
- bifurkáció
 - alaptípusok, 149
 - egyensúlyi helyzeté, 149
 - fixpontté, alaptípusok, 151
 - Hopf–bifurkáció, 140
 - normálforma, 140
 - nyereg–csomó bifurkáció, 150
 - periodikus pályáé, alaptípusok, 151
 - perióduskettőző sorozat, 176
 - stabilitásvesztő, 149, 153
- bifurkációs diagram, 161, 178
- Bolzano, 56
- Borel féle normális szám, 203
- boxdimenzió, 193
 - néhány szép fraktálra, 206
- Cantor féle átlós eljárás, 191
- Chua–kör, 214
- Conway automata, 77
- csapdahalmaz, 109, 146
- csatolási mátrix, 80, 211, 217
- Definíció
 - 2.35. definíció, 104
 - 2.43. definíció, 107
 - 2.68. definíció, 135
 - 3.13. definíció, 193
 - 2.62. definíció, 131
 - 2.20. definíció, 82
 - 2.55. definíció, 124
 - 2.10. definíció, 72
 - 2.8. definíció, 69
 - 3.3. definíció, 180
 - 2.57. definíció, 125
 - 2.52. definíció, 117
 - 2.29. definíció, 90
 - 2.37. definíció, 105
 - 3.19. definíció, 200
 - 1.18. definíció, 37
 - 2.27. definíció, 86
 - 2.36. definíció, 104
 - 2.31. definíció, 91
 - 3.10. definíció, 192
 - 3.22. definíció, 201
 - 2.44. definíció, 108
 - 2.65. definíció, 132
 - 2.64. definíció, 132
 - 2.63. definíció, 131
 - 2.38. definíció, 105
 - 2.19. definíció, 82
- diagram
 - kommutatív, 112, 131
 - majdnem kommutatív, 129
- diffúzió, 222
- dinamikus rendszer, 10, 72
- Dirichlet peremfeltétel, 73
- diszkretizációs operátor, 86

explicit Euler, 14
 Runge–Kutta, 91

EEG jelek, 216

egyensúlyi helyzet

- centrum, 40
- csomó, 40
- fókusz, 40
- nemkritikus, 54
- nyereg, 40

egyrétű fedés, 7, 212

el Nino (Vallis modell), 216

első integrál, 125

energiamegmaradás törvénye, 4, 16, 20

ergodik hipotézis, 179

Euler

- poliéder-tétel/formula, 135
- töröttvonal, 13

fázisportré, 7

Fibonacci mátrixhatványok, 47

fixpont

- centrum, 44
- csomó, 44
- fókusz, 44
- nyereg, 44

fixponttétel

- Banach féle, kontrakciós, 83
- Brouwer féle, 109

Fourier sorfejtés, 46, 50, 73, 222

fractal basin boundary, 198

fraktál, 195

- Barnsley páfrány, 204
- Cantor halmaz, 204
- Koch görbe, 204
- Sierpinski háromszög, 204

fraktál-indikátor, 195

fraktáldimenzió

- boxdimenzió néven, 193

függvényegyenlet, 115

Game of Life, 77

gradiens rendszer, 88

gráfdinamika

- adócsalás, 75
- neurális hálózatok, 80, 217
- véletlen gráfok, 79

Grobman–Hartman Lemma, 54, 111

Gronwall Lemma

- differenciális változat, 29, 210
- integrálos változat, 86
- rekurziós, diszkrét változat, 87

hálózati dinamika

- gráfdinamika néven, 79

Hamilton-rendszer, 115, 163

Hausdorff távolság, 199

homeomorfizmus, 69

inga/hajóhinta

- fékezett és gerjesztett, 4
- kaotikus, 58

intervallumleképezés, 182

invariáns halmaz, 105, 126, 148

- pozitíven invariáns, 148

isochrone fázis, 139, 211

iterált függvényrendszer, 200

jóslási időhorizont, 102

Julia halmaz, 193

káosz

- árnyékolási lemma, 103
- Devaney féle definíció, 180
- érzékeny függés, 58, 180
- káosz játék, 206
- káosz kontroll, 103
- kombinatorikus, 58, 189
- L–N–R sorozat, 58
- L–R sorozat, 189
- taszító káosz, 178

káosz-indikátor, 195

képtömörítés, 208

késleltetett egyenlet, 72, 174

kollektív viselkedés
 morzsagyűjtő hangyák, 225
 Kolmogorov rendszer, 148, 219
 Lotka–Volterra rendszer, 219
 kompakt halmaz, 159
 konstans variációs formula, 53, 119
 kontrakció, 83, 200
 közönséges differenciálegyenlet, 45
 autonóm, 7
 kezdeti feltétel, 9
 lineáris, 45, 113
 megoldás, lokális, 63
 megoldásgörbe, 7
 megoldások ábrázolása, 6
 megoldó-operátor, 9
 nem-autonóm, 7, 159
 nemlineáris, 113
 pályagörbe, 7
 szimmetriaviszonyok, 11
 különböző időskálák, 143

 LaSalle elv, 74, 80, 126
 Lax ekvivalencia-tétel, 128
 lemnizkátá, 29, 116
 lineáris algebra
 bázistranszformáció, 33
 blokk-diagonális mátrix-felbontás, 112
 főtengelytétel, 31
 Jordan féle normálalak, 34
 megoldáshalmaz szerkezete, 45
 Rayleigh elv, 33, 211
 szinguláris-érték felbontás, 70
 lineáris analízis
 (mátrix) mértani sor, 118
 mátrix exponenciális, 35
 linearizálás, 54
 Liouville tétele, 18, 44, 59, 106
 Lipschitz-feltétel, 65
 egyoldali, 66
 Ljapunov
 exponens, 70, 178, 180
 felület, 125
 Ljapunov függvény
 Hilbert/Szoboljev térben, 74
 kvadratikus, 30, 121, 126
 szakaszonként lineáris, 145
 Ljapunov–exponens, 101
 logisztikus
 differenciálegyenlet, 172
 leképezés, 179
 Lorenz rendszer, 213

 Mandelbrot halmaz, 194
 Möbius szalag, 152
 módszer, diszkretizációs
 „worst-case” hiba-analízis, 94
 diffúzió-egyenletre, 128
 explicit Euler, 14, 80, 89
 hiba-növekedés, 87
 implicit Euler, 15, 89, 93
 lépésköz szabályozás, 94
 MATLAB ODE15s, 13, 93
 MATLAB ODE45, 13, 92
 Neumann János lépésköz-feltétele, 128
 Runge–Kutta, 91
 semiimplicit Euler, 18
 többlépéses, 93
 trapéz, 17
 Verlet, 21
 módszer, egyéb
 AUTO programcsomag, 161
 gradiens módszer, 88
 határozatlan együtthatók, 26, 47, 50, 116
 intervallumos programozás, 101
 iterációs (kontrakciós elv szerinti), 23, 90, 199
 MATCONT programcsomag, 161
 Newton, 193, 197
 optimalizáció, 88
 próbafüggvény, 26, 47, 50
 szélsőérték-keresés, 88

Neumann peremfeltétel, 222
 nyom-determináns diagram, 40
 omega-határhalmaz, 105, 126
 oszcilláló reakció
 alapmodellek (válogatás), 143
 cirkadián, 143
 pályagörbe, 7
 paraméterek normálása
 skálázás néven, 2, 13, 22, 215, 219
 parciális differenciálegyenlet
 elemi példák, 46, 51
 Peano egzisztenciatétel, 64
 periodikus ablak, 178, 186
 periodikus pálya, 104
 Floquet sajátértéke, 137
 három-periodikus, 182
 Poincaré követőfüggvénye, 137
 Van der Pol egyenleté, 12, 106
 perturbációk
 lineáris és nemlineáris, 117
 Picard–Lindelöf tétel, 62, 67
 polárkoordinátarendszer, 9, 95, 221
 polinom
 egyszeres gyök, 155
 háromszoros gyök, 155
 karakterisztikus, 38
 negyedfokú, 197
 spiky, 89
 stabil, 38
 potenciális erőtér, 20
 pszeudorandom generátor, 77
 rácsdinamika
 Conway automata, 78
 nyulak és rókák, 223
 Wolfram automata, 75
 reakció-diffúzió egyenlet, 73, 148, 223
 chemotaxis, 223
 rezonancia, 51
 Ricker féle rekurzió, 175, 183
 RLC-kör
 lineáris, 1, 215
 nemlineáris, 2
 rugó
 fékezett és gerjesztett, 2
 Sarkovszkij rendezés, 192
 sejtautomata
 Conway automata, 77
 Wolfram automata, 75
 skálázás, 2, 13, 22, 215, 219
 sokaság
 centrális, 113
 instabil, 113
 stabil, 113
 spline, 86
 stabilitás, stabil
 aszimptotikus, 37
 egyensúlyi helyzeté, 108
 exponenciális, 37, 117
 kompakt invariáns halmazé, 108
 különbféle fajtai, 108, 138
 különbféle vonatkozásai, 128
 periodikus pályáé, 138
 stabilitás vonzás nélkül, 108
 stabilizálás, 129
 számítógéppel segített bizonyítás, 59, 101
 szinkronizáció, 210
 master-slave, 213, 216
 Takens attraktor-rekonstrukció, 216
 Taylor polinom, 92
 integrál-maradéktag, 120, 196
 területmegmaradás törvénye, 17, 20
 Tétel
 2.41. tétel, 106
 2.40. tétel, 106
 2.71. tétel, 140
 2.58. tétel, 126
 1.7. tétel, 18
 2.6. tétel, 67

2.1. tétel, 62
 2.2. tétel, 62
 2.39. tétel, 105
 3.5. tétel, 182
 3.6. tétel, 183
 3.4. tétel, 182
 2.66. tétel, 134
 2.47. tétel, 109
 3.16. tétel, 197
 3.25. tétel, 204
 3.1. tétel, 170
 2.21. tétel, 83
 2.24. tétel, 84
 3.2. tétel, 179
 2.7. tétel, 67
 1.19. tétel, 37
 2.70. tétel, 138
 2.69. tétel, 137
 3.30. tétel, 211
 2.48. tétel, 111
 1.29. tétel, 54
 1.31. tétel, 58
 3.21. tétel, 201
 2.49. tétel, 112
 3.29. tétel, 208
 2.28. tétel, 87
 3.9. tétel, 189
 3.18. tétel, 199
 2.77. tétel, 154
 2.80. tétel, 158
 2.42. tétel, 107
 3.11. tétel, 192
 1.3. tétel, 12
 1.21. tétel, 38
 2.56. tétel, 124

titkos üzenet
 nyilvános csatornán, 214

trajektória, 7

Trefethen
 bálna, 98
 mátrix, 19, 98

Turing
 gép, 77
 mintázat, morphogenezis, 222

Van der Pol egyenlet, 2, 106
 numerikája, 13
 periodikus megoldása, 12, 106
 szimmetriája, 12

véletlen iteráció, 203

vonzás
 egyensúlyi helyzeté, 108
 kompakt invariáns halmazé, 108
 periodikus pályáé, 138
 vonzás stabilitás nélkül, 108

Wolfram automata, 77
 peremfeltétel, 75