Gyakorló feladatok zárthelyi előtt és még más is: 2015.nov.27.

I.) Ha a V szintvonalai az origót Matrjosa–babaként veszik körül, akkor érvelés a $\dot{V}_{(E)}(x,y) = \langle \underline{\mathrm{grad}} V(x), f(x)\rangle$ skaláris szorzat előjele alapján.

1.) A $V(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ függvény szintvonalai origó középpontú körvonalak. Mire következtethetünk a V függvény (E) rendszer szerinti $\dot{V}_{(E)}(x,y)$ deriváltjából az origó mint egyensúlyi helyzet stabilitását illetően, ha

$$(E) \quad \dot{x} = y + 3xy^2 - x^3 \quad , \quad \dot{y} = -x - y - x^2y - y^3 \, .$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} &\dot{V}_{(E)}(x,y) = (x\dot{x} + y\dot{y})\big|_{t=0} = x(y + 3xy^2 - x^3) + y(-x - y - x^2y - y^3) \\ &= -y^2 + 2x^2y^2 - x^4 - y^4 = -y^2 - (x^2 - y^2)^2 < 0 \text{ ha } \tbinom{x}{y} \neq \tbinom{0}{0} \, , \end{aligned}$$

amiből az origó aszimptotikus stabilitása következik, és az is, hogy ez az aszimptotikus stabilitás globális, azaz az $\mathbb{R}^2$ sík tetszőleges pontjából induló trajektória $t \to \infty$ esetén az origóhoz tart (hiszen az origó középpontú körvonalak mindegyikét a trajektóriák a V gradiens–vektorával tompaszöget bezárva, kívülről befelé haladva markánsan metszik).

2.) A $V(x,y) = \frac{x^2+4y^2}{2}$ függvény szintvonalai origó középpontú, egyenes állású ellipszisek. Mire következtethetünk a V függvény (E) rendszer szerinti $\dot{V}_{(E)}(x,y)$ deriváltjából az origó mint egyensúlyi helyzet stabilitását illetően, ha

$$(E) \quad \dot{x} = 4y - 3xy^2 - x^3 \quad , \quad \dot{y} = -x + x^2y - y^3 \, .$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} &\dot{V}_{(E)}(x,y) = (x\dot{x} + 4y\dot{y})\big|_{t=0} = x(4y - 3xy^2 - x^3) + 4y(-x + x^2y - y^3) \\ &= -x^4 + x^2y^2 - 4y^4 = -(x^2 - 2y^2)^2 - 3x^2y^2 < 0 \text{ ha } \tbinom{x}{y} \neq \tbinom{0}{0} \, , \end{aligned}$$

amiből az origó globális aszimptotikus stabilitása következik. Az utolsó lépésben hivatkozhattunk volna arra is, hogy

$$\begin{pmatrix} -1 & 0.5 \\ 0.5 & -4 \end{pmatrix} < 0 \quad , \quad \text{azaz a kérdéses szimmetrikus mátrix negatív definit} \, .$$

3.) A $V(x,y) = x^2 + xy + y^2$ függvény szintvonalai origó középpontú, ferdén álló ellipszisek.[1] Mire következtethetünk a V függvény (E) rendszer

[1] Ezt onnan tudjuk, hogy $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} > 0$, azaz a kérdéses kvadratikus alak pozitív definit.

szerinti $\dot{V}_{(E)}(x,y)$ deriváltjából az origó mint egyensúlyi helyzet stabilitását illetően, ha

$$(E) \quad \dot{x} = 3x - y \quad , \quad \dot{y} = -x + y \, .$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} &\dot{V}_{(E)}(x,y) = (2x\dot{x} + \dot{x}y + x\dot{y} + 2y\dot{y})\big|_{t=0} \\ &= 2x(3x-y) + (3x-y)y + x(-x+y) + 2y(-x+y) = 5x^2 + y^2 > 0 \quad \text{ha} \ \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0} \, , \end{aligned}$$

tehát az origó taszító egyensúlyi helyzet, és ez a taszító tulajdonság globális, azaz az $\mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ origóban kilyukasztott sík tetszőleges pontjából induló trajektória $t \to \infty$ esetén a végtelen távoli ponthoz, míg $t \to -\infty$ esetén az origóhoz tart.

5.) A $V(x,y) = x^4 + 2y^2$ függvény szintvonalai origó középpontú, egyenesen álló, ellipszis–jellegű zárt görbék. Mire következtethetünk a V függvény (E) rendszer szerinti $\dot{V}_{(E)}(x,y)$ deriváltjából az origó mint egyensúlyi helyzet stabilitását illetően, ha

$$(E) \quad \dot{x} = -xy^3 \quad , \quad \dot{y} = x^4y^2 \, .$$

Megoldás:

$$\dot{V}_{(E)}(x,y) = (4x^3\dot{x} + 4y\dot{y})\big|_{t=0} = 4x^3(-xy^3) + 4yx^4y^2 = 0 \quad \text{ha} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, .$$

A trajektóriák tehát a V szintvonalain haladnak. Mivel a tengelyek minden egyes pontja egyensúlyi helyzet (és több egyensúlyi helyzet nincsen), minden egyes $x^4 + 2y^2 = c > 0$ szintvonalon (amelyek ellipszis–sereghez hasonlóan ölelik körbe az origót) pontosan nyolc trajektória helyezkedik el (közülük négy egyensúlyi helyzet). Az eredmény az origó stabilitása vonzás nélkül.

II.) Az $f : [-1,1] \to [-1,1]$ függvénnyel definiált iterációk fixpontjainak stabilitása legegyszerűbben az

$$\begin{array}{llll} x^* = f(x^*) & \text{és} \ |f'(x^*)| < 1 & \Rightarrow & x^* \ \text{stabil és vonzó fixpont} \\ x^* = f(x^*) & \text{és} \ |f'(x^*)| > 1 & \Rightarrow & x^* \ \text{instabil és taszító fixpont} \end{array}$$

elégséges feltétek alapján dönthető el. Természetesen $x^* \in [-1,1]$ kell legyen.

6.) Tekintsük az $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x}{2} - x^3$ függvénnyel definiált

$$x_0 \in [-1, 1] \text{ és } \quad x_{n+1} = f(x_n)\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

diszkrét idejű szemidinamikai rendszert, magyarán iteráció–sorozatot.[2] Határozzuk meg a fixpontokat, azok stabilitását, majd írjuk le a trajektóriák aszimptotikus viselkedését.

Megoldás:

Az $x = f(x)$ egyenlet az $x^3 = \frac{x}{2}$ alakra egyszerűsödik. Ez nagyon szerencsés felállás, mert az f fixpontjaira azt kapjuk, hogy x_1^*, 0 és x_2^*. Mivel $f'(x_1^*) = f'(x_2^*) = 0$ (hiszen x_1^* lokális minimum, x_2^* pedig lokális maximum volt), és $f'(0) = \frac{3}{2} > 1$, az x_1^* és x_2^* fixpontok vonzók, az 0 fixpont pedig taszító. Az $y = f(x)$ függvény grafikonja az $y = x$ egyenest a fixpontokban metszi, az origóban alulról felfelé. Ennyi már bőven elegendő ahhoz, hogy az f függvény grafikonját fel tudjuk rajzolni, és ezzel együtt az iteráció menetét is megértsük:

$$\begin{array}{l}
\text{ha } \quad -1 \le x_0 < 0\ , \quad \text{akkor} \quad x_n \to x_1^* \quad n \to \infty \ \text{ esetén} \\
\text{ha } \ x_0 = 0\ , \quad \text{akkor} \quad x_n = 0\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\
\text{ha } \ 0 < x_0 \le 1\ , \quad \text{akkor} \quad x_n \to x_2^* \quad n \to \infty \ \text{ esetén}\,.
\end{array}$$

Fernando Corinto professzor előadásának diasorozata már tegnap óta elérhető a tárgy honlapjáról.

Az előadás első részéből az 1-13, 18-48, második részéből pedig az 1-19, 33-44, 53-54 oldalak a relevánsak.

Két „számolós" feladat lesz a szerdai zárthelyiben, az egyik Ljapunov–függvényes (az 1.-5. sorszámú kidolgozott példához köthetően), a másik pedig iterációs jellegű lesz (a 6. sorszámú kidolgozott példához kapcsolódóan).

---

[2]Természetesen azt is ellenőriznünk kell, hogy az f függvény a $[-1, 1]$ intervallum egyik pontját sem viszi a $[-1, 1]$ intervallumon kívülre. Ehhez szükség van az f függvény viselkedésének részletes vizsgálatára. Mivel $f'(x) = \frac{3}{2} - 3x^2$ és így az $f'(x) = 0$ egyenletnek két gyöke van, $x_1^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Az $f'(x)$ előjelének vizsgálatából azt kapjuk, hogy az f függvény szigorúan monoton csökken -1 és x_1^* továbbá x_2^* és 1 között. A fennmaradó középső $[x_1^*, x_2^*]$ intervallumon az f függvény szigorúan monoton növekszik. Minimumhelye tehát x_1^*, és a minimum értéke $f(x_1^*) = x_1^*$, a maximum helye x_2^* és a maximum értéke $f(x_2^*) = x_2^*$. Mivel $f(-1) = -\frac{1}{2}$ és $f(1) = \frac{1}{2}$, az f függvény a $[-1, 1]$ intervallum egyik pontját sem viszi ezen az intervallumon kívülre.