**Gyakorló feladatok** az október 20–i ZH előtt

1. Az $\dot{x} = x(1 - 2x - y)$, $\dot{y} = y(3 - 2y - x)$ ökoszisztéma $Q = (0, \frac{3}{2})$ egyensúlyi helyzete a pozitív ortánsra (magyarul: az első síknegyed belsejére) nézve globálisan stabil. Igazolja ezt a kijelentést![1]

2. A $\dot{x} = x(1 - \frac{x}{K} - \gamma y)$, $\dot{y} = y(3 - 2y - x)$ rendszerben a $K$ és a $\gamma$ paraméterek mely értékei mellett "kényszerítheti ki" az első faj a második faj teljes kipusztulását? A feladat részekre bontása: Mi kell ahhoz, hogy a $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ egyensúlyi helyzet nyeregpont legyen? Mi kell ahhoz, hogy a $(K, 0)$ egyensúlyi helyzet stabil csomó legyen? Igaz, hogy ekkor a pozitív síknegyed belső részében már nem lehet egyensúlyi helyzet?[2]

3. Számolja ki az alábbi kifejezések elsőrendű parciális deriváltjait az $x$ és az $y$ változók szerint: $x^3y^7$, $x^2 sin(xy)$, $\frac{e^{3x}}{x^2+y^2+1}$, $\sqrt{x^2 + y\cos(xy)}$, $\mathrm{tg}(3x) + \mathrm{arctg}(5y)$.

4. Eldönthető–e az $\dot{x} = y - x^3$, $\dot{y} = -x + 2x^2y - 2y^3$ egyenletrendszer egyensúlyi helyzeteinek stabilitása linearizálással?

5. a.) Az $a$ paraméter mely értékeire lesz az origó a.) az $\dot{x} = Cx$ differenciálegyenletnek aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzete? Mikor lesz az origó a b.) $\dot{x} = Dx$ valamint a c.) $\dot{x} = Fx$ differenciálegyenletnek aszimptotikusan stabil, stabil, instabil egyensúlyi helyzete? Rajzolja meg a d.) $\dot{x} = Gx$ illetve e.) az $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ és az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$ differenciálegyenletek fázisportréját! Csak a b.) és a c.) esetben: Mely paraméterértékekre lesz az origó fókusz, nyereg, csomó? Lehet más is?

$$C = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 - 28 \\ -a^2 & 3a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -2 & a \\ a+1 & -3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

[1] Ha paraméterek is vannak, akkor az egyszerűség kedvéért fel lehet tenni, hogy a 2D Lotka–Volterra rendszer minden egyensúlyi helyzete olyan, hogy annak stabilitása linearizálás révén eldönthető. Ha valaki a fenti nem-elfajulási kritérium nélkül is szeretne elboldogulni a paraméterekkel, akkor a lokális vektormező felrajzolása és/vagy az alábbi állítás általában segíteni szokott: Egy kvadratikus 2D Lotka-Volterra rendszerben periodikus megoldás egyik oldalról sem lehet izolált: nemtriviális periodikus megoldás, ha egyáltalán van, akkor centrumpont is van, és a periodikus megoldások ezt a centrumpontot körülölelve kitöltik a pozitív ortáns belsejét.

[2] Gondolja végig, milyen típusú viszonyokat írhat le egy kvadratikus 2D Lotka-Volterra rendszer a szokásos biológiai interpretációban? Tudna numerikus példákat gyártani az egyes esetekre?

6. Az egyensúlyi helyzetek körüli dinamika ábrázolása után rajzolja meg az a.) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x(1-x) - y$ valamint a b.) $\dot{x} = x^2 - 1$, $\dot{y} = xy$ differenciálegyenletek (amennyire csak tudja) teljes fázisportréját!

7. Határozza meg az általános megoldást, rajzolja fel a fázisportrét:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

8. Határozza meg az $\dot{x} = -3x + y$, $\dot{y} = -3x + y$ valamint az $\dot{x} = -3x + y + \cos(t)$, $\dot{y} = -3x + y$ differenciálegyenletekre vonatkozó $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ kezdetiérték–probléma megoldását! Stabil–e/aszimptotikusan stabil-e ez a megoldás?

9. Ábrázolja az $\dot{x} = -x + 3y$, $\dot{y} = -3x - y + \cos(t)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ kezdetiérték–probléma megoldását olyan módon, hogy az ábrából a kérdéses megoldás stabilitási tulajdonságai is kiolvashatók legyenek.

10. Ismeretes, hogy instabil $\Leftrightarrow$ "nem stabil". a.) Fogalmazza meg egyensúlyi helyzet instabilitásának definícióját az $\varepsilon$ és a $\delta$ segítségével! b.) Ugyanez a feladat az aszimptotikus stabilitás fogalmának tagadására. (Ez inkább logika, mint differenciálegyenletek: de azért rajzolja is le!)

11. Tekintse a következő periodikus megoldásokat: a.) az $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = r + 1$ rendszer $r = 1$ megoldását és b.) az $\dot{x} = -2x + y + 2\cos(t)$, $\dot{y} = -x - 2y - 2\sin(t)$ rendszer $x = \cos(t)$, $y = -\sin(t)$ megoldását! (Csak zárójelben: hogyan lehet levezetni, hogy $x = \cos(t)$, $y = -\sin(t)$ az inhomogén rendszer egy partikuláris megoldása? Működik itt is a próbafüggvény módszer? Hát a konstans variációs formula? Érdemes itt a két egyenlet rendszerét egyetlen másodrendű egyenletre visszavezetni?) Hogyan célszerű ennek a két példának a fényében periodikus megoldások stabilitását és aszimptotikus stabilitását definiálni?

12. Tekintse az a.) $\dot{x} = \mu - x^2$ differenciálegyenletet, ahol $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter. Mik az egyensúlyi helyzetek, és mi a helyzet azok stabilitásával? Rajzolja fel a megfelelő fázisportrékat is! Ugyanez a feladat a b.) $\dot{x} = \mu x - x^2$ illetve a c.) $\dot{x} = \mu x - x^3$ egyenlet–családokra.