Nemlineáris dinamikus rendszerek alapjai - Zárthelyi feladatok megoldásai

November 2, 2015

1.) (4p+4p) A $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékeire lesz az origó aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzete az $\dot{x} = (\mu - 6)x + \mu y$, $\dot{y} = -\mu x + y$ lineáris differenciálegyenlet–rendszernek? A $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékeire kapunk stabil fókuszt?

Megoldás: A nyom–determináns diagram szabályai szerint az origó aszimptotikusan stabilitásának feltétele $T < 0$ és $D > 0$ együttes teljesülése – ami a μ paraméterre ad majd feltételrendszert:

$$\begin{pmatrix} \mu - 6 & \mu \\ -\mu & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T = \mu - 5 < 0 \;\text{ valamint }\; D = \mu^2 + \mu - 6 > 0$$

Az kell, hogy $\mu < 5$ és $\mu^2 + \mu - 6 > 0$ egyszerre legyenek igazak. A másodfokú egyenlet gyökképlete szerint $\mu^2 + \mu - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu_1 = 2$ és $\mu_2 = -3$. Tehát

$$\mu < 5 \quad \text{és} \quad \mu \in (-\infty, -3) \cup (2, \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \mu \in (-\infty, -3) \cup (2, 5)\,.$$

A nyom–determináns diagram szabályai szerint az origó stabil fókusz voltának feltétele $T < 0$ és $D > \frac{T^2}{4}$ együttes teljesülése – ami a μ paraméterre ad majd feltételrendszert:

$$\mu < 5 \quad \text{és} \quad \mu^2 + \mu - 6 > \frac{(\mu - 5)^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4\mu^2 + 4\mu - 24 > \mu^2 - 10\mu + 25 \quad \Leftrightarrow \quad 3\mu^2 + 14\mu - 49 > 0\,.$$

A másodfokú egyenlet gyökképlete szerint $\mu_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 + 3 \cdot 4 \cdot 49}}{6} = \frac{-14 \pm \sqrt{4 \cdot 49 + 3 \cdot 4 \cdot 49}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 3 \cdot 49}}{3} = \frac{-7 \pm 14}{3}$, azaz $\mu_1 = \frac{7}{3}$ és $\mu_2 = -7$. Tehát $\mu \in (-\infty, -7) \cup \left(\frac{7}{3}, 5\right)$. A most kapott halmaz részhalmaza az előbbi $(-\infty, -3) \cup (2, 5)$ halmaznak, hiszen egy stabil fókusz aszimptotikusan is stabil.

2.) (8p+2p+4p+2p) Vázolja az $\dot{x} = x(6 - x - y)$, $\dot{y} = y(5 - x - y)$ (ahol is $x \geq 0$, $y \geq 0$) Lotka–Volterra differenciálegyenlet–rendszer fázisportréját 1.) az egyensúlyi helyzetek kis környezetében (nyeregpontnál a sajátvektorok alapján), majd 2.) a globális fázisportrét is! 3.) Milyen matematikai megfontolásokkal tudja alátámasztani, hogy a globális fázisportré olyan, amilyennek rajzolta? 4.) Milyen ökoszisztémát ír le a kérdéses differenciálegyenlet–rendszer?

Megoldás: Mindkét faj képes önmagában is megélni, de egymásra kölcsönösen negatívan hatnak — ez lehet két baktérium, amely eszi (vagy mérgezi) egymást, és egymással versengenek. A tengelyeken lévő egyensúlyi helyzetek (természetesen az $O = \binom{0}{0}$ origó mellett) $P = \binom{6}{0}$ és $Q = \binom{0}{5}$. Belső egyensúlyi helyzet azonban nincs, hiszen a $6-x-y=0$ és az $5-x-y=0$ egyenesek párhuzamosak egymással. Az x faj mindenképpen előnyben van, hiszen szaporodási rátája nagyobb és több erőforrás is áll a rendelkezésére: $6x\big(1-\frac{x}{6}\big)-xy$ illetve $5y\big(1-\frac{y}{5}\big)-xy$. Nézzük, elegendő–e ez az előny ahhoz, hogy az x faj jelenléte esetén az y faj sorsa a kényszerű és biztos kihalás legyen. Látni fogjuk, hogy a válasz igenlő.

Az egyensúlyi helyzetekben kiértékelve a Jacobi mátrixot:

$$J=\begin{pmatrix}6-2x-y & -x\\ -y & 5-2y-x\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad J(O)=\begin{pmatrix}6&0\\0&5\end{pmatrix},\ J(P)=\begin{pmatrix}-6&-6\\0&-1\end{pmatrix},\ J(Q)=\begin{pmatrix}1&0\\-5&-5\end{pmatrix}.$$

Háromszögmátrixok sajátértékei a főátlóban álló számok, tehát O taszító csomó, P vonzó csomó, Q pedig nyeregpont. A Q nyeregpont $\lambda_1=1$ sajátértékéhez tartozó $\binom{\alpha}{\beta}$ sajátvektorának koordinátáira adódó lineáris egyenletrendszer $\alpha=\alpha$, $-5\alpha-5\beta=\beta$, avagy $-5\alpha=6\beta$, amiből egy kellemes sajátvektorválasztás $\mathbf{s}_1=\binom{-6}{5}$. Az y tengely invariáns volta miatt a Q nyeregpont $\lambda_2=-5$ sajátértékéhez tartozó sajátvektorára az $\mathbf{s}_2=\mathbf{j}=\binom{0}{1}$ választás a kézenfekvő.

Mi lehet a legegyszerűbb olyan teljes ábra, amely az O taszító csomó, a P vonzó csomó, és Q nyeregpont körüli kicsiny ábrákat "összeépíti"? — és persze eközben egyetlen trajektória sem szökik ki a végtelenhez.

A matematika nyelvén a kérdés az, hová tartanak az $x>0$, $y>0$ síknegyed pontjaiból induló trajektóriák? Mi lehet egy ilyen trajektória omega–határhalmaza? Egyensúlyi helyzet? Lehet, de csakis a P. Periodikus pálya? Elvben lehet, de csakis olyan periodikus pálya, amely a belsejében tartalmaz egyensúlyi helyzetet. Mondjuk a Q–t? De hiszen a Q pont az y tengelyen ül, és az y tengely invariáns, amelyet a periodikus pálya így nem keresztezhet. Ez az érvelés kizárja a periodikus pályát (és a heteroklinikus kört is). Még azt is meg kell mutatnunk, hogy az $x>0$, $y>0$ síknegyed pontjaiból induló trajektóriák az időben előrehaladva korlátosak lesznek. Ez nagyon könnyű, hiszen $x>6$ esetén $\dot{x}<0$ és $y>5$ esetén $\dot{y}<0$. Tehát a pozitív síknegyed végtelen távoli pontja (mint absztrakt egyensúlyi helyzet) taszít. (Baj is lenne a biológiai interpretációval, ha vonzana ... .) Összefoglalás: a P egyensúlyi helyzet vonzási tartománya a teljes $x>0$, $y>0$ síknegyed, amely az y tengelyen lévő pontok kivételével mindent magához vonz.

4.) (5p+3p) Sorolja fel az előadáson elhangzott numerikus megfontolásokat[1] majd válasszon ki közülük egy olyan gyakorlati jellegűt, amelyet részletesen is ismertet!

Megoldás: A számítógép által kiszámolt közelítő megoldás mind kvantitatív, mind kvalitatív értelemben közel kell legyen a valódi megoldáshoz. Egyrészt minél kisebb hibát akarunk (a rendelkezésünkre álló erőforrások optimális felhasználásával), másrészt azt is szeretnénk, hogy a feladat természete a numerikus megoldásban is tükröződjön. Ez utóbbi szempont jellegzetesen megmaradási tételek, illetve pozitivitási feltételek figyelembe vételét jelenti.

Speciális szerkezetű feladatosztályokhoz speciális numerikus módszerek tartoznak. A Störmer–Verlet módszert például $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-V'(x)$ alakú egyenletrendszerekre alkalmazzák. Jóllehet az $E(x,y)=\frac{y^2}{2}+V(x)$ összenergiát ez a módszer általában nem őrzi meg, a pontos megoldások által indukált dinamikus rendszer területtartási tulajdonságát igen. Ugyanez igaz az $x_{k+1}=x_k+hy_k$, $y_{k+1}=y_k-hV'(x_{k+1})$ alakú szemi–implicit Euler módszerre is. A Störmer–Verlet módszer másod–, a szemi–implicit Euler módszer elsőrendű — lokális hibaformulájuk $|\Phi(h,x)-\varphi(h,x)|\le \mathrm{Const}\cdot h^3$ illetve $|\Phi(h,x)-\varphi(h,x)|\le \mathrm{Const}\cdot h^2$.

[1] Egy 'teljes' válasz többféle módon is összeszerkeszthető. A kérdés az, milyen szempontokra kell ügyelnünk, ha közönséges differenciálegyenletek kezdetiérték–feladatainak megoldását szeretnénk meghatározni. Néhány speciális esetet leszámítva ezek a megoldások soha nem adhatók meg zárt alakban: a kezdetiérték–problémára diszkretizációs eljárást alkalmazunk.

A magasabbrendű módszerek pontosabbak, de jóval több gépidőt igényelnek. A p–edrendű módszerek hibájára a legyező–ábra a $[t_0, t_0 + T]$ intervallumon a $Ke^{LT}h^p$ becsléshez vezet. A túlságosan kis lépésköz felerősíti a kerekítési és számábrázolási hibák hatását. Az implicit módszerek általában nagyobb lépésközt engednek meg, különösen aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzetek környezetében. Az implicit módszerek belső iterációkat — kontrakciós fixponttétel! — igénylő explicit utasításokként hajtódnak végre.

Alappéldáink az explicit és az implicit Euler módszer.

Az általános feladatosztályokra kidolgozott ODE45 módszer két egyszerűbb eljárást ötvöző hibrid módszer, amelybe heurisztikus elemeket is tartalmazó adaptív lépésköz–szabályozót is beépítettek.

A nagyméretű feladatok — hiszen a konkrét alkalmazásokból jönnek — szerencsére mindig speciális szerkezetűek. Még egy véletlen ritka mátrixnak is vannak jellegzetes tulajdonságai, amelyekre a numerika építhet. Ezzel együtt a nagyméretű feladatok roppant nehezek és a közepes méretekre sikeres módszerek is gyakran lefulladnak. Az új eljárásokat a tesztfeladatok standard gyűjteményein kell kipróbálni.

Általában is igaz, hogy a numerika egymással ellentétes szempontok között kell hogy egyensúlyozzon. A döntőbíró mindig a tapasztalat. A nem–elfajult egyensúlyi helyzeteket a numerika elvben jól visszaadja.