Káoszra vonatkozó elemi példák 2015 őszén

Ez a logisztikus leképezés definíciója a szóbajövő maximális $\mu = 4$ paraméterrel:

$$F : [0,1] \to [0,1] \quad , \quad y \to F(y) = 4y(1-y)$$

BE KELL ILLESZTENI A JEGYZET MEGFELELO HELYERE

Itt megismétlem a 3.2 Tételt, de közbeiktatva a nulla-mértékű halmaz definícióját. A szakasz további része a 3.2 Tetel bizonyításának menetét vázolja, alapvetően a sátor-leképezéssel való konjugáció révén.

Van olyan $E \subset [0,1]$ kivételes (exceptional), nulla–mértékű halmaz[1], hogy minden $[a,b] \subset [0,1]$ intervallumra a logisztikus leképezés által indukált $y_{n+1} = F(y_n)$ rekurzió rendelkezik a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{0 \le n \le N \mid y_n \in [a,b]\}}{N+1} = \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{y(1-y)}}\, dy \qquad \forall\, y_0 \in [0,1] \setminus E$$

tulajdonsággal.

A T *sátor–leképezés* (angolul „tent map") definíciója a

$$T : [0,1] \to [0,1] \quad , \quad x \to T(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } \ 0 \le x \le 0.5 \\ 2-2x & \text{ha } \ 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

képlettel történik. Szükségünk lesz még a

$$\mathcal{H} : [0,1] \to [0,1] \quad , \quad x \to \mathcal{H}(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\, x\right)$$

leképezésre is. Alapvető fontosságú, hogy a

$$\begin{array}{ccc} & [0,1] & \xrightarrow{T} & [0,1] & \\ \mathcal{H} & \downarrow & & \downarrow & \mathcal{H} \\ & [0,1] & \xrightarrow{F} & [0,1] & \end{array} \tag{1}$$

[1] Az $E \subset \mathbb{R}$ halmaz *nulla–mértékű* ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy olyan $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ intervallumsorozat, hogy

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon\,.$$

Az E nulla–mértékű voltát a $\lambda(E) = 0$ képlet fejezi ki. Maga a λ a Lebesque mértékre (és Lebesgue nevének kezdőbetűjére) utal.

diagramm kommutatív. A (1) diagram kommutativitását kifejező $F(\mathcal{H}(x)) = \mathcal{H}(T(x))$ azonosság igazolása három egyszerű lépésben történik:

$$F(\mathcal{H}(x)) = 4\sin^2\big(\frac{\pi}{2}\,x\big)\Big(1-\sin^2\big(\frac{\pi}{2}\,x\big)\Big) = \sin^2(\pi x) \quad \text{ha} \;\; 0 \le x \le 1\,,$$

$$\mathcal{H}(T(x)) = \sin^2\big(\frac{\pi}{2}\,2x\big) = \sin^2(\pi x) \quad \text{ha} \;\; 0 \le x \le 0.5\,,$$

$$\mathcal{H}(T(x)) = \sin^2\big(\frac{\pi}{2}(2-2x)\big) = \sin^2(\pi - \pi x) = \sin^2(\pi x) \quad \text{ha} \;\; 0.5 \le x \le 1\,.$$

Az $F(\mathcal{H}(x)) = \mathcal{H}(T(x))$ azonosság alapján $F^n(\mathcal{H}(x)) = \mathcal{H}(T^n(x))$ is igaz, $N = 0,1,2,\ldots$. Így az $y_0 = \mathcal{H}(x_0)$ választással az $\{x_n = T^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ és az $\{y_n = F^n(y_0)\}_{n=0}^{\infty}$ iteráció–sorozatokra $y_n = \mathcal{H}(x_n)$ is teljesül.

Neumann és Ulam fontos észrevétele volt, hogy a T sátor–leképezés aszimptotikus időátlagai majdnem minden kezdőpont esetén — azaz a kezdőpontok egy nulla–mértékű D halmazát leszámítva — egyenletes térbeli eloszlást követnek, azaz minden $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$ intervallumra

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{0 \le n \le N \mid x_n \in [\alpha,\beta]\}}{N+1} = \beta - \alpha = \int_\alpha^\beta 1\,dx \qquad \forall\; x_0 \in [0,1] \setminus D\,.$$

Elvégezve az $y_n = \mathcal{H}(x_n)$, $a = \mathcal{H}(\alpha)$, $b = \mathcal{H}(\beta)$, $E = \mathcal{H}(D)$ helyettesítéseket, Tétel 3.2 SORSZAM KELL azonnal adódik a minden N–re érvényes

$$\#\{0 \le n \le N \mid x_n \in [\alpha,\beta]\} = \#\{0 \le n \le N \mid \mathcal{H}(x_n) \in [\mathcal{H}(\alpha),\mathcal{H}(\beta)]\}$$

tulajdonság és az

$$y = \sin^2\big(\frac{\pi}{2}\,x\big) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{y}) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-y}}\,\frac{1}{2\sqrt{y}}\,.$$

integráltranszformáció szerint. Lényeges volt, hogy $\mathcal{H}$ a $[0,1]$ intervallumot önmagára vivő szigorúan növekvő C^∞ függvény és az is, hogy $\lambda(E) = \lambda(\mathcal{H}(D)) = 0$.

A (1) kommutativitív diagram kapcsán érdemes visszalapozni a Grobman–Hartman 1.22 illetve 2.48 Tételhez SORSZAM KELL és felidézni a strukturális stabilitás 2.65 definícióját SORSZAM KELL folytonos idejű dinamikus rendszerek esetében). —- *a strukturalis stabilitast a Jegyzetben nem definialtam diszkret ideju dinamikai rendszerekre. A hianyzo definicio egyebkent a 2.65 Definicio parja, ahol is az eredeti es a perturbalt lekepezes kozott (idoatparameterezes nelkuli) konjugacio letezeset kell megkovetelni: idoatparameterezesre egyebkent a 2.80 Tetelben is szukseg van. Igy tehat a Grobman–Hartman Tetellel valo kapcsolatra (jollehet az mind a linearizalt, mind a* *diszkretizalt egyenletre konjugacio letezeset, tehat idoatparameterezes nelkuli strukturalis stabilitast allit nem–elfajult egyensulyi helyzetek kis kornyezeteben) a zh-ban nem terhetek ki.*

A most kovetkezo szakaszt nem mondtam el az eloadason: zh-ra sem kell

És most az F logisztikus leképezés és a rendezési minták kapcsolatáról

$$y_0 = 0 \ , \ y_1 = \frac{1}{4} \ , \ y_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \ , \ y_3 = \frac{3}{4} \ , \ y_4 = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \ , \ y_5 = 1 \, .$$

Itt y_0, y_2, y_3 és y_4 (az $y = 4y(1-y)\big(1-4y(1-y)\big)$ negyedfokú egyenlet megoldásaiként) fixpontjai az $F^2 = F \circ F$ függvénynek. A négy szám közül kettő, y_0 és y_3 pedig (az $y = 4y(1-y)$ másodfokú egyenlet megoldásaiként) fixpontjai már az F függvénynek is. Az $F, F^2 : [0,1] \to [0,1]$ függvények grafikonjait közös koordinátarendszerben ábrázolva azt látjuk, hogy y_0, y_1, y_3 és y_5 az $F(y) = F^2(y)$egyenlet megoldásai. Az ábrából — érdemes megrajzolni! — az is világos, hogy

$$\begin{array}{lclclcl} y_0 < y < y_1 & \Rightarrow & y < F(y) < F^2(y) & , & y_1 < y < y_2 & \Rightarrow & y < F^2(y) < F(y) \, , \\ y_2 < y < y_3 & \Rightarrow & F^2(y) < y < F(y) & , & y_3 < y < y_4 & \Rightarrow & F(y) < y < F^2(y) \, , \\ y_4 < y < y_5 & \Rightarrow & F(y) < F^2(y) < y \, , & & & & \end{array}$$

így az $F^2(y) < F(y) < y$ rendezés nem fordul elő. Ez pedig azt jelenti, hogy az $y, F(y), F^2(y), F^3(y), \ldots$ sorozatot — legyen bár annak összevisszasága akármennyire is bonyolult — semmiképpen sem tekinthetjük véletlen sorozatnak, hiszen akkor abban a három hosszúságú „rendezési string”–ek mindegyikének pozitív valószínűséggel kellene előfordulnia.

A rendezési reláció vizsgálata idősorok véges mintáiban a statisztika egyik fontos feladata. (Ha az $f : [0,1] \to [0,1]$ függvény folytonosan differenciálható, akkor az $y, f(y), f^2(y), f^3(y), \ldots$ iterációsorozatokban az n hosszúságú „rendezési string”–ek száma (az elvileg lehetséges $n!$ helyett) átlagosan legfeljebb c^n nagyságrendű lehet, ahol c az f függvényre jellemző konstans.)

A most kovetkezo szakaszt nem mondtam el az eloadason: zh-ra sem kell

A Cantor halmazt előállító affin függvényekhez:

Az F_1 leképezés indexét 0–ról 1–re változtatva azt látjuk, hogy az F_0 és az F_2 affin leképezések 0 és 2 indexei

$$F_{i_n} \circ F_{i_{n-1}} \circ \cdots \circ F_{i_3} \circ F_{i_2} \circ F_{i_1}([0,1]) = 0.i_n i_{n-1} \ldots i_3 i_2 i_1 \ldots \ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

szerint a $[0,1]$ intervallum megfelelő képhalmazainak hármas számrendszerbeli típusaira utalnak. (Hasonló észrevétel a Sierpinski háromszög előállításában kulcsszerepet játszó kisebb háromszögek sorszámozására is érvényes. Ugyanez igaz a Koch–görbe konstrukciójában szereplő és egyre rövidülő szakaszok sorszámozására is.)

Érdemes megjegyeznünk, hogy az EZ A RESZ CSAK A SATORLEKEPEZES UTAN JOHET

$$S : [0,1] \to [0,1.5] \quad , \quad x \to S(x) = \begin{cases} 3x & \text{ha } \ 0 \le x \le 0.5 \\ 3 - 3x & \text{ha } \ 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

magas sátor–függvény is előállítja a $C = \cap_{n=0}^{\infty} C_n$ Cantor halmazt, éspedig a $C_0 = [0,1]$,

$$C_n = \{x \in C_0 \mid S^k(x) \in C_0 ,\ k = 0, 1, \ldots, n-1 \ \text{ de } \ S^n(x) \notin C_0\},\ n = 1, 2, \ldots$$

értelemben. Az egyes intervallumok középső harmadának kivágása tehát azt jelenti, hogy az $x, S(x), \ldots, S^{n-1}(x)$ iteráltak sorozata a következő lépésben kiszökik a $[0,1]$ intervallumból. OSSZE KELL FESULNI A JEGYZET MEGFELELO HELYEIVEL – es a lapszamindexeles is javitando majd.

ezt a szakaszt elmondtam az eloadason es a zh-ra is kell

Kettes szamrendszer és a $2x$ (mod 1) diadikus leképezés:

$$f : [0,1] \to [0,1] \quad , \quad x \to f(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } \ 0 \le x < 0.5 \\ 2x - 1 & \text{ha } \ 0.5 \le x < 1 \end{cases}$$

Az f függvény $x = 0.5$ pontbeli szakadása egyébként feloldható, ha a $[0,1]$ két végpontját egymással és így magát a $[0,1]$ intervallumot az egységkörrel azonosítjuk. (Az azonosítás formálisan a $\tau : [0,1] \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $x \to e^{2i\pi x}$ átparaméterezés végrehajtását jelenti, maga az f leképezés pedig a polárszöget megduplázó forgatásba megy át.) Ennél is fontosabb azonban, hogy az f függvény a kettes számrendszerben az

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots \ \longrightarrow \ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{2^k} = 0.a_2a_3a_4\ldots$$

alakot ölti, ahol $a_k \in \{0,1\}$, $k = 1, 2, \ldots$. És itt mindent azonnal látunk, ami a káosz Devaney–féle 3.3 SORSZAM KELL Definíciójához kell. Az f függvény periodikus pontjai a diadikus racionális számok (amikor is az $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sorozat periodikus). Világos, hogy a $[0,1]$ intervallumban a diadikus racionális számok sűrű halmazt alkotnak és az N–periodikus sorozatoknak N–periodikus pályák felelnek meg. Sűrű pályákat explicit módon is konstruálhatunk, ha olyan $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ sorozatokat adunk meg, amelyben az $N = 1, 2, \ldots$ hosszúságú stringek mindegyike előfordul. A 3.25 SORSZAM KELL Tétel szerint egy valószínűséggel minden pálya sűrű. A kezdeti állapottól való érzékeny függés is látszik a leképezés kettes számrendszerbeli alakjából. De érvelhetünk úgy is, hogy (a szakadási pont kivételével) a derivált abszolút értéke mindenütt 2. Így kontrakció helyett expanzióval állunk szemben, a Ljapunov–exponens értéke pedig $\lambda_{Ljap} = \log(2) > 0$. Amint azt a periodikusan gerjesztett súrlódásos inga kaotikusságáról szóló 1.24 SORSZAM KELL Tételben is megállapítottuk, a kombinatorikusan különböző $a_k = 0$ „L: balra" versus $a_k = 1$ „R: jobbra", $k = 1, 2, \ldots$ esetek (amelyek ‚áfelől rendre a $[0,1]$ intervallum egy–egy pontjának felelnek meg) számossága most is kontinuum.[2] Fontos az is, hogy — csakúgy mint a T sátor–leképezés esetében (ahol szintén érdemes a kettes számrendszerrel dolgozni) — az f leképezés aszimptotikus időátlagai egyenletes térbeli eloszlást követnek.

Most felírunk egy olyan rekurziós formulát, amely alkalmas a T sátor–leképezés N–periódusú pályái $P(N)$ számának meghatározására, ahol N a *minimális periódus*. Mivel az N hosszúságú stringek száma 2^N, és minden egyes string pontosan egyetlen d–periódusú pályához tartozik (ahol a $1 \leq d \leq N$ itt is a minimális periódus és természetesen az N szám osztója is egyben), teljesül a

$$2^N = \sum_{d|N} d \cdot P(d) \quad \Leftrightarrow \quad N \cdot P(N) = 2^N - \sum_{d|N \ \& \ d \neq N} d \cdot P(d) \tag{2}$$

összefüggés.[3] Ugyanez a rekurziós formula érvényes egyébként a $2x \pmod 1$ diadikus leképezés periodikus pályái számának meghatározására. A (1) diagram kommutativitása miatt a (2) rekurziós formula az F logisztikus leképezés periodikus pontjaira is érvényes.

[2]Ez az észrevétel a Lorenz–attraktor két „lepkeszárnya" illetve a Chua–kör két „tekercse" között oszcilláló megoldások kombinatorikájára is érvényes: a számítógép képernyőjén is könnyen beazonosítható és egymástól kombinatorikusan különböző esetek számossága a kontinuum számosság.

[3]A $P(N)$ egyébként explicit módon is kifejezhető a számelmélet Möbius–féle inverziós formulájának segítségével. (Möbius nemcsak a szalagjáról lett híres.)