Október 10, csütörtök, 8.15–9.00 zárthelyi dolgozat, segítség a felkészülésre

Ismétlés: Egyensúlyi helyzetek osztályozása a síkon

A $d = 2$ speciális esetben nemcsak az aszimptotikus stabilitás kritériumát, hanem az $\dot{x} = Ax$ egyenletek teljes osztályozását is megadjuk. A *stabil–instabil*, *csomó–fókusz–nyereg* esetszétválasztásokat a roppant szemléletes *nyom–determináns diagramm*, a T–D paraméter–sík $TD = 0$ tengelykeresztje és $D = \frac{T^2}{4}$ egyenletű parabolája határozzák meg. Legyen tehát

$$\left.\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad p(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D, \text{ ahol } T = a+c\,,\ D = ac-bd$$

Az elfajult (pld. $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = -y$: az x tengely pontjainak minden pontja stabil egyensúlyi helyzet) és átmeneti (pld. $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - 2y$: elfajult stabil csomó) esetek kivételével:

- instabil fókusz $\Leftrightarrow$ $T > 0$ & $D > \frac{T^2}{4}$
- instabil csomó $\Leftrightarrow$ $T > 0$ & $0 < D < \frac{T^2}{4}$
- nyereg $\Leftrightarrow$ $D < 0$
- stabil csomó $\Leftrightarrow$ $T < 0$ & $0 < D < \frac{T^2}{4}$
- stabil fókusz $\Leftrightarrow$ $T < 0$ & $D > \frac{T^2}{4}$

Az átmeneti esetek közül a legfontosabb

- centrum $\Leftrightarrow$ $T = 0$ & $D > 0$ — stabilitás vonzás nélkül .

Az aszimptotikus stabilitás ($\Leftrightarrow$ stabilitás & vonzás) jellemzése:

- stabil csomó vagy stabil fókusz $\Leftrightarrow$ $T < 0$ & $D > 0$
- átfogalmazás: $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, ahol $a_1 > 0$ & $a_0 > 0$

Fogalmazza át a fenti osztályozást közvetlenül a λ_1, λ_2 sajátértékek szerinti[1] esetszétválasztásokra! Sikerül mindegyikre egy–egy konkrét példát is

[1] ahol természetesen a homogén lineáris $\binom{\dot{x}}{\dot{y}} = A\binom{x}{y}$ differenciálegyenlet jobb oldalát meghatározó 2×2 méretű A mátrix sajátértékeiről van szó

adni/"begyűjteni"?

A tényleges zárthelyiben lesz számolós–rajzos feladat:

Vázolja a fázisportrét az alábbi differenciálegyenletek minden egyes egyensúlyi helyzetének kicsiny környezetében — a zárthelyi dolgozatra ennek az egyetlen feladat–típusnak a begyakorlását kérem —
a.) $\dot{x} = 2xy$, $\dot{y} = x^2 - 1$ b.) $\dot{x} = -y - xy$, $\dot{y} = x + x^2$
c.) $\dot{x} = x^2 - y - 1$, $\dot{y} = xy - 2y$ d.) $\dot{x} = x^2 - y - 1$, $\dot{y} = xy$
e.) $\dot{x} = -xy$, $\dot{y} = x^2 - y - 1 + \mu(y - y^3)$, ahol $\mu = 1 \pm \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon << 1$
a megoldás menete: A.) az egyensúlyi helyzetek meghatározása, majd külön–külön B.) az egyensúlyi helyzetek mindegyikénél: az a.) Jacobi/derivált–mátrix és sajátértékeinek/sajátvektorainak meghatározása b.) a lokális fázisportré felrajzolása. Ez a linearizálás módszere (amely adott egyensúlyi helyzet kis környezetében, a $\exists\, k_* \in \{1, 2, \ldots, d\}, \operatorname{Re} \lambda_{k_*} = 0$ kritikus eseteket leszámítva) nemcsak a $d = 2$, hanem a $d = 3, 4, \ldots$ dimenzióban is gond nélkül elvezet a lokális fázisportréhoz. Mintául szolgálhat az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin(x) - by$, $b \geq 0$ inga/hajóhinta–egyenlet kezelése a jegyzetben, avagy az $\dot{x} = x + \sin(2y)$, $\dot{y} = \tan(x) - 3y$ differenciálegyenlet, ez utóbbi csak az origó, mint egyensúlyi helyzet körül[2]

továbbá az előadásokon elhangzottakra vonatkozó elméleti[3] kérdés:

Definíciókra (fogalmakra) és tételekre fogok rákérdezni — például vektorok lineáris függetlenségének definíciójára, vagy arra, hogy milyen megmaradási tételek vonatkoznak az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -V'(x)$ síkbeli differenciálegyenletre.

---

[2]Az egész síkon vett, globális fázisportré felrajzolása egy, esetenként két fokkal is nehezebb feladat. Aki szeretné, megpróbálkozhat ezzel is. (Aki már tanult róla, az tudja, hogy a Ljapunov–függvények használata erős segédeszköz, amellyel a trajektóriák viselkedését — és itt nemcsak az egyensúlyi helyzetek stabilitásának vizsgálatára gondolok, amely még a leginkább elfajult, $\max_k \operatorname{Re} \lambda_k = 0$ esetek egy részében is működik — sok esetben "el lehet csípni".) Hogy egy más módon igényes feladat is mondjak: Igaz–e, hogy az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin(x) - 2y$ egyenlet $x(0) = -\pi$, $y(0) = y_0 > 0$ pontokból induló $t \geq 0$ megoldásainak mindegyike metszi az $x = 0$, $y > 0$ fél–tengelyt?

[3]aki mind az $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}$, $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ mind az $\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x}$, $\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial y}$ feladatok teljes fázisportréját tudja ábrázolni a $H(x, y) = \frac{y^2}{2} + V(x)$, $V(x) = (x^2 - 1)^2$ esetben, valamint érti a "kiegészítő oldalak" végén szereplő táblázatot (az oda vezető megfontolásokkal együtt!) és a külön fénymásolt oldalt is, az elegendő mértékben felkészült