

Lotka–Volterra típusú ragadozó–zsákmány egyenletrendszer

Tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = x \left(1 - \frac{x}{2} - y\right) \\ \dot{y} = y(-1 - y + x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{x} = x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \dot{y} = y(-1 - y) + xy \end{array} \right\} \quad (1)$$

differenciálegyenlet–rendszert. Négy egyensúlyi helyzet van, éspedig

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A Jacobi–, más szóval a derivált–mátrix értéke az egyensúlyi helyzetekben

$$J = \begin{pmatrix} 1 - x - y & -x \\ y & -1 - 2y + x \end{pmatrix}$$

alapján rendre

$$J(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J(P) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J(Q) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}, \quad J(R) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jóllehet az egyensúlyi helyzetek egyike sem elfajult és így a lokális fázisportrék szépen felrajzolhatók, a teljes fázisportré felrajzolásához más módszerekre is szükség van. Az (1) egyenletrendszer  $\dot{x} = x\alpha(x, y)$ ,  $\dot{y} = y\beta(x, y)$  szerkezete jön segítségünkre, amely egyúttal annak biológiai jelentéséhez is elvezet.

Az egyenletrendszer jobb oldala olyan vektormezőt határoz meg, amelyik az  $x$  tengely minden pontjában vízszintes, az  $y$  tengely minden pontjában pedig függőleges. Így mindkét tengely invariáns, azaz az  $x$  tengely pontjain áthaladó trajektóriák nem lépnek ki az  $x$  tengelyről és hasonlóképpen, az  $y$  tengely is teljes trajektóriákból áll. Mivel a trajektóriák nem metszik át egymást, az  $x$  és  $y$  tengelyek a síkot olyan síknegyedekre bontják, amelyek maguk is invariánsak.

A biológiai interpretáció kézenfekvő, hiszen az  $x$  tengelyen az erőforráskorlátos növekedés Verhulst–féle (??) egyenletének  $\dot{x} = x(1 - \frac{x}{2})$  speciális esetét kapjuk vissza, ahol  $x \geq 0$  egy faj (nagy számú egyedének) összesített testtömegét jelenti. Kézenfekvő tehát, hogy  $y \geq 0$  egy másik faj (nagy számú egyedének) összesített testtömegét, pongyola szóhasználatlaltal annak ‘egyedszámát’ jelentse. Ez a másik faj azonban egyedül nem képes megélni, hiszen akkor rá az  $\dot{y} = y(-1 - y)$  egyenlet vonatkozik, és így  $y > 0$  esetén  $\dot{y} < 0$ , amiből

$y(t) \rightarrow 0$  adódik  $t \rightarrow \infty$  mellett, bármely  $y(0) = y_0 > 0$  kezdeti állapotból indulva. Az első faj jelenléte azonban — amint arra az  $xy$  csatolás pozitív előjele utal —  $\dot{y}$  előjelét  $x > y + 1$  esetén pozitívvá teszi, és így legalábbis elvi lehetőséget teremt a második faj fennmaradására. A  $-xy$  csatolás negatív előjele azt jelenti, hogy két faj kölcsönhatása az első faj számára kedvezőtlen. Így az  $x$  faj a zsákmány, az  $y$  faj pedig a ragadozó. Az egyszerűség kedvéért használhatjuk a nyulak és a rókák elnevezéseket is. Természetesen a rókák nemcsak nyulakat esznek, és a nyulakra más ragadozók is vadásznak. A modellalkotás szempontjából azonban a növényevők–nyulak, ragadozók–rókák azonosítás egy határig jól védhető.

A több faj esetére vonatkozó általánosítás  $\dot{x}_k = x_k \alpha_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  — de minél inkább általánosítunk, annál inkább beleütközünk az  $\alpha_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvények meghatározásának nehézségeibe. Maradjunk tehát a nyulak és a rókák együttélésének (??) matematikai modelljénél.

Ha nincsenek rókák, akkor a nyulak  $x = x(t)$  összesített testtömege  $t \rightarrow \infty$  mellett a 2-höz tart, hiszen az  $x$  tengelyen az  $\dot{x} = x(1 - \frac{x}{2})$  egyenlet érvényes, és  $\dot{x}$  előjele  $0 < x < 2$  esetén pozitív,  $2 < x < \infty$  esetén pedig negatív. A csatolási tag  $\pm xy$  választása arra utal, hogy a nyúl–róka "kölcsönhatás" (gondolhatunk akár az egyedek találkozásának gyakoriságára is) egyenesen arányos mindkét faj úgymond 'egyedszámával'.

A biológiai valóság összehasonlíthatatlanul bonyolultabb, mint ez az egyszerű modell. Ami az

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x(c_1 + a_1x + b_1y) \\ \dot{y} &= y(c_2 + a_2x + b_2y) \end{aligned} \right\} \text{ ahol } c_1, c_2, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \quad (2)$$

alakú, úgynevezett állandó együtthatós Lotka–Volterra kétfajmodellek helyességét illeti, azok jobbára csak egy Petri–csészében vagy egy tengerben érvényesek. (Az együtthatók előjele és nagysága tekintetében nagy a szabadság, de azért tetszőlegesek nem lehetnek. Az erőforrások korlátos volta megköveteli, hogy a megoldások  $t \rightarrow \infty$  mellett korlátosak maradjanak. Biológiai szempontból a legfontosabb a  $b_1$  és a  $b_2$  csatolási együtthatók előjele, hiszen ezek fejezik ki, hogy az egyik faj jelenléte serkenti-e avagy gátolja a másik faj gyarapodását.) A matematikus Volterra egyébként halbiológus vejének segített annak a jelenségnek a megértésében, hogy az Adria növényevő és ragadozó halainak aránya markánsan elmozdult az 1915 és 1919 közötti években. Hogyan s miért, milyen matematikai elvek alapján okozhatta-okozta ezt a halászat háború miatti szüneteltetése: Volterra eredetileg erre a kérdésre keresett és talált is választ. Modellje arra is alkalmas volt, hogy annak révén — a

halállományok védelmében — a halászati hatóságok időről időre lehalászási kvótákat határozzanak meg. Mintegy harminc éven keresztül, egészen az ötvenes évek elejéig ez utóbbi volt a populációdinamika első számú alkalmazási területe. Lotka kémiai kinetikával foglalkozott: más kérdéseket vizsgálva és más úton jutott el a ma kettejük nevét viselő differenciálegyenlet-rendszerekhez.

Hadd térjek most vissza a rókák és nyulak együttélése matematikai modelljéhez azzal a kérdéssel, hogy a nyulak és a rókák vadászata — halak esetében a halászat — hogyan építhető be a (1) differenciálegyenlet-rendszerbe? A kézenfekvő

$$\dot{x} = x \left( 1 - \frac{x}{2} - y \right) - h_1 x \quad , \quad \dot{y} = y(-1 - y + x) - h_2 y \quad (3)$$

módosítás annak a feltételezésnek felel meg, hogy a halászat állandó és egyenletes abban az értelemben, hogy a lehalászott mennyiség mindenkor arányos a meglévő állomány nagyságával. A módosított egyenlet maga is Lotka–Volterra alakú marad, mindössze az történt, hogy a régi 1 helyére  $1 - h_1$ , a régi  $-1$  helyére pedig  $-1 - h_2$  került, ahol  $h_1, h_2 \geq 0$  állandók.

A vadászat jellemzően szezonális tevékenység. Rókák és nyulak esetében amúgy is, az évszakok váltakozásának megfelelően, már az eredeti rendszer együtthatóit is érdemes lett volna periodikus függvényeknek választani. Természetesen ekkor  $h_1$  és  $h_2$  is az időben periodikus függvények. Annak sincs akadálya, hogy a vadászat időben pontszerű jellegét is figyelembe vegyük, ami lényegében a (1) egyenletrendszer hirtelen megváltoztatott kezdeti érték(ek)ből történő újraindítását jelenti. (Az ugrásszerű újraindítások mindennaposak az orvosi gyakorlatban: egy intravénás injekció azonnal megemeli a véráramban lévő gyógyhatású anyag koncentrációját. A gyógyszeradagolás időbeli tervezésének és szabályozásának komoly matematikai szakirodalma van. A folyamatos gyógyszerbevitelt lehetővé tevő tapaszok kifejlesztése a hatóanyagkoncentráció stabilizálása érdekében történt.)

A tér-, pontosabban a síkbeliséget legegyszerűbben a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u(c_1 + a_1 u + b_1 v) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v(c_2 + b_2 u + c_2 v)$$

formában vehetjük figyelembe, ahol  $x$  és  $y$  a két helykoordináta, az  $u = u(t, x, y)$  és  $v = v(t, x, y)$  változók pedig a nyulak és a rókák — ez most ugyancsak erőltetett: jobb kétfajta baktérium együttélésére gondolni egy

Petri-csészében — testtömegének téridőbeli elhelyezkedését írják le. Szokásos az

$$u'_t = d_1(u''_{xx} + u''_{yy}) + u(c_1 + a_1u + b_1v) \quad , \quad v'_t = d_2(v''_{xx} + v''_{yy}) + v(c_2 + a_2u + b_2v)$$

valamint az

$$u'_t = d_1\Delta u + u(c_1 + a_1u + b_1v) \quad , \quad v'_t = d_2\Delta v + v(c_2 + a_2u + b_2v)$$

jelölések használta is, ahol  $\Delta$  a helyváltozók szerinti Laplace operátor rövidítése. Az egy, illetve a kétdimenziós Laplace operátor ezekben az általánosításokban a diffúzió törvényszerűsége miatt jelenik meg. A  $d_1 > 0$  és a  $d_2 > 0$  állandókat diffúziós együtthatóknak nevezzük. Az együtthatók konstans voltában a környezet térbeli (és időbeli) inhomogenitása jut kifejezésre.

Magától értetődő, hogy a most bevezetett parciális differenciálegyenletek mindegyikét el kell látni a megfelelő kezdeti- és peremfeltételekkel. Ugyanez vonatkozik minden később tárgyalandó parciális differenciálegyenletre is.

A térbeliség figyelembe-vételének egyszerűbb változata, ha csak egyetlen térkoordinátával dolgozunk. Ekkor az  $y$  változó elmarad,  $\Delta$  egyszerűen az  $x$  szerinti kétszeres parciális derivált képzésének  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  operátorát jelöli, maga az egyenletrendszer pedig a

$$u'_t = d_1u''_{xx} + u(c_1 + a_1u + b_1v) \quad , \quad v'_t = d_2v''_{xx} + v(c_2 + a_2u + b_2v)$$

alakot ölti. Kérdés persze, hogy a térváltozót vehetjük-e egydimenziósnak nyulak és rókák (vagy akárcsak baktériumok) esetében. Hosszú és keskeny, fűvel borított szigetre gondolhatunk éppen, de ezzel együtt érezzük, hogy az egydimenziós sziget gondolata mennyire irreális. Világos ugyanakkor, hogy a nyulak és a rókák szempontjából a pontszerű sziget, mint egyszerűsítő feltételezés kapóra jön, hiszen ez teszi indokolttá mind a térbeliség, mind pedig a további fajok elhanyagolhatóságát. A térbeliség valóságos körülményei között ha a nyulak valahol nagyon elszaporodnak, akkor a rókák messze földről odaindulnak (először a közelebbiek, majd érezve a szomszédok eltűnését, a távolabb levők is). A nyulak pedig megpróbálnak elvándorolni azokról a területekről, ahol sok a róka. Ezeket az úgymond akaratlagos mozgásokat a diffúziós  $u''_{xx}$  és  $v''_{xx}$  tagok nem modellezik, ez utóbbiak csak az egyes fajoknak a rendelkezésre álló területen történő egyenletes eloszlásának irányába hatnak. A diffúzió önmagában mindig homogenizál.

A térbeliség figyelembevételének egyszerűbb módja, ha néhány nagy rétet képzelünk el, amelyen nyulak és rókák élnek együtt. Az egyes rétek elkülönülnek

egymástól, de a szomszédos rétek között (túl-, vagy alulnépesedés esetén) migráció lehetséges. Egy újonnan betelepülő ragadozó faj megjelenése, inváziója által okozott hatások modellezése különösen izgalmas feladat.

Egydimenziós térváltozóval leginkább egy hosszú és vékony kémcsőben van dolgunk, amelyben reakció és diffúzió zajlik egyszerre. A diffúzióhoz valamely oldat vagy gáz jelenléte szükséges. A reakció kémiai átalakulás, a fogyó és keletkező anyagok pedig diffúzióval terjednek. Ilyen folyamatokat az

$$u'_t = d_1 u''_{xx} + f(u, v) \quad , \quad v'_t = d_2 v''_{xx} + g(u, v)$$

szerkezetű parciális differenciálegyenlet-rendszerekkel szokás leírni, ahol  $u$  és  $v$  az egyes anyagok koncentrációt jelölik, az  $f(u, v)$  és a  $g(u, v)$  úgynevezett reakció-tagok pedig a kémiai kinetikából jönnek. A térbeliséget nem figyelembevéve, a kémiai reakciót az  $\dot{u} = f(u, v)$ ,  $\dot{v} = g(u, v)$  közönséges differenciálegyenlet-rendszer írja le. A folyamatok az  $0 \leq u \ll 1$ ,  $0 \leq v \ll 1$  tartományokban zajlanak le.

**Megjegyzés 1.** *Parciális differenciálegyenlet-rendszerek segítségével vizsgálhatjuk a chemotaxis jelenségét is, amikor a Petri-csészében élő anyag, mondjuk egy baktériumfaj is van, amely önálló mozgásra képes, és nemcsak a diffúzió révén mozog. A másik szereplő lehet egy mérgeganyag, amely a  $\dot{w} = h(w)$  reakcióban keletkezik, és diffúzióval terjed. A mérgeganyag  $w$  koncentrációjának tér-időbeli változását a*

$$w'_t = d_3(w''_{xx} + w''_{yy}) + h(w)$$

reakció-diffúzió egyenlet írja le. Az  $u = u(t, x, y)$  baktériumkoncentrációra vonatkozó egyenlet ehhez képest egyetlen új tagot tartalmaz, amely azt fejezi ki, hogy minden egyes baktérium saját mozgása a mérgek koncentráció gradiensevel ellentétes irányú: a baktérium menekül a mérgek elől, és a mérgek koncentráció szintvonalaira merőlegesen, tehát a mindenkor grad( $w$ ) iránnyal ellentétesen mozog. Így az advekción tag  $-\chi u \underline{\text{grad}}(w)$ , ahol  $\chi > 0$  a chemotaxis együtthatója. Tehát az  $u$  baktériumkoncentráció egyenlete az

$$u'_t = d_4(u''_{xx} + u''_{yy}) - \chi \text{div}(u \underline{\text{grad}}(w)) + j(u, w)$$

alakot ölti. Tulajdonképpen a Laplace operátor is  $\Delta = \text{div} \underline{\text{grad}}$  alakban kerül be az egyenletre. Az alapegyenlet ugyanis

$$u'_t = -\text{div}(\underline{F}) + f(u) \quad ,$$

ahol  $\underline{F}$  az anyagáramlás (a hőtanban a hőáramlás) vektora, ami a tiszta diffúzió esetén  $-d \underline{\text{grad}}(u)$ , diffúzió és advekciónál pedig  $-d \underline{\text{grad}}(u) + au \underline{v}$ . Reakció–diffúzió egyenletek szempontjából a chemotaxis nem más, mint az advekciónál egy speciális fajtája. Szokás reakció–diffúzió–advekciónál, illetve reakció–diffúzió–chemotaxis egyenletekről is beszélni.

Olyan modellek is vannak, amelyek a nyulakat és a rókákat egyenként veszik figyelembe. Ezek az úgynevezett ágens–alapú modellek családjába tartoznak, amelyek általában probabilisztikusak, és elsődlegesen szimulációs kísérletek céljára vezetnek be őket. Tipikusan ilyenek a járványterjedési modellek ágens–alapú változatai, amelyeket gyakran vizsgálnak véletlen gráfokon. Nyulaknál és rókáknál maradva, képzeljük el egy nagy, mondjuk ezerszer ezres méretű zöld sakktáblát, amelyen szürke nyulak és vörös róka a következő szabályok szerint élnek és halnak együtt.

- Egyetlen mezőn sem állhat egyszerre két állat. Ez igaz a kiindulási állapotra is, amely a nulla időponthoz tartozik. Az idő diszkrét.
- Minden állat a szomszédos szabad mezőre léphet csak, egyforma valószínűséggel. A róka szempontjából azok a mezők is szabadok, amelyeken nyúl áll. Minden nyúl egyszerre lép, és minden róka is egyszerre lép, róka a páratlan, nyulak a páros időpontokban — de a nem–egyértelműség "karambolait" elkerülendő, a nyulaknak is, és a róka számára is a saját fajukon belül van egy meghatározott sorrendjük. Egyetlen nyúl sem léphet olyan mezőre, amelyen róka áll. Aki nem tud lépni, helybenmarad.
- A 'játék'–ot a róka kezdi. Ha egy róka olyan mezőre lép, ahol éppen egy nyúl áll, akkor azt azonnal felfalja és  $p$  valószínűséggel egy utódja is születik. Az utód egyforma valószínűséggel kerül a szomszédos olyan mezőre, amelyen ott és akkor nem áll sem nyúl, sem róka. Ha ilyen szomszédos mező nincsen, akkor a szaporodás elmarad. Ha  $m$  egymást követő lépésben egy róka nem jut élelemhez, akkor elpusztul.
- A nyulak  $q$  valószínűséggel minden egyes lépésük megtétele előtt egyet fialnak. Az utód egyforma valószínűséggel kerül a szomszédos olyan mezőre, amelyen ott és akkor nem áll sem nyúl, sem róka. Ha ilyen szomszédos mező nincsen, akkor a szaporodás elmarad.

Jóllehet a szomszédos mező fogalma többféleképpen is definiálható (a nyulak és a róák saját fajukon belüli sorrendjéről nem is beszélve), világos, hogy a most megadott szimulációs játék a tényleges róka–nyúl együttélés számos komponensét legalábbis elfogadhatóan modellezi. Ha a  $p$  és a  $q$  valószínűségeket, valamint a maximális koplalási napok  $m$  számát jól állítjuk be, akkor a róka– és a nyúlpopuláció markáns ingadozásait, valamint jellegzetes front–kifejlődéseket, utazó hullámokat tapasztalunk. A kiindulási állapotot egy véletlen–szám generátor segítségével állíthatjuk be.

A most leírt játék és annak variánsai jó példák diszkrét idejű, diszkrét és véges állapotterű, sztochasztikus automatára.

Jó messzire elkalandoztunk az egyszerű (1) Lotka–Volterra ragadozó–zsákmány egyenlettől, de szerettem volna egyszer a modellalkotás folyamatára és annak néhány specialitására is rámutatni:

- A dinamikus rendszerek szinte minden fajtája alkalmas lehet egy s ugyanazon populáció–dinamika folyamat modellezésére.
- Hogy ezek melyikét választjuk, arra nincsen általános recept. A pudding próbája az evés: Az a modell bizonyul jónak, amelyet a biológiai valóság — tapasztalatok és bevált jóslatok formájában — minél többször és minél pontosabban, kvalitatíve és kvantitatíve egyaránt visszaigazol. (Az a modell, amelyet a mindig és viszonylag olcsón rendelkezésre álló numerikus szimulációk sem igazolnak vissza, nem tekinthető jónak és módosításra szorul.)
- Tényleges tapasztalati–kísérleti adatok nélkül a modellalkotás kockázatos és kétséges vállalkozás. Az úgynevezett ‘bio–inspired’ modellek nagyobb része tisztán spekulatív és terméketlen marad.

Itt a legfőbb ideje, hogy visszatérjünk oda, ahonnan kiindultunk.

Tekintsük tehát az  $\dot{x} = x(1 - \frac{x}{2} - y)$ ,  $\dot{y} = y(-1 - y + x)$  differenciálegyenlet–rendszer az  $\mathbb{R}^2$  sík biológiailag releváns, az  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  egyenlőtlenségekkel jellemzett  $\mathbb{R}_+^2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$  részén. Az  $R$  egyensúlyi helyzettel tehát nem kell foglalkoznunk. A tengelyek invarianciája miatt magától értetődő, hogy a  $J(O)$  mátrix sajátvektorai  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  és  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , és az is, hogy a  $J(P)$  mátrix egyik sajátvektora az  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  vektor. A  $J(P)$  mátrix másik sajátvektora a  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  vektor, amely a  $-1$  sajátértékhez tartozik. Mind az  $O$ , mind a  $P$  nyeregpont. A  $J(Q)$  mátrix karakterisztikus polinomja  $p_Q(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \frac{2}{3}$ , sajátértékei

tehát negatív valós részű komplex számok. Okoskodhattunk volna a T–D diagramm alapján is: a  $Q$  pont stabil fókusz.

Nézzük először a trajektóriák korlátosságát  $t \rightarrow \infty$  mellett. Ha  $x = 3$ , akkor  $\dot{x} = 3(1 - \frac{3}{2} - y) < 0$  minden  $y \geq 0$  esetén, s az érvelés működik  $x = 3$  helyett az  $x = 2 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  értékekre is. Ha viszont  $0 \leq x \leq 2 + \varepsilon$  és  $y = 1 + 2\varepsilon$ , akkor  $\dot{y} = (1 + \varepsilon)(-2 - 2\varepsilon + x) < -\varepsilon$ . A vektormező tehát a  $[0, 2 + \varepsilon] \times [0, 1 + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  téglalapok még szabad határvonalain balra, illetve lefelé mutat, a (??) rendszer trajektóriái tehát előbb–utóbb mind bejutnak ezen téglalapok mindegyikébe (hiszen pld. sebességük lefelé mutató komponense a  $0 < x < 2 + \varepsilon$  sávban legalább  $\varepsilon$  nagyságú. A most bemutatott érvelés természetesen utólagos. Olyan  $[0, a] \times [0, b]$  téglalapokat kerestünk — az angol kifejezés a roppant szemléletes ‘trapping region’ —, amelyek nem engednek ki magukból semmilyen trajektóriát. A ”ha benne vagyok, benne is maradok” tulajdonságot a szaknyelv pozitív invarianciának nevezi. De nemcsak az jött ki, hogy a  $[0, 2 + \varepsilon] \times [0, 1 + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  téglalapok mindegyike pozitíven invariáns, hanem egyúttal az is, hogy a kívülről induló trajektóriák mindegyikét is ezek a téglalapok magukba szippantják. És hogy miért az  $x = 3$  érték kipróbálásával kezdtem? Mert emlékeztem rá, hogy a Verhulst–féle erőforráskorlát az  $x$  tengelyen a 2 volt.)

A trajektóriáknak menniük kell valahová. Most már csak az a kérdés maradt, hogy a nemnegatív  $\mathbb{R}_+^2$  ortáns belsejéből, azaz az  $x(0) = x_0 > 0$ ,  $y(0) = y_0 > 0$  kezdeti értékekből induló trajektóriák mindegyike a  $Q$  ponthoz tart-e. Látni fogjuk, valóban ez történik, tehát a  $Q$  pont aszimptotikus stabilitása globális. De ki kell zárnunk még azt az esetet, hogy a  $Q$  pontot akárcsak egy periodikus pálya is körülveszi. Ez egy emelettel nehezebb, mint az eddigiek, mert ehhez nem-lokális érvelésre van szükség.

Ami segít, az a

$$V(x, y) = x - \frac{4}{3} \ln(x) + y - \frac{1}{3} \ln(y) \quad (4)$$

segédfüggvény bevezetése. Látni fogjuk, hogy a  $V : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  segédfüggvényre nézve a (1) egyenlet úgy viselkedik, mint az SORSZAM PELDA  $\ddot{x} + \frac{3}{2}\dot{x} + x = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = y, \dot{y} = -x - \frac{3}{2}y$  egyenlete a módosított  $V(x, y) = \frac{17}{12}x^2 + xy + \frac{2}{3}y^2$  energiafüggvényre nézve. Világos, hogy a

$$v : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow x - \frac{4}{3} \ln(x)$$

képlettel bevezetett  $v$  függvény konvex, szigorú minimuma van az  $x_0 = (\frac{4}{3})$  pontban, továbbá mind  $x \rightarrow 0$ , mind  $x \rightarrow \infty$  esetén  $v(x) \rightarrow \infty$ . Ugyanezek



igazak a  $V$  függvény  $y$  változós részére is, azzal a különbséggel, hogy az ottani minimum helye  $z_0 = (\frac{1}{3})$ . A  $V$  függvénynek tehát szigorú minimumhelye van az  $(x_0, y_0) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$  pontban, szintvonalai pedig az ezt a pontot körbevevő zárt görbék. Ez utóbbi tény szigorú bizonyításához az implici függvény tételt kell használni. De ennél a bizonyításnál sokkal fontosabb, hogy a  $V$  függvény értéke szigorúan monoton csökken a trajektóriák mentén. Valóban,

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t))|_{t=0} = \left( \dot{x} - \frac{4\dot{x}}{3x} + \dot{y} - \frac{1\dot{y}}{3y} \right) |_{t=0}$$

$$x \left( 1 - \frac{x}{2} - y \right) - \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{x}{2} - y \right) + y(-1 - y + x) - \frac{1}{3}(-1 - y + x),$$

amit — és ez igazolja vissza a segédfüggvény megválasztását — teljes négyzetté lehet alakítani. A végeredmény az, hogy

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t))|_{t=0} = -\frac{1}{2} \left( x - \frac{4}{3} \right)^2 - \left( y - \frac{1}{3} \right)^2 < 0 \quad \text{ha} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

és persze  $x, y > 0$ . A  $Q$  pont globális aszimptotikus stabilitása tehát igazolást nyert.

Már csak az a kérdés, hogyan lehetett rájönni a (4) segédfüggvényre? A formális válasz az, hogy egy kvadratikus polinom együtthatóit lehetett optimalizálni, mármint a fenti gondolatmenet *teljes négyzetté alakítható-e* részében. Ez a határozatlan együtthatók módszere, amit jól ismerünk. Az  $\ln$  függvény bevetése csak első pillantásra nem természetes, hiszen  $\ln(x)$  deriváltja nem polinom, de mivel az  $\frac{1}{x}$  tényező ‘magától’ kiesik, remek választás.

Van azonban egy mélyebb ok is, amelyet Volterra jól ismert, hiszen az ő legeslegeső ragadozó-zsákmány modellje az alábbi szerkezetű volt:

$$\dot{x} = x \left( \frac{1}{3} - y \right) \quad , \quad \dot{y} = y \left( -\frac{4}{3} + x \right) . \quad (5)$$

Ez az egyenlet pedig, igaz hogy implicit, de mégiscsak zárt alakban is megoldható. Valóban, a két egyenletet egymással elosztva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \left( -\frac{4}{3} + x \right)}{y \left( \frac{1}{3} - y \right)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{3} - y}{y} dy = \frac{-\frac{4}{3} + x}{x} dx ,$$

majd az egyenkénti integrálásokat elvégezve

$$\frac{1}{3} \ln(y) - y = x - \frac{4}{3} \ln(x) + C \quad , \quad C \in \mathbb{R} .$$

A felismerés, hogy a növényevő és a ragadozó halak aránya normálállapotban egy egyensúlyi helyzet körül periodikusan ingadozik, hol az egyikből van több, hol a másikkól, nem ellenkezett a halászati adatokkal. A halászat száz évvel ezelőtt már régen az Adriai normálállapotához tartozott. A háború ezen a téren is felborította normalitást. Az (3) egyenlet mintájára 1919-ben az

$$\dot{x} = x \left( \frac{1}{3} - y \right) + px \quad , \quad \dot{y} = y \left( -\frac{4}{3} + x \right) + py$$

differenciálegyenlet-rendszert kellett megoldani. Ez pedig nemcsak az egyensúly, hanem a ragadozó és a növényevő halak arányának elmozdulását is jelentette. Így magyarázta meg Volterra halbiológus veje meglepő számadatait, s ezzel a felfedezéssel született meg a populációdinamika modern tudománya.

Ha Volterra világszép leánya nem halbiológust választott volna, az én mesém is tovább tartott volna.