

1.) Az előadáson szerepeltek az

$$\dot{x} = x(1 - 2x - y) \quad , \quad \dot{y} = y(3 - 2y - x) \quad (\text{ahol } x, y \geq 0) \quad , \quad (1)$$

$$\dot{x} = x(1 - 2x + y) \quad , \quad \dot{y} = y(3 - 2y - x) \quad (\text{ahol } x, y \geq 0) \quad ,$$

$$\dot{x} = x\left(1 - 2x - \frac{y}{2}\right) \quad , \quad \dot{y} = y(3 - 2y - x) \quad (\text{ahol } x, y \geq 0)$$

differenciálegyenlet-egyenlet-rendszerek, szokásos biológiai (versengő kizárás, ragadozó-zsákmány, koegzisztencia) interpretációikkal együtt. Ismételjük meg az ottani megfontolásokat az

$$\dot{x} = x(1 - 2x + y) \quad , \quad \dot{y} = y(-1 - 6y + 3x) \quad \text{ahol } x, y \geq 0$$

egyenletrendszerre! (Határozzuk meg az egyensúlyi helyzeteket! A kapott egyensúlyi helyzetek mindegyikében linearizáljuk az egyenletrendszert — ha szükséges: sajátértékek, stabilitás, sajátvektorok —, majd ennek alapján rajzoljuk le a lokális fázisportrét minden egyes egyensúlyi helyzet körül! Határozzuk meg a globális fázisportrét is, nem-lokális geometriai érveléssel! Melyik faj lenne képes egyedül is életben maradni az adott ökoszisztémában? Előnyös az együttélés mindkét faj számára? Hogyan hívják ezt a fajta együttélést a biológiában? Tud konkrét példákat mondani erre a fajta együttélésre?)

2.) Az (1) feladat paraméterértékei mellett az első faj sorsa a biztos kihalás. Vizsgálja meg, hogy az első faj egyenletében szereplő paraméterek egyikének értékét megváltoztatva, más szóval az

$$(A) \quad \dot{x} = bx(1 - 2x) - xy \quad , \quad \dot{y} = y(3 - 2y - x) \quad \text{rendszerben a } b > 0 \quad ,$$

$$(B) \quad \dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{K} - y\right) \quad , \quad \dot{y} = y(3 - 2y - x) \quad \text{rendszerben a } K > 0 \quad ,$$

$$(C) \quad \dot{x} = x(1 - 2x - \gamma y) \quad , \quad \dot{y} = y(3 - 2y - x) \quad \text{rendszerben a } \gamma > 0$$

paraméter mely értékei mellett kerülheti el az első faj a kihalást!¹ A teljes megoldáshoz nemcsak az esetszétválasztások, hanem a fázisportrék is hozzátartoznak.

¹a.) Az ilyen jellegű feladatokban mindig fel van téve, hogy mindkét faj ténylegesen jelen van az ökoszisztémában — miért kell ezt kikötni? b.) Kihalás alatt (a matematikai modellben) aszimptotikus, tehát $t \rightarrow \infty$ melletti kihalás értendő. c.) Mit gondol: miért nem $\dot{x} = x(b - 2x - y)$ szerepelt az (A) egyenletrendszerben?

3.) *Folytatás: A 2.) feladat gyengébbé tétele: azok számára, akiknek az túl nehéz* Van-e olyan paraméterérték az A.), B.), C.) feladatrészekben, amely mellett az első faj elkerüli/elkerülheti² a kihalást?³

4.) *Folytatás: A 2.) feladat erősebbé tétele* Van-e olyan paraméterérték az A.), B.), C.) feladatrészekben, amely mellett a második faj sorsa a szükségképpen kihalás?

5.) *Folytatás*⁴

$$\dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{K} - \gamma y\right), \quad \dot{y} = y(3 - 2y - x) \quad \text{rendszerben a } K > 0 \text{ és a } \gamma > 0$$

paraméterek mely értékei mellett "kényszerítheti ki" az első faj a második faj teljes kipusztulását?⁵

Jó munkát és jó kedvet is hozzá!

Garay Barna

²Mire utal ez a különbségtétel?

³Segít a biológiai intuíció: Vizsgálja a "szélső" eseteket (amikor is b nagyon nagy, K nagyon nagy, γ nagyon kicsi)!

⁴Mindezek már eddig is világosan mutatják, hogy a.) minden feladatnak számos változata van b.) egy s ugyanazon feladatot is különböző szinteken lehet megoldani.

⁵Nem mintha ezt a második faj "szó nélkül túrné" ... mindezt az evolúciós játékelmélet tudja jobban modellezni.