Nemlineáris Dinamikai Modellek a Biológiában

Utazó hullámok (Fisher egyenlet, SI modell)

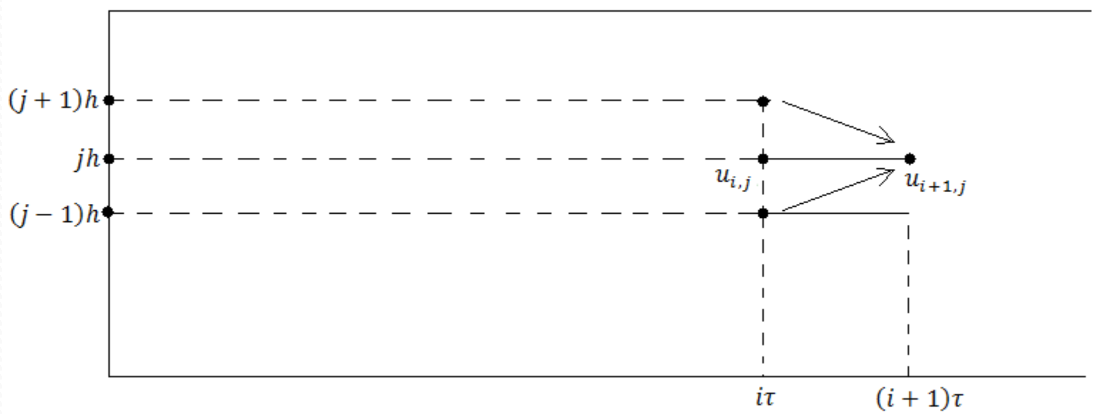
9. gyakorlat

Juhász János (juhasz.janos@.itk.ppke.hu)
Schäffer Katalin (sch.katalin17@gmail.com)

Ismétlés

- A 2. gyakorlaton vizsgáltuk anyagok terjedését a (1D, 2D) térben diffúzióval:
- Adott anyagmennyiség szétterjed a térben
- Pl: explicit Euler módszerrel megoldható az egyenlet

$$u'_t = u''_{xx}$$



$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\tau} = D\,\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \quad \text{ahol}$$

$i = 0,1,2, \ldots N$

$j = 0,1,2, \ldots N$

D diffúziós állandó

h beosztás (x)

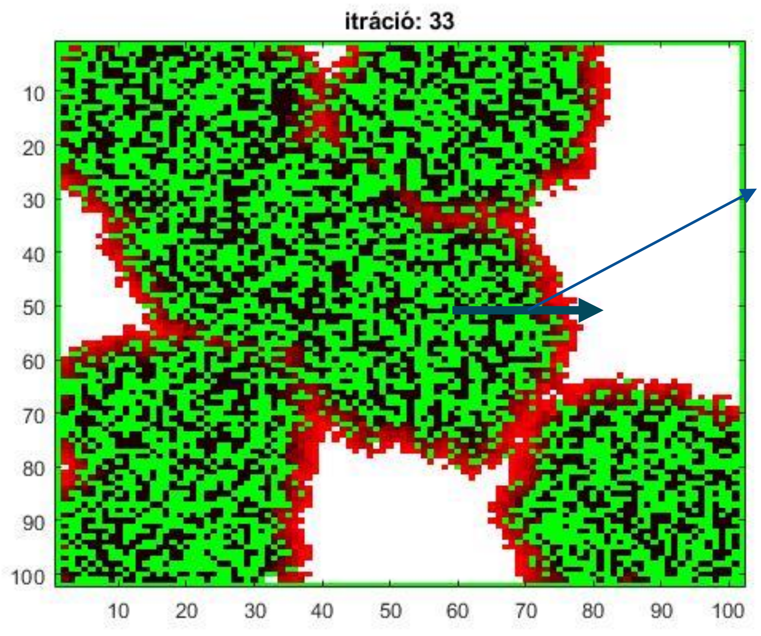
τ beosztás (t)

$u_{i,j}$ az i-edik időpontban, a j-edik helyen lévő „anyagsűrűség vagy anyagáram sűrűség”

Ismétlés

- Később a dinamikai rendszerek változóit egymás (fázistér), vagy az idő függvényében vizsgáltuk
- Pl: Lotka-Volterra rendszerek, SIR modell

- A térbeliség a sejtautomatánál tért vissza.
- Le tudjuk írni egyenletekkel is az ott tapasztalt hullámokat?



Járvány szétterjedése egy gócpontból „hullámként/frontként”

Utazó hullámok

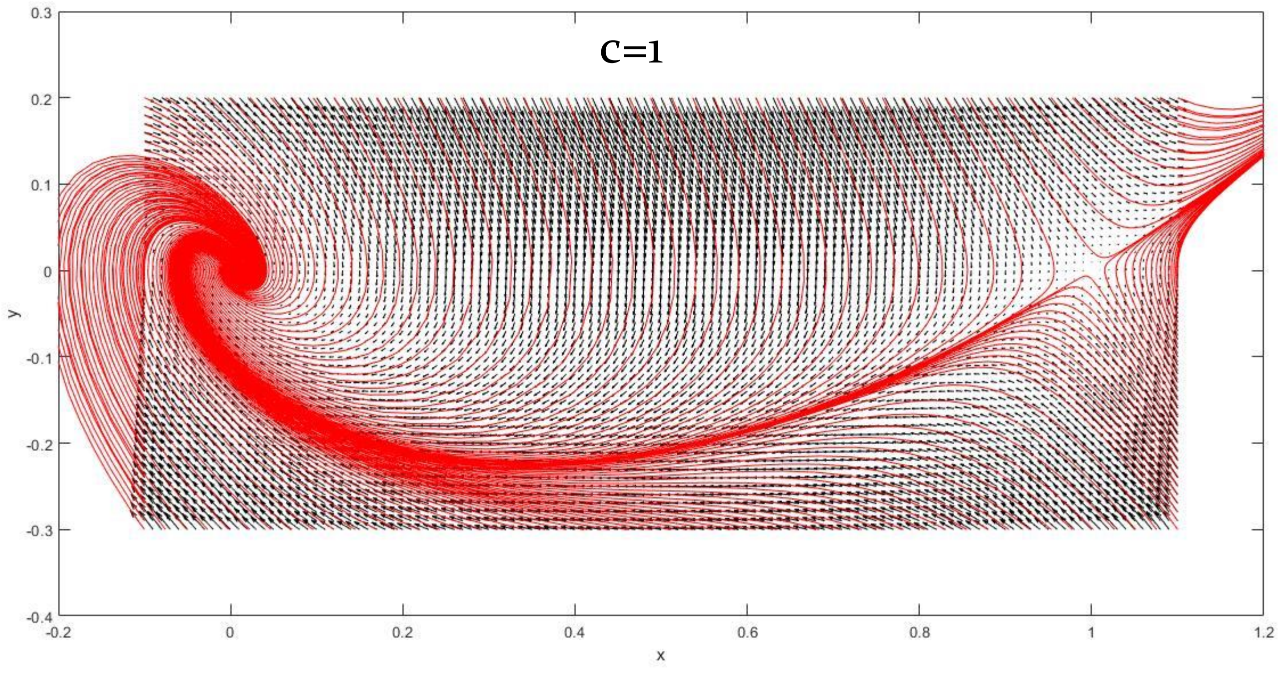
- Térben és időben is mozgó hullámfront (parciális diffegyenlettel (PDE) írhatók le (több független változó), ode megoldókat nem használhatunk -> explicit Euler módszer)
- Hullám halad (térben) + időben is fennmarad ->
- -> haladásért felelős (pl. diffúziós) rész + „utánpótlásért” felelős (pl valamilyen reakció) rész
- Példák:
  - Időjárási frontok haladása,
  - Seb begyógyulása a szélétől befelé,
  - Kedvező génváltozat mutáció megjelenik egy populációban és a szaporodás + vándorlás révén szétterjed (Fisher egyenlet)
  - Járványterjedés hullámfrontja (kórokozók + hordozók mozgása)

Fisher egyenlet

- Lásd: Fisherrajzok.pdf , SIR_grafok_utazohullam_teljes...pdf 14-15. oldal
- Pl: Előnyös allél terjedése populációban
- Pl: hatás végigterjedése kapcsolt monostabil oszcillátorok sorozatán
- 1 PDE: $$-c\varphi' = \varphi(1-\varphi) + \varphi''$$
  ↓
- 2 ODE: $$\varphi' = \psi \quad , \quad \psi' = -\varphi(1-\varphi) - c\psi$$
  - c= hullám sebességi együtthatója
  - φ= előnyös allél gyakoriság [0 1]; φ''= diffúziós terjedés
- 2 egyensúlyi helyzet (utazó hullám ezeket köti össze) :
  - (φ=0; ψ=0) : nyeregpont
  - (φ=1; ψ=0) : stabil vonzó csomó (c>2), fókusz (0<c<2)

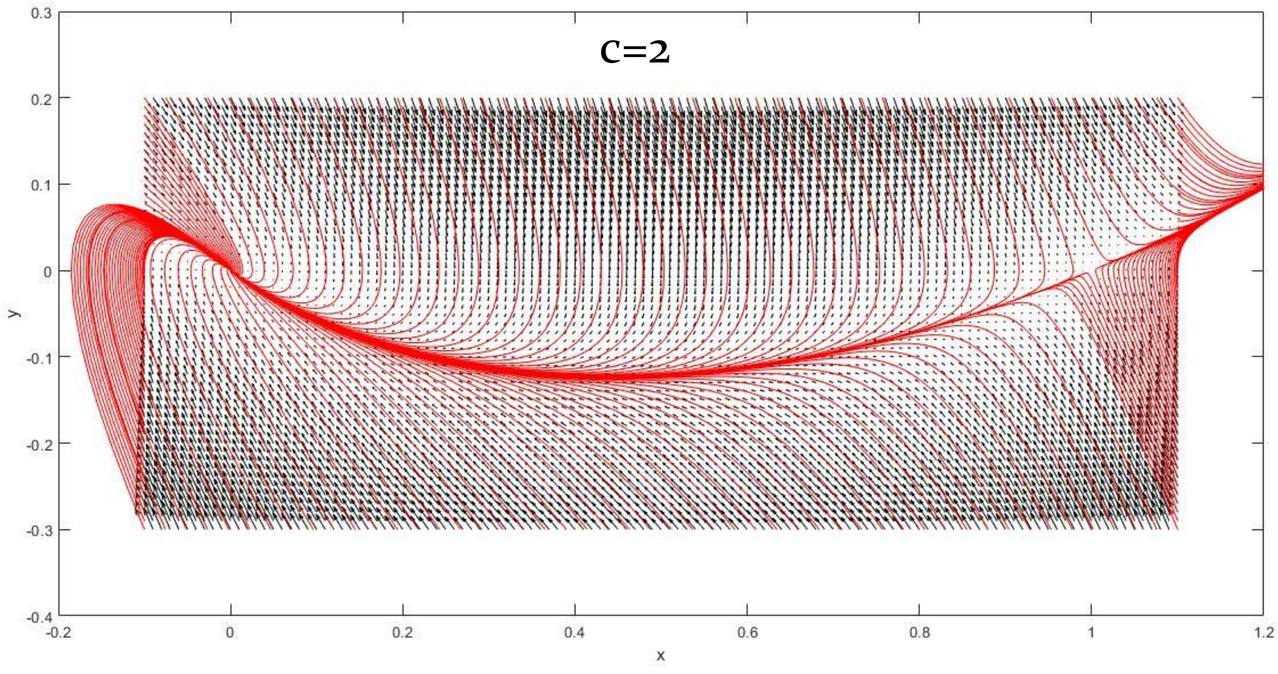
Fisher egyenlet

- **Feladat**: készítsük el a Fisher ODE rendszer fázisportréját az gyak09_Fisher_fazisportre_feladat.m fájlt kiegészítve. (Fisherrajzok.pdf 1. ábrájának reprodukciója)



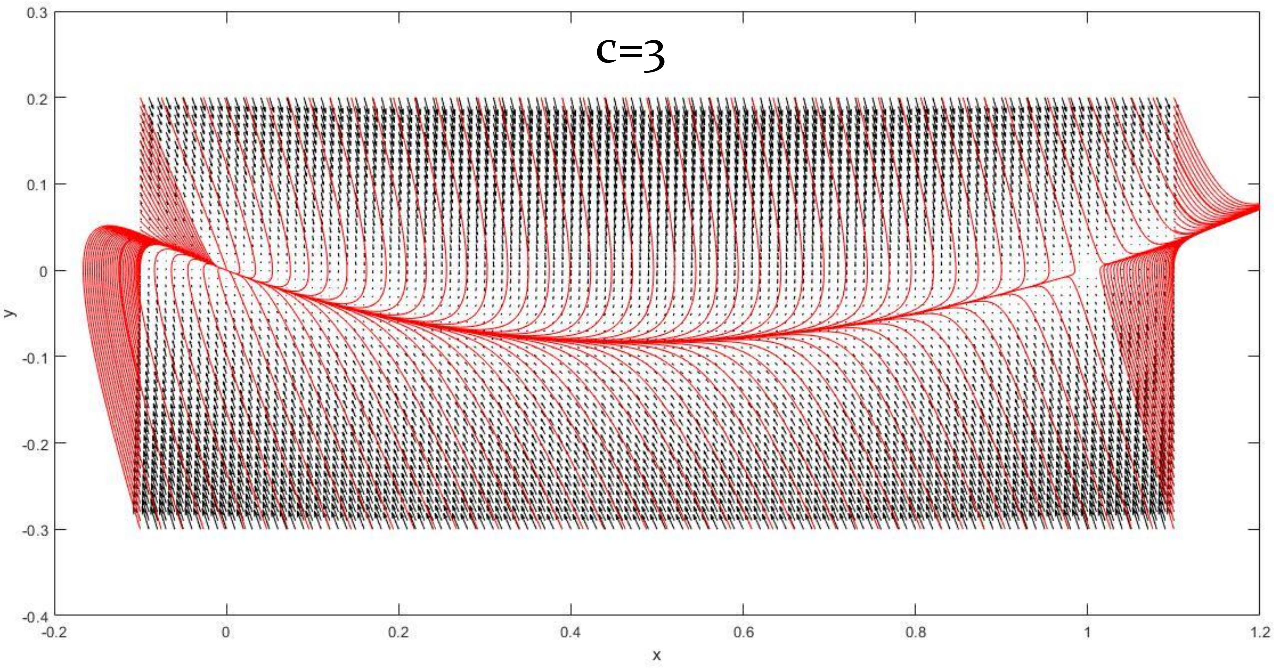
Fisher egyenlet

- **Feladat**: készítsük el a Fisher ODE rendszer fázisportréját az gyak09_Fisher_fazisportre_feladat.m fájlt kiegészítve. (Fisherrajzok.pdf 1. ábrájának reprodukciója)



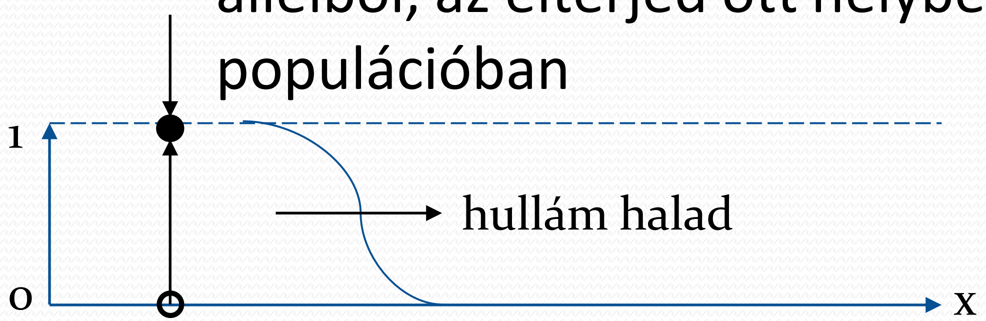
Fisher egyenlet

- **Feladat**: készítsük el a Fisher ODE rendszer fázisportréját az gyak09_Fisher_fazisportre_feladat.m fájlt kiegészítve. (Fisherrajzok.pdf 1. ábrájának reprodukciója)



Fisher egyenlet

- PDE: $-c\varphi' = \varphi(1-\varphi) + \varphi''$
  - c= hullám sebességi együtthatója
  - φ= előnyös allél gyakoriság [0 1]; φ''= diffúziós terjedés
- 2 egyensúlyi helyzet (utazó hullám ezeket köti össze) :
  - φ=0: instabil, taszít környezetéből
  - φ=1 : stabil vonzó
  - -> ha megjelenik akármilyen kis mennyiség az előnyös allélból, az elterjed ott helyben, és szétterjed az egész populációban



Fisher egyenlet

- Mi befolyásolja a hullám sebességét és a hullámfront alakját? Állandó-e ez az alak?

Feladat:

- Implementáld a parciális Fisher egyenletet a gyak09_Fisher_feladat.m kódban (0 flux peremfeltétellel)!
- Hogyan függ a hullám sebessége és alakja a c és D (diffúziós konstans) paraméterektől? (Az egyenlet diffúziós részéért lásd a 2. gyakorlat kódjait!)
- Hogyan függ a megoldás a kezdeti értékektől? (Próbáljatok ki különböző kezdeti értékeket különböző pozíciókban, különböző kezdeti eloszlásban, lásd a kód kommentjei!)
- Becsüld meg a hullám sebességét!
  - c_stabil= $2 * \sqrt{(c * D)}$
  - A numerikus számítás pontosságától függ mennyire sikerül ezt megközelíteni…
- További tippek, megjegyzések a kódban.

Fisher egyenlet

Megoldások, megfigyelések:

- Hogyan függ a hullám sebessége és alakja a c és D (diffúziós konstans) paraméterektől?
  - c és D határozza csak meg a sebességet (D-re numerikus felső limit (lásd diffúzió)!)
  - A hullám alakjára a D hatással van (nagyobb D, kevésbé meredek hullám)
  - A hullám sebessége és alakja kezdeti tranziens után stabilizálódik és utazik
- Hogyan függ a megoldás a kezdeti értékektől?
  - A hullámfront tipikus, a kezdeti értékektől, kezdeti hullám alaktól nem függ (a hullámfront függvénye stabil, széles attraktorban tart hozzá a rendszer)
  - Nagyobb ,kisebb kezdeti értékeknél is 1-re áll be a maximuma
  - A hullám mindkét irányba terjed

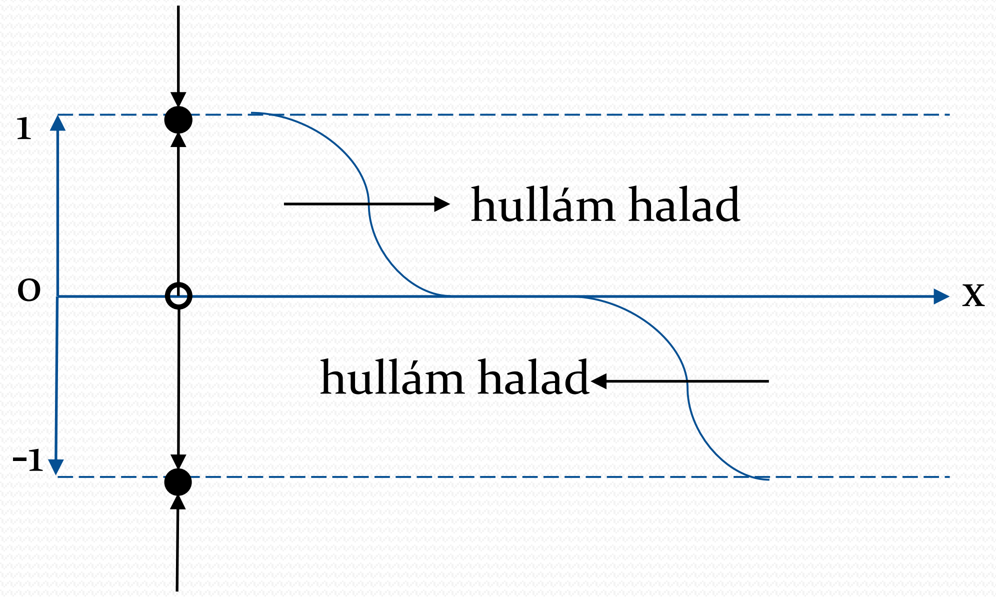
Fisher egyenlet

Megoldások, megfigyelések:

- Becsüld meg a hullám sebességét! Pl:
  - Megkeressük a hullámfront közepét (0.5), eltároljuk ennek az x pozícióját
  - Egy stabil tartományom belül (nem a tranzienseknél) nézzük mennyit ment a 0.5 pont adott idő alatt
  - Az időbeli felbontás (dt) hatással van a pontosságra!

Fisher egyenlet kiterjesztése

- PDE: $-c\varphi' = \varphi(1 - \varphi^2) + \varphi''$
  - φ ∈ [-∞,+ ∞]; negatív értékek is lehetnek ebben az esetben
- 3 egyensúlyi helyzet (utazó hullám ezeket köti össze) :
  - φ=0: nyeregpont
  - φ=1 : stabil vonzó
  - φ=-1 : stabil vonzó
  - -> bistabil rendszer:
    - + értékek 1-hez;
    - - értékek -1-hez tartanak



Fisher egyenlet kiterjesztése

Feladat:

- Implementáld ugyanabba a kódba a 2. rendű Fisher egyenletet is!
- Figyeljük meg, hogy viselkedik a -1-es stabil ponthoz tartozó hullám, és mi történik a 2 hullámfront találkozásánál!
- Tipp: néhány érdekes paraméterei eset a kódban.

Fisher egyenlet kiterjesztése

Megoldások, megfigyelések:

- Figyeljük meg, hogy viselkedik a -1-es stabil ponthoz tartozó hullám?
  - Mindkét stabil pont hasonlóan viselkedik
- Mi történik a 2 hullámfront találkozásánál?
  - A pontok vagy a +1-be vagy a -1-be tartanak, onnan már nem mozdíthatók el
  - Éles határ alakul ki a 2 stabil pont közt
  - A pontokat a szomszédjaik is „húzzák magukhoz"
  - 2 stabil pont összjátéka

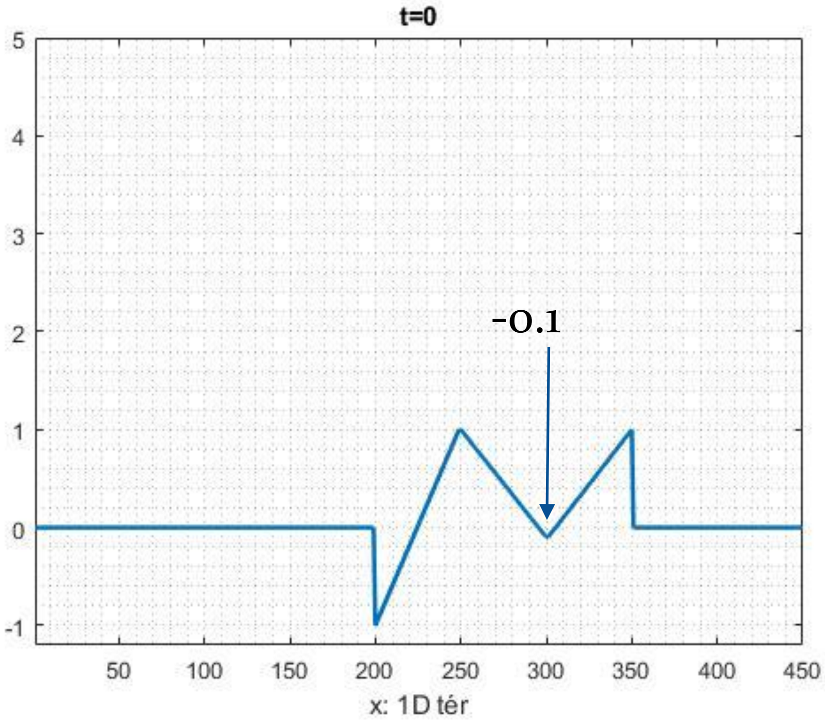
Fisher egyenlet kiterjesztése

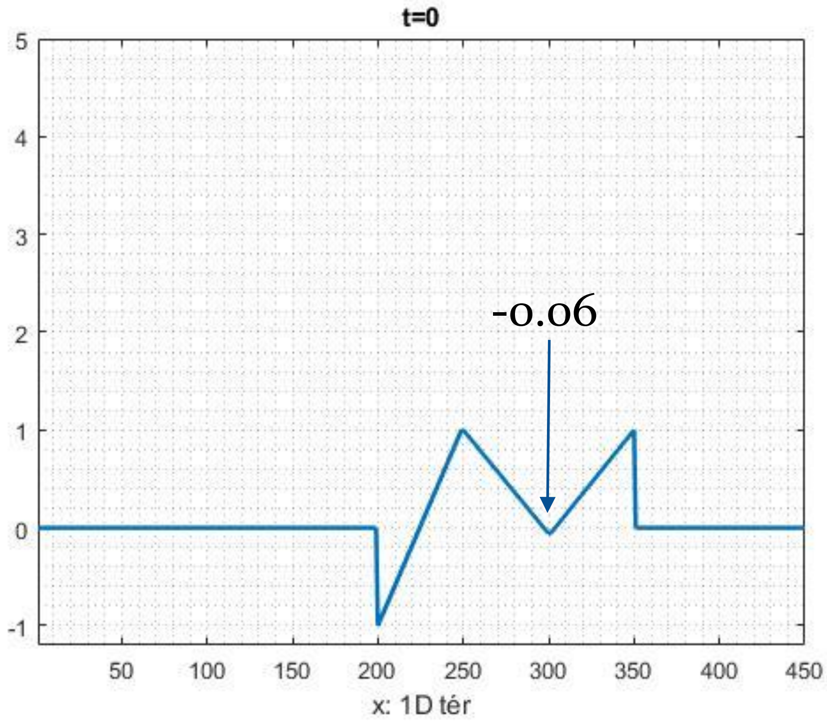
Megoldások, megfigyelések:

- Mi történik a 2 hullámfront találkozásánál?
  - Lassú folyamatok, Mi a stabil állapot, mikor értük el?
  - **Metastabilitás**: a rendszer mozdulatlannak, stabilnak tűnik hosszú ideig, egyszer csak hirtelen megváltozik (pl: az analitikus megoldás ellentmondani látszik a numerikusnak -> amit numerikusan látunk az csak egy hosszú metastabil átmeneti, tranziens állapot, egyszer a rendszer beáll az analitikus megoldás sugallta állapotba)
  - Nehezen vizsgálható problémák…
  - Sok biológiai jelenség is gyanúsan metastabil (emlékek, agyi asszociációs hálózatok is talán)…

Fisher egyenlet kiterjesztése

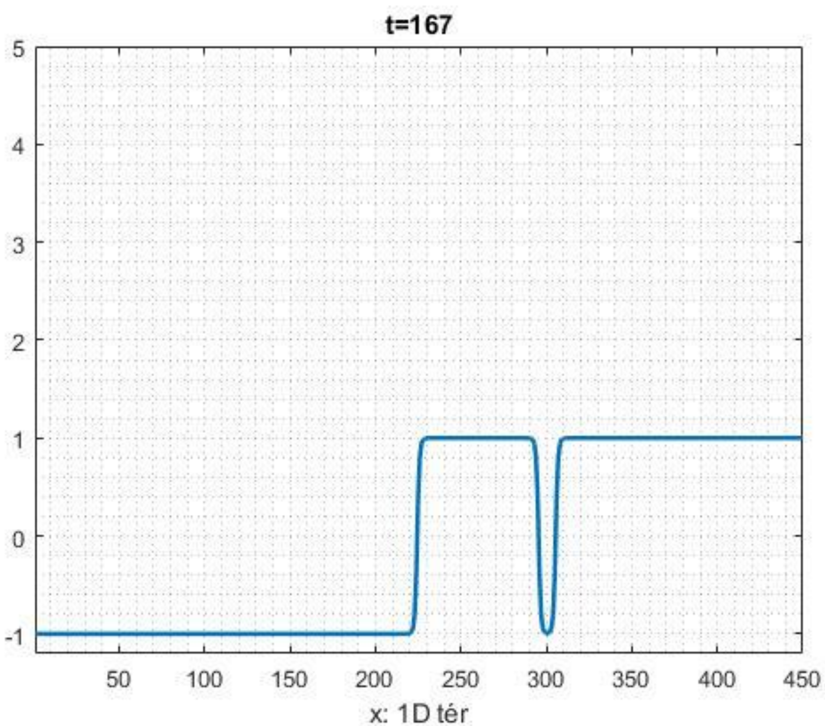
Megoldások, megfigyelések:

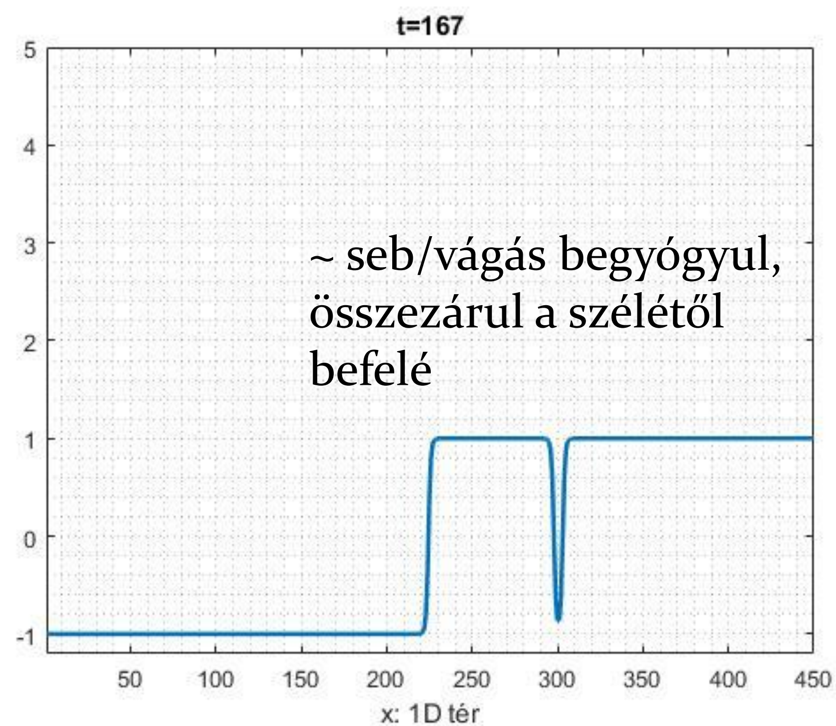




Fisher egyenlet kiterjesztése

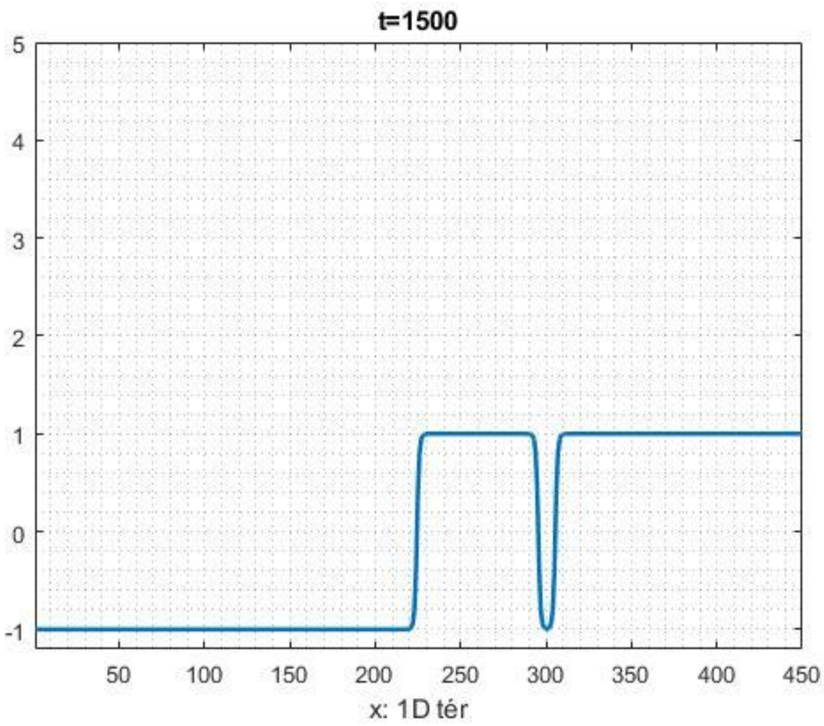
Megoldások, megfigyelések:

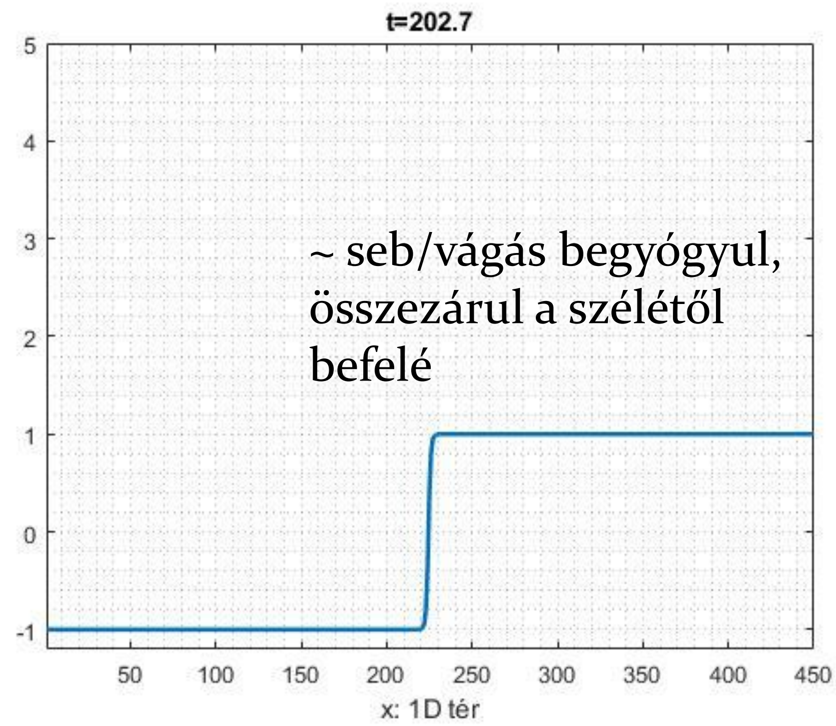




Fisher egyenlet kiterjesztése

Megoldások, megfigyelések:



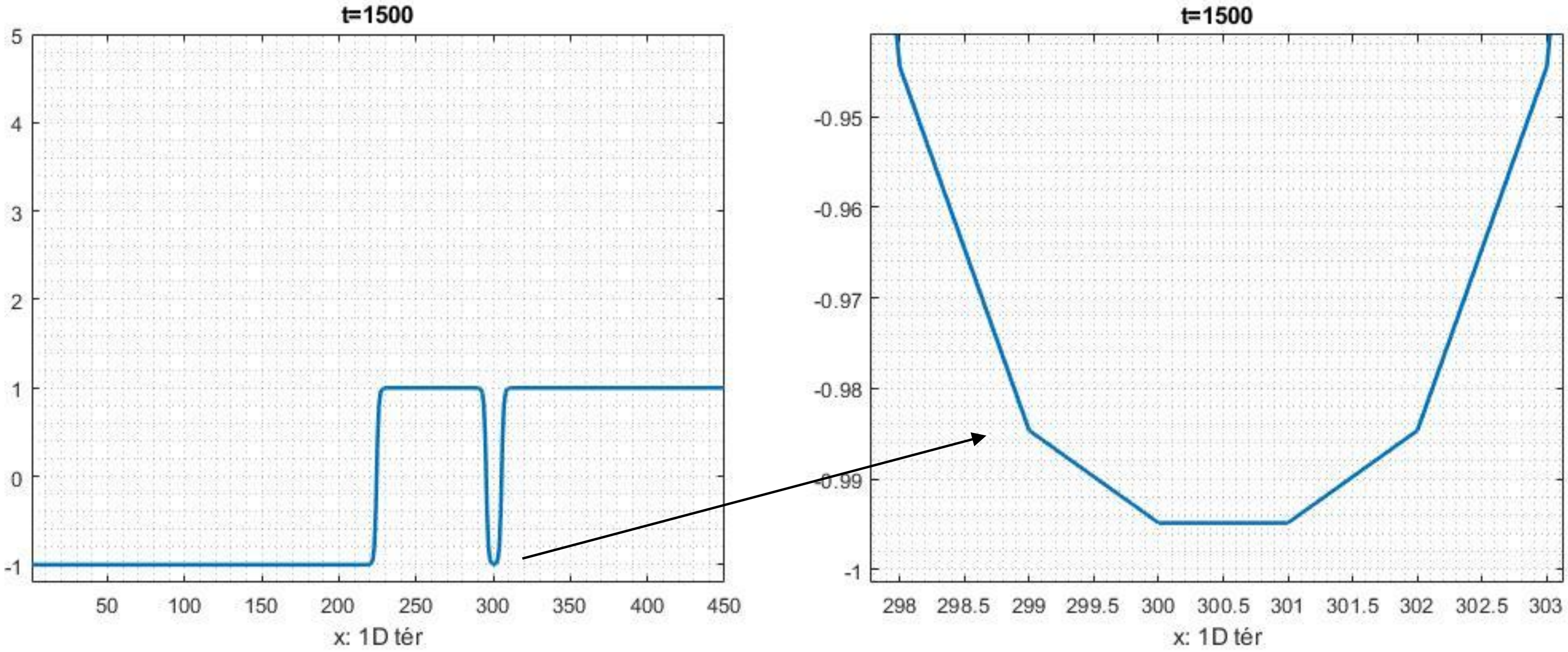


~ seb/vágás begyógyul, összezárul a szélétől befelé

Fisher egyenlet kiterjesztése

Megoldások, megfigyelések:

Stabil vagy metastabil???



SI modell utazóhulláma

- Lásd: SIR_grafok_utazohullam_teljes…pdf 16-18. oldal
- (mint SIR, csak a felépültekkel/meghaltakkal nem foglalkozunk az egyszerűség kedvéért)

$$\dot{S} = -\tau SI + S_{xx} \quad , \quad \dot{I} = \tau SI - I + I_{xx} \quad , \quad \text{ahol} \quad S, I \geq 0$$

- Utazó hullámmal: plusz diffúziós tag a hullám haladásáért (S_{xx}, I_{xx})
- 2 PDE rendszere:

$$-c\varphi' = -\tau\varphi\eta + \varphi'' \quad , \quad -c\eta' = \underbrace{\tau\varphi\eta - \eta}_{} + \eta''$$

- Egyenletek numerikusan:

ϕ(t+1,i)= ϕ(t,i)+c*dt*(- τ) * ϕ(t,i)*η(t,i)+D*dt/(dx^2)*(ϕ(t,i-1)-2*ϕ(t,i)+ϕ(t,i+1))

η(t+1,i)= η(t,i)+c*dt*η(t,i)*(τ* ϕ(t,i)-1)+D*dt/(dx^2)*(η(t,i-1)-2* η(t,i)+ η(t,i+1))

  - ϕ= fertőzhető (S); η= fertőzött(I); τ= fertőzési ráta;
  - c= hullám sebesség; D= diffúziós állandó;
  - dt= időbeli felbontás; dx= térbeli felbontás; t= időpont; i= térbeli pont
  - ϕ(t,i)+η(t,i)=1; τ >0; c>0; D>0
  - Zero flux peremfeltétel
  - Kezdetei állapot: kevés fertőzött, a többiek fertőzhetők

SI modell utazóhulláma

- Példa paraméterek:
  - dt= 0.1; tmax=150;
  - dx= 1; x=[1;1000]; zero flux peremfeltétel
  - τ= 2; c= 1; D= 4;
  - Kezdeti állapot: t=1
    - η(t,i=1)=0.1; η(t,2:end)=0; ϕ(t,:)=1-η(t,:);

    -> kevés fertőzött, a többiek fertőzhetők

Feladat:

- Implementáld a (Fisher egyenlet mintájára) az SI utazóhullámot a gyak09_SI_hullam_feladat.m kódba!
- Hasonlít-e és hasonlóan viselkedik-e ez a hullám a Fisher hullámhoz (alakja, sebessége, függése a paraméterektől, kezdeti értékektől)?

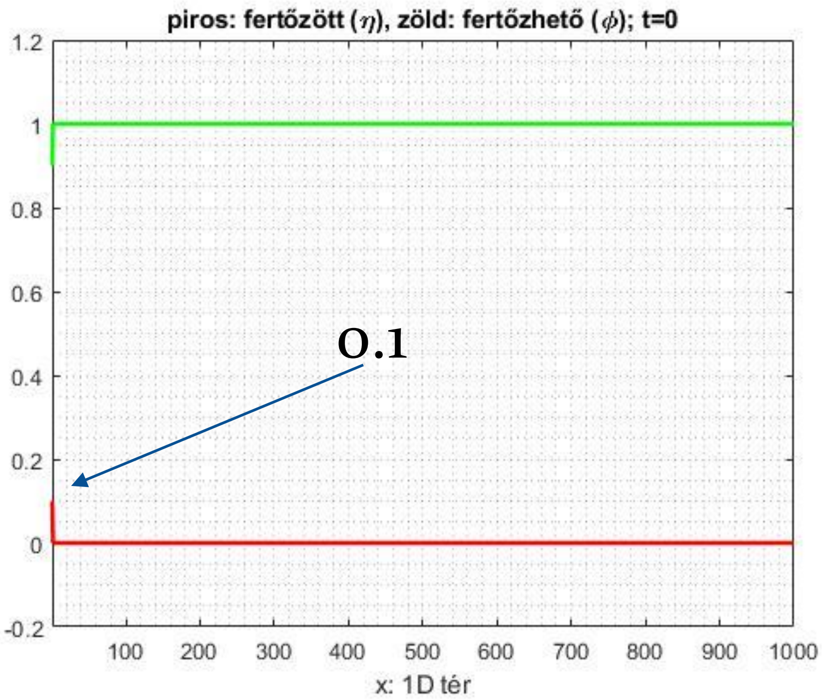
SI modell utazóhulláma

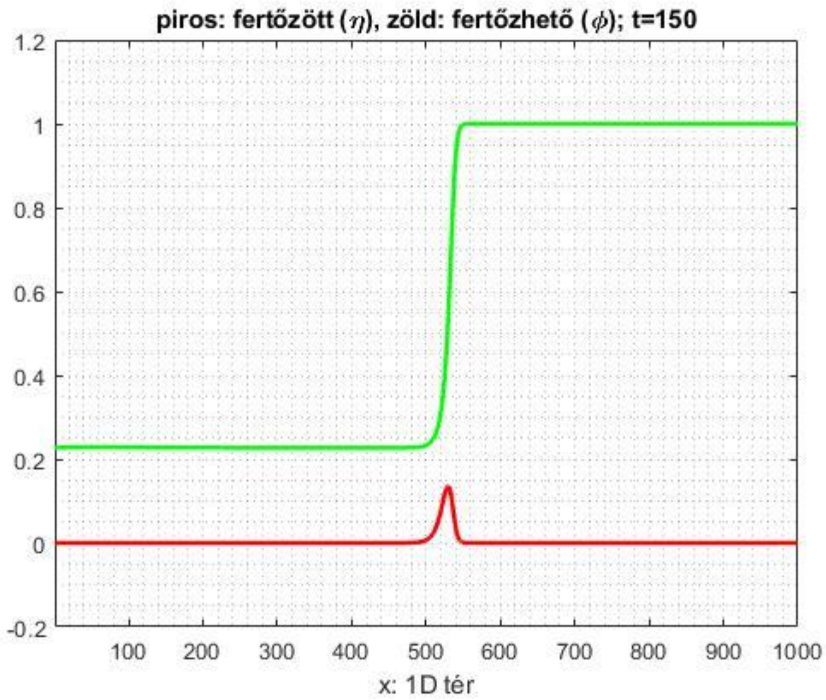
Megoldások, megfigyelések:

- Hasonlít-e és hasonlóan viselkedik-e ez a hullám a Fisher hullámhoz (alakja, sebessége, függése a paraméterektől, kezdeti értékektől)?
  - A fertőzhetőek mennyiségének alakulásában hasonló tulajdonságú hullámokat kapunk, mit a Fisher példában.

SI modell utazóhulláma

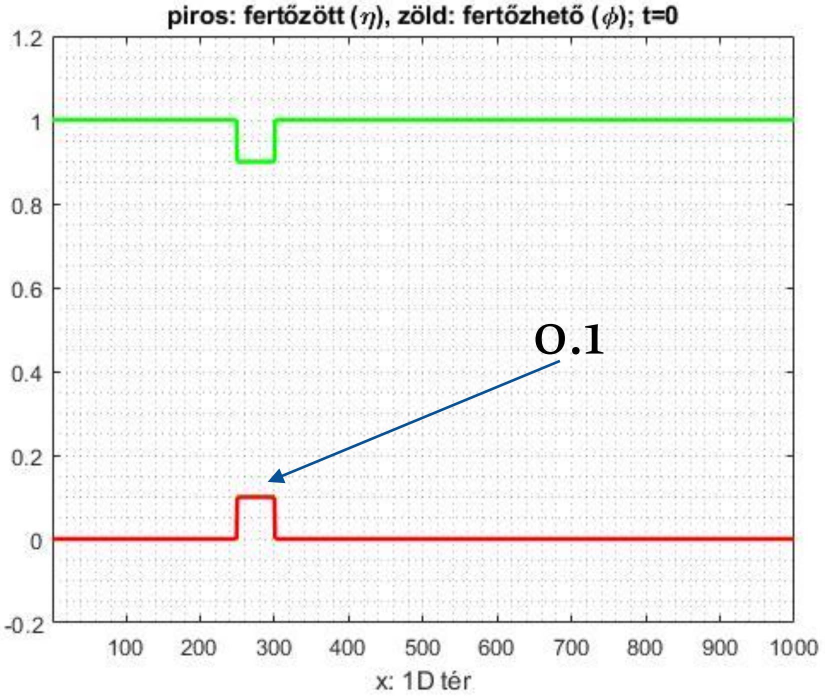
Megoldások, megfigyelések:

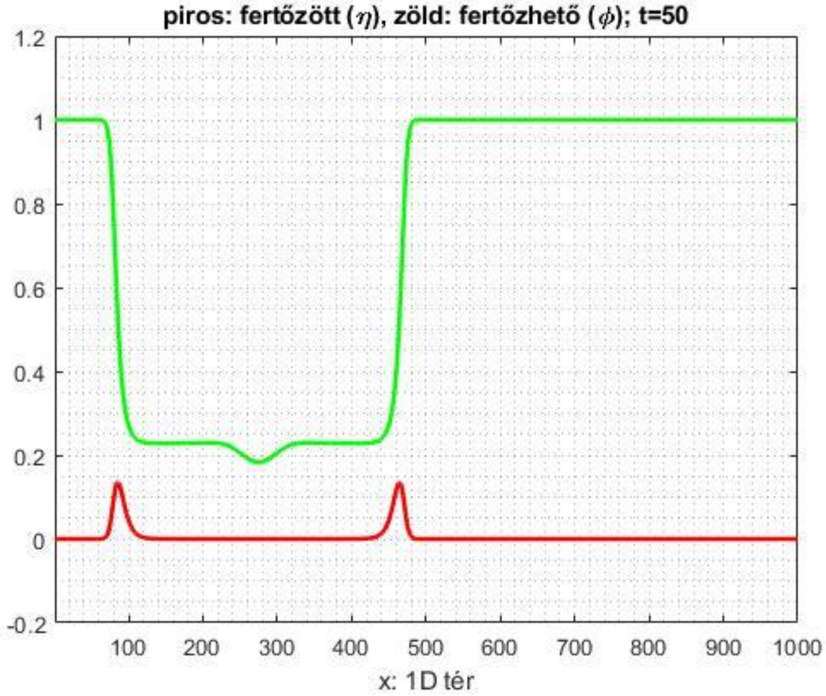




SI modell utazóhulláma

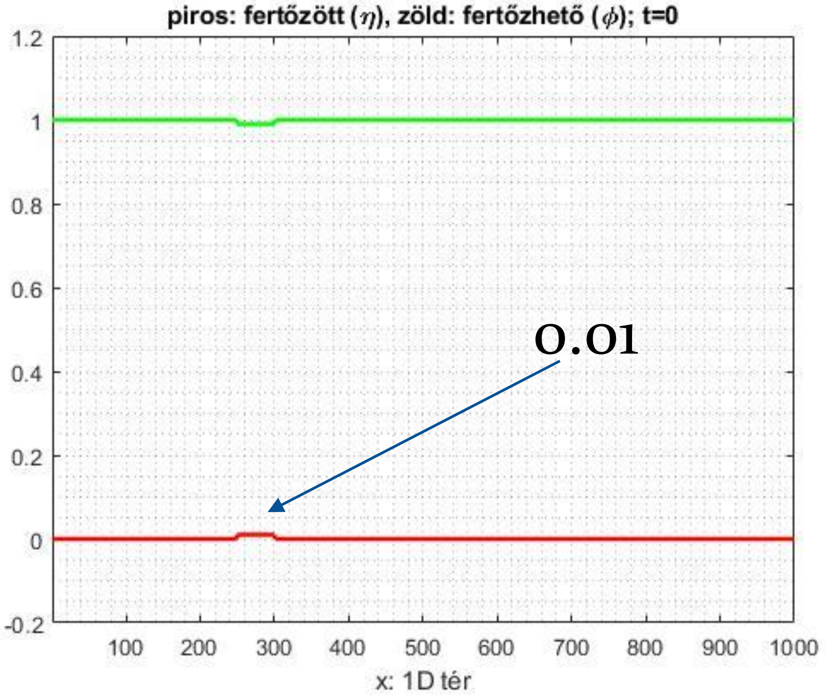
Megoldások, megfigyelések:

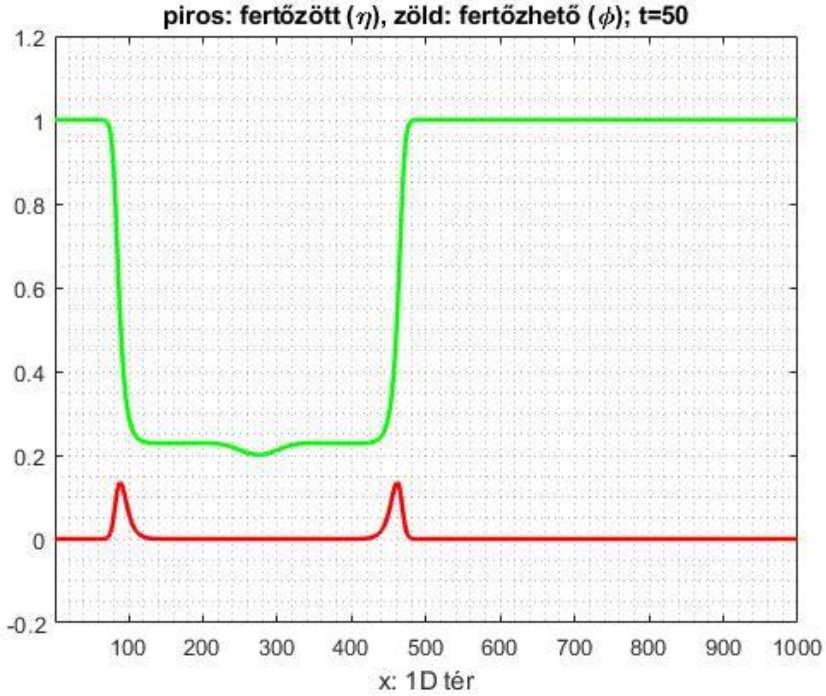




SI modell utazóhulláma

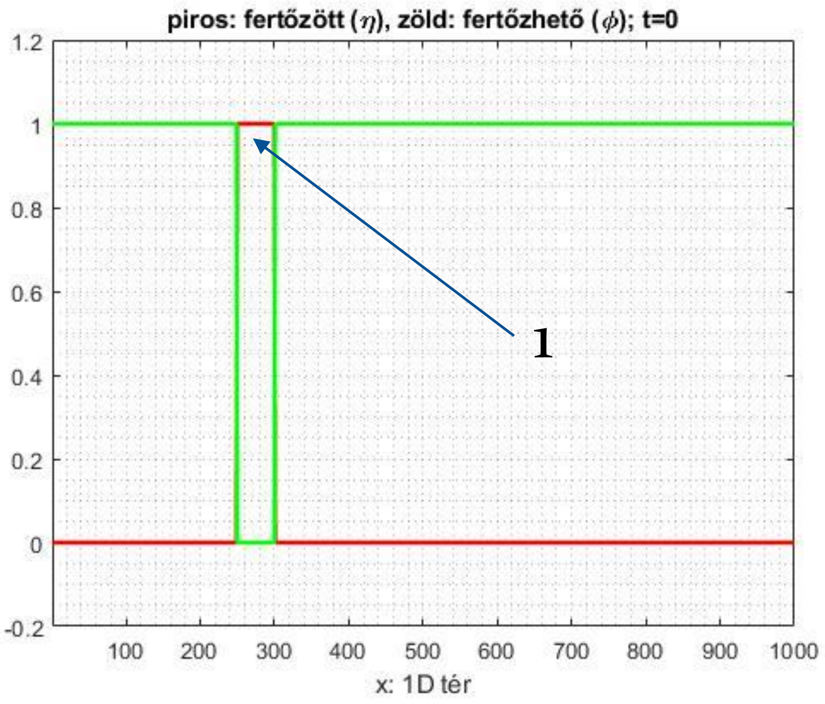
Megoldások, megfigyelések:

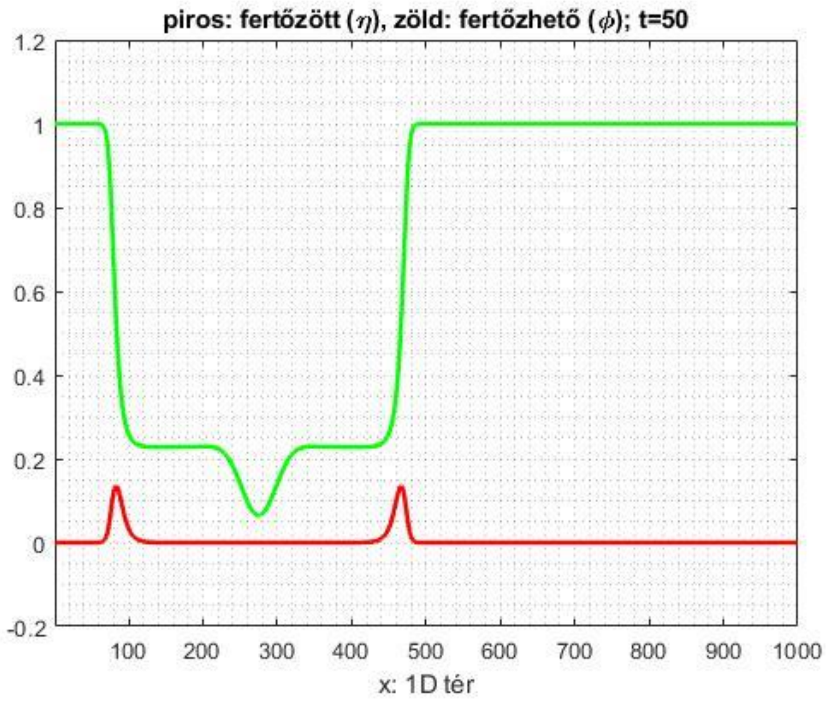




SI modell utazóhulláma

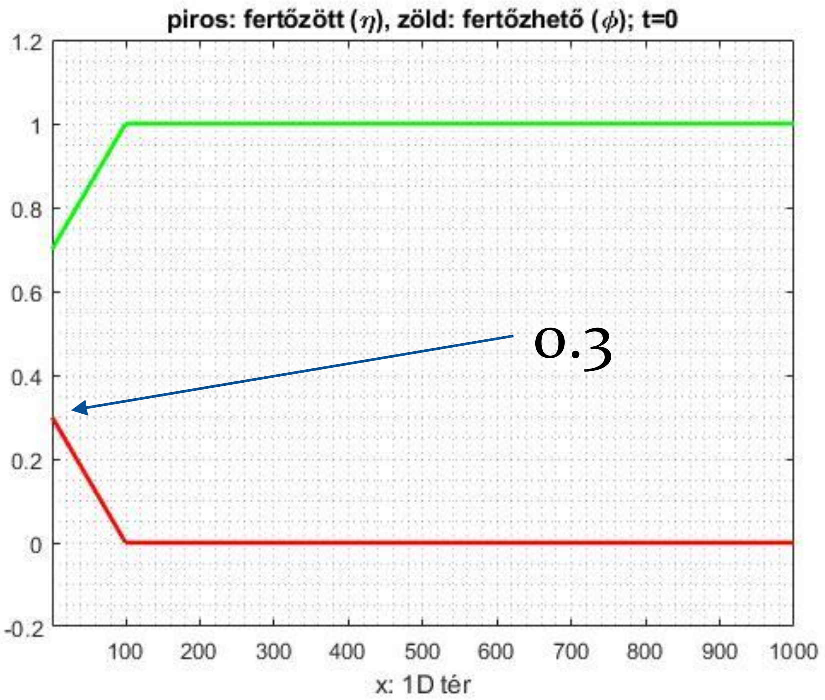
Megoldások, megfigyelések:

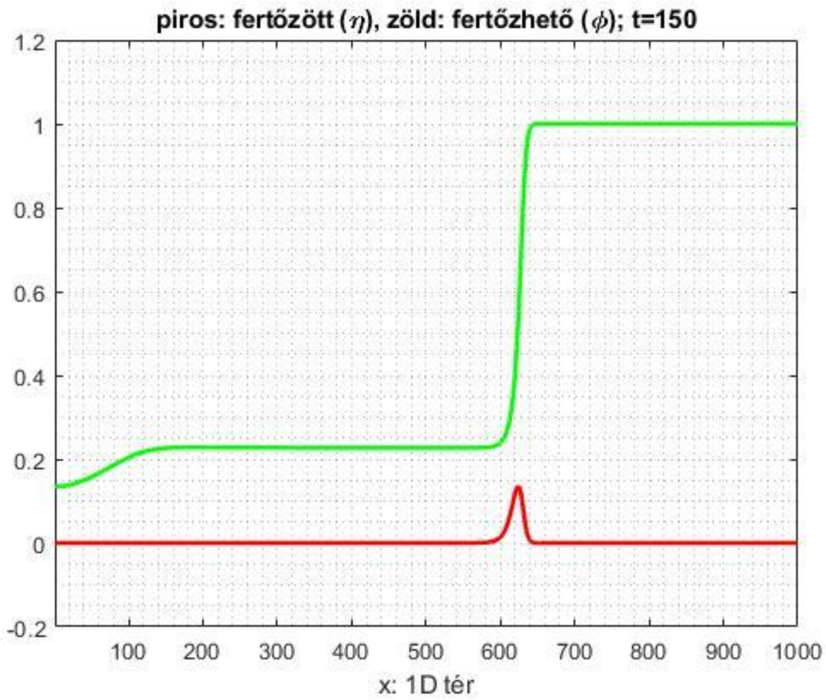




SI modell utazóhulláma

Megoldások, megfigyelések:





SI modell utazóhulláma

Megjegyzések:

- Klasszikus modell a pestis terjedésére
- Komplexebbé is tehető, pl:
  - Külön egyenletek a hordozó patkányokra, bolhákra (más paraméterekkel) (még több dimenziós probléma)
  - Ezeknek is lesznek hullámfrontjaik, gyorsabban terjednek, az eddigi (emberi) frontoknál, hamarabb is lecsengenek
  - Az emberek is hamarabb betegednek meg a hordozók frontjaitól…

Szorgalmi: eddig 1D-s hullámfrontokkal foglalkoztunk.

- Az SI utazóhullám kiterjeszthető 2D-be is, ekkor a 2 gyakorlattal ezelőtti sejtautomata példához hasonló frontok várhatóak.