Nemlineáris Dinamikai Modellek a Biológiában

Lotka-Volterra populáció modell, Bifurkáció

6. gyakorlat

Juhász János (juhasz.janos@.itk.ppke.hu)
Schäffer Katalin (sch.katalin17@gmail.com)

Populáció dinamika

- Modell kémiai oszcillációkra, ragadozó (y) és prédájának (x) együttélésére:

$dx=x*(\alpha-\beta*y)$

$dy=y*(-\gamma+\delta*x)$

Természetes szaporulat
Természetes halál
Fajok közti interakció (itt predáció)

- Az egyenletek megmondják, hogy adott kiindulási x és y mellett hogyan alakul az egyes fajok egyedszáma.
- A kezdeti értékektől függő stabil oszcilláció alakul(hat) ki a 2 faj mennyiségében.

Dinamikai rendszerek elemzése az egyensúlyi pontok közelében (lokális fázisportrék)

- Kérdések:
  - Hol vannak a rendszer egyensúlyi pontjai?
  - Milyen tulajdonságúak ezek a pontok?
  - Hogy viselkedik a rendszer a közelükben?
  - Meghatározható-e ez alapján a rendszer globális viselkedése? (Milyen kapcsolat van az egyes egyensúlyi pontok közt? Mi történik ezektől a pontoktól távol?)
- Példa: Lotka-Volterra egyenletek (más rendszerekre is hasonlóan…)

Dinamikai rendszerek elemzése az egyensúlyi pontok közelében (lokális fázisportrék)

- ***Hol vannak a rendszer egyensúlyi pontjai?***
  - **Egyensúlyi pont ott van, amely pontból a rendszer nem mozdul ki, tehát ahol pl. dx=0 ÉS dy=0**
  - **(Lásd: 4. gyakorlaton elhangzottak)**

Dinamikai rendszerek elemzése az egyensúlyi pontok közelében (lokális fázisportrék)

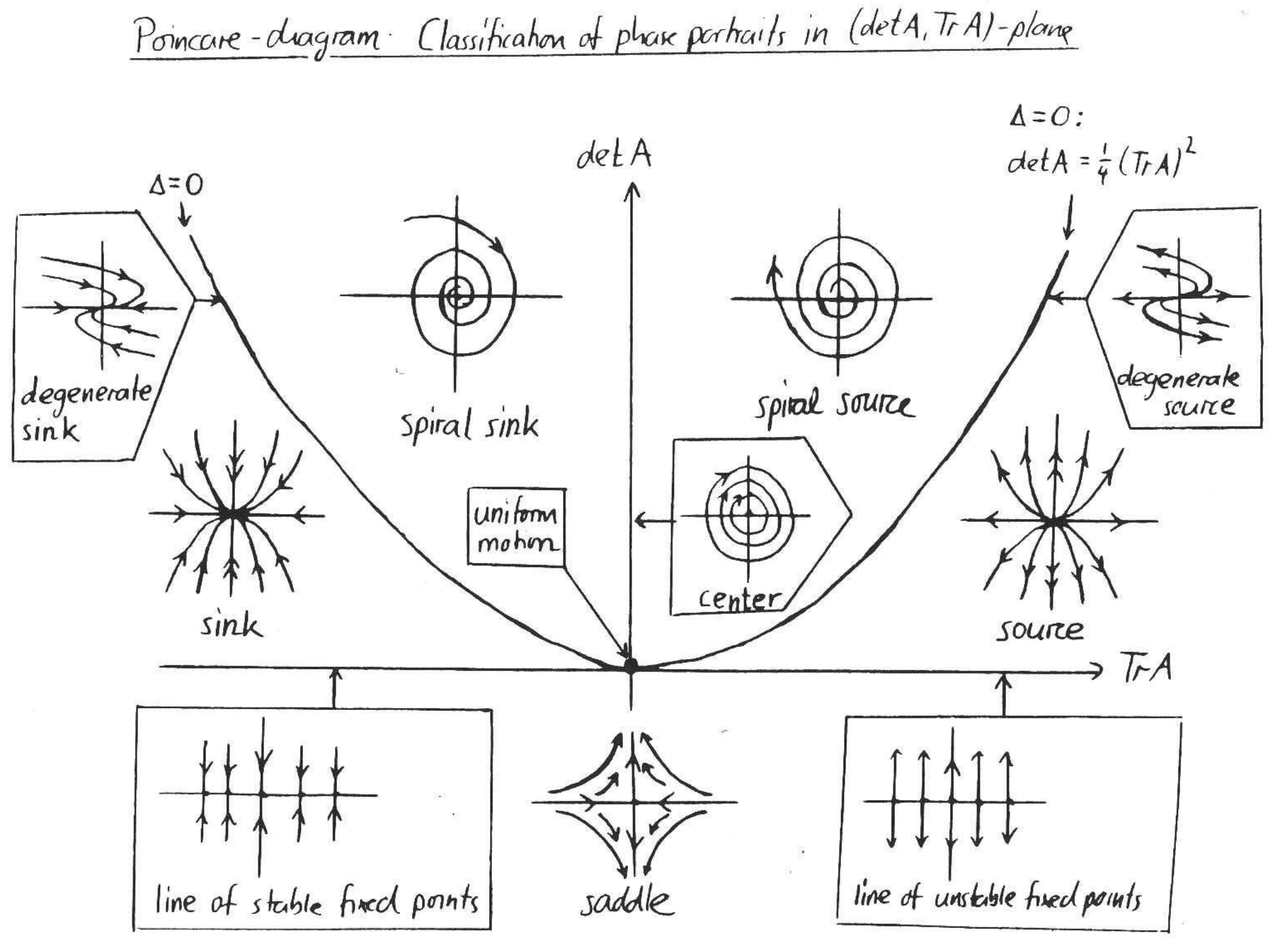
- ***Milyen tulajdonságúak ezek a pontok?***
- ***Hogy viselkedik a rendszer a közelükben?***
  - **A Jacobi mátrix utal a viselkedésre (a lehetséges deriváltak kiszámolásával linearizáljuk a rendszert -> egyszerűsítés!) :**

    [dx x szerint deriválva, dx y szerint deriválva;
    dy x szerint deriválva dy y szerint deriválva]
  - **A J mátrixba behelyettesítve az egyensúlyi pontok (x, y) koordinátáit megtudjuk, hogy az adott pont közelében hogyan viselkedik a rendszer**

Dinamikai rendszerek elemzése az egyensúlyi pontok közelében (lokális fázisportrék)

- **2 lehetséges módszer van a Jacobi mátrix vizsgálatával a lokális dinamika meghatározására:**
  - **A: Számítsuk ki a kapott Jacobi mátrix nyomát (T, trace) és determinánsát (D)**
    - **A kapott T,D pontot elhelyezve a nyom-determináns ábrán megkapjuk az egyensúlyi pont típusát**

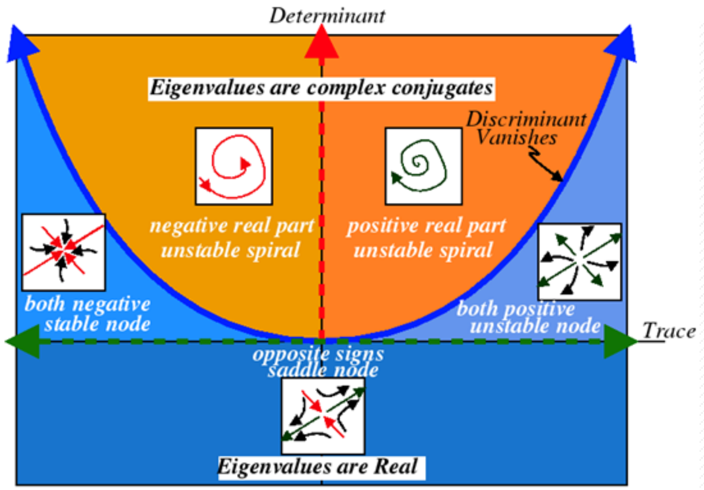
Egyensúlyi pontok osztályozása Nyom-determináns diagram



Egyensúlyi pontok osztályozása Nyom-determináns diagram

$$\left.\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad p(\lambda)=\lambda^2-T\lambda+D,\ \text{ahol}\ \ T=a+d\ ,\ \ D=ad-bc$$

- instabil fókusz $\Leftrightarrow$ $T>0$ & $D>\frac{T^2}{4}$
- instabil csomó $\Leftrightarrow$ $T>0$ & $0<D<\frac{T^2}{4}$
- nyereg $\Leftrightarrow$ $D<0$
- stabil csomó $\Leftrightarrow$ $T<0$ & $0<D<\frac{T^2}{4}$
- stabil fókusz $\Leftrightarrow$ $T<0$ & $D>\frac{T^2}{4}$



Az átmeneti esetek közül a legfontosabb

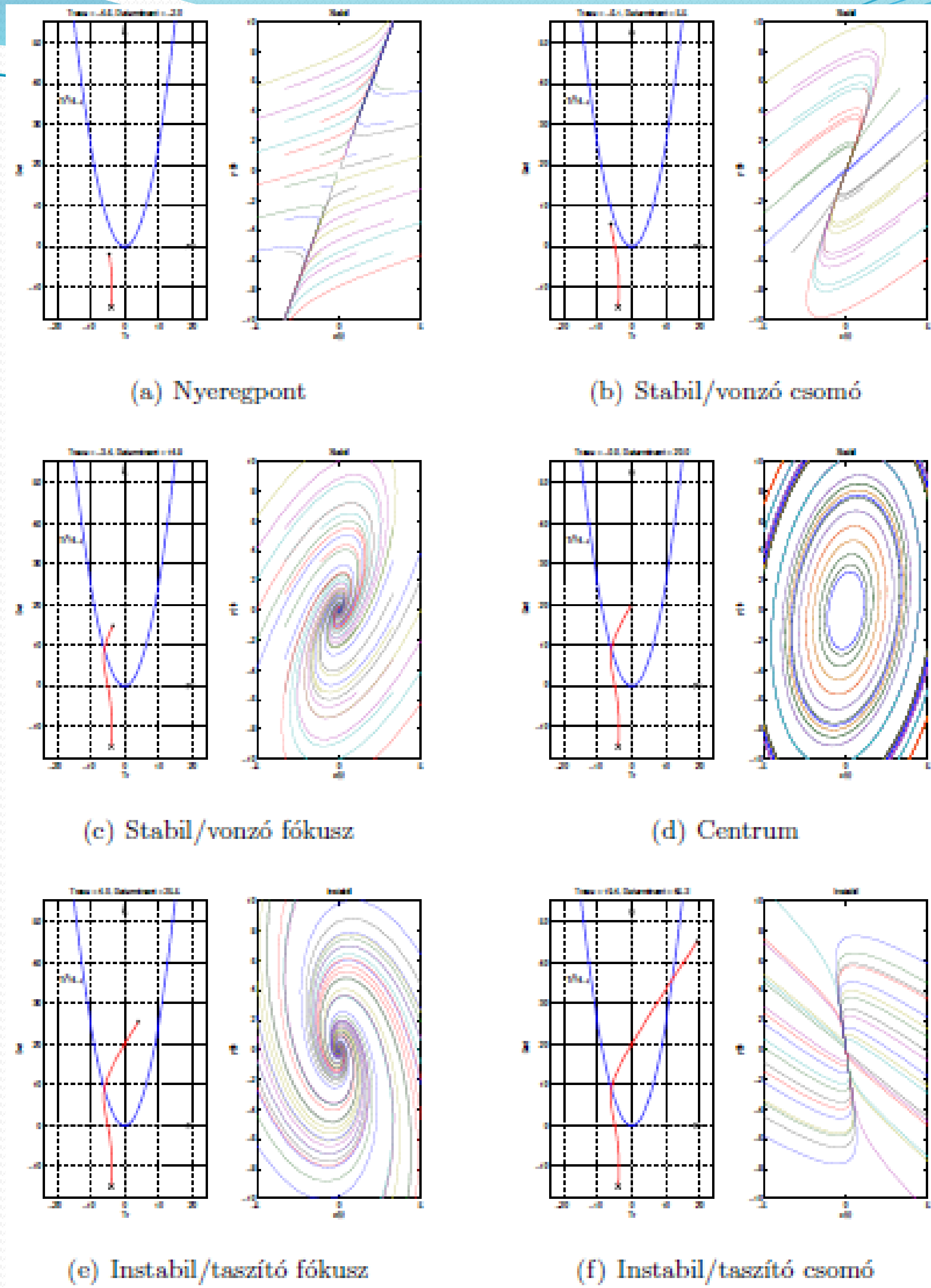
- centrum $\Leftrightarrow$ $T=0$ & $D>0$ — stabilitás vonzás nélkül .

Az aszimptotikus stabilitás ($\Leftrightarrow$ stabilitás & vonzás) jellemzése:

- stabil csomó vagy stabil fókusz $\Leftrightarrow$ $T<0$ & $D>0$
- átfogalmazás: $p(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_0$, ahol $a_1>0$ & $a_0>0$

- **Nyeregpont**: negatív determináns
- **Vonzó, stabil egyensúlyi pont:** pozitív determináns, negatív nyom
- **Taszító, instabil egyensúlyi pont** (a közeléből „szöknek” a trajektóriák csak maga a pont egyensúly): pozitív determináns, pozitív nyom
- **Csomó**: 0<D<(T^2)/4
- **Fókusz**: D>(T^2)/4
- **Csomó vs fókusz**: fókusz esetén a pályák keringenek az egyensúlyi pont körül, míg csomónál „egyből”, a megkerülése nélkül odavonzódnak/ eltaszítódnak,

- **Lásd még**: Trace-det_abra.m kód
- És a szkennelt ábra a Wiki oldalon



(a) Nyeregpont (b) Stabil/vonzó csomó

(c) Stabil/vonzó fókusz (d) Centrum

(e) Instabil/taszító fókusz (f) Instabil/taszító csomó

Dinamikai rendszerek elemzése az egyensúlyi pontok közelében (lokális fázisportrék)

2 lehetséges módszer:

- A: Számítsuk ki a kapott Jacobi mátrix nyomát (T, trace) és determinánsát (D)
- **B: Számítsuk ki a J mátrix sajátértékeit**
  - **Pozitív sajátérték taszítást, a negatív vonzást jelent**

Dinamikai rendszerek elemzése az egyensúlyi pontok közelében (lokális fázisportrék)

- **Pl. 2D-s esetben**
- **Nyeregpont**: 1 negatív és egy pozitív sajátérték
- **Vonzó, stabil egyensúlyi pont:** 2 negatív sajátérték
- **Taszító, instabil egyensúlyi pont:** 2 pozitív sajátérték
- **Csomó vs. fókusz**: fókusz esetén a sajátértékeknek képzetes (Im) részük is van nem csak valós (Re)
- **Elfajuló esetek**: D=0, T=0, D=(T^2)/4, Re(sajátérték)=0 -> lásd: szkennelt ábra a Wiki oldalon
- **Lásd még**: Trace-det_abra.m

Dinamikai rendszerek elemzése az egyensúlyi pontok közelében (lokális fázisportrék)

- Kiegészítések:
- *Merre forog a fókusz?*
  - **Vegyünk egy pontok a fókusz közelébe, és számítsuk ki rá a dx-et és dy-t. A belőlük képzett gradiens vektor megmondja, hogy az adott pontból merre mozdul a rendszer. Ez megadja a forgásirányt.**
- *Hogyan néz ki a nyereg? (Merre vonz, merre taszít?)*
  - **Ha kiszámítjuk az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat, akkor a + sajátvektor irányában van taszítás, a – sajátvektor irányában vonzás.**

Dinamikai rendszerek elemzése az egyensúlyi pontok közelében (lokális fázisportrék)

- ***Meghatározható-e ez alapján a rendszer globális viselkedése? (Milyen kapcsolat van az egyes egyensúlyi pontok közt? Mi történik ezektől a pontoktól távol?)***
  - Nem automatikusan (linearizálással kaptuk a megoldásaink).
  - Segít a **tengelyek (x=0, y=0) mentén** vett viselkedés megállapítása
  - **Távoli pontok**ban a vektormező mutathat más irányba, mint az egyensúlyi pontok közelében. -> Tipp: **Vegyünk fel egy távoli pontot, számítsuk ki a (dx, dy) gradiens vektort.** (Ez a módszer a legtöbb esetben hasznos, hogy képet kapjunk mi is történik a rendszerben; önellenőrzésre is jó…)

Dinamikai rendszerek elemzése az egyensúlyi pontok közelében (lokális fázisportrék)

- Következtethetünk a globális fázisportréra, ha **meg tudunk adni olyan területeket a fázistérben, amelyek határain tudjuk a viselkedést** (és tudjuk, hogy a területen belül is folytonosak a pályák).
- Lásd: későbbi példa
- (Erre emlékezzünk, amikor később a Ljapunov függvényekről lesz szó, ott is ez a fontos trükk.)

- További részletek, esetek, módszerek, magyarázatok: Wiki -> **howToSketchAPhasePortrait.pdf**

Bifurkáció

- Intuitív megközelítés!
- **Minőségileg** (kvalitatívan) **változik meg a rendszer** valamely paraméter módosítására
- Nem csak kicsit megváltoznak a paraméterei (kvantitatív változások), hanem a természete lesz más
- Pl: stabil csomóból nyeregpont, vagy egy stabil pontból stabil pálya (sokaság) lesz (vagy fordítva)
- Többféle bifurkáció is létezik (ezekről később lesz szó)

Feladatok

I. Vizsgáljuk meg az alábbi rendszer viselkedését különböző "mu" paraméterek mellett!

- **dx=x*(1-x/2-y)**
- **dy=y*(mu-y-x)**
- x<=0 , y<=0 , 0<mu<3

- Lásd: gyak06_Lotka_Volterra_bifurkacio.m
- Milyen típusú rendszerről van szó? (figyeld a keresztcsatolásokat)
- Hol (milyen mu paraméter(ek) mellett) van bifurkációs pont?
- Milyen típusú egyensúlyi helyzetek képződnek, tűnnek el, alakulnak át egymásba?
- Hogyan függ a rendszer viselkedése a mu paramétertől (az y faj szaporodási rátájától)?
- Biológiailag/ökológiailag mit jelentenek az eredmények?

Feladatok

II. Vizsgáljuk meg a korábbi rendszert az x>=0, y>=0 tartományon kívül is!

- Lásd: gyako6_Lotka_Volterra_trace_det_bifurkacio.m
- Ábrázoljuk a rendszer vektormezőjét az x eleme [-4,4] és az y eleme [-4,4] tartományon!
- Jelöljük az N=(2*mu-2; 2-mu) egyensúlyi pont Jacobi mátrixához tartozó Trace és Determináns értéket a T-D ábrán!

- Ez a howToSketchAPhasePortrait.pdf 13.oldal 7. feladat.

III. A 14. oldalon a levezetésben van 2 számítási hiba. Aki ezt észreveszi és megírja a jó értékeket a Tanárúrnak, az jópontokra számíthat.

Megoldások

dx=x*(1-x/2-y)

dy=y*(mu-y-x)

- **Versengés** (negatív keresztcsatolás, mindkét fajnak kárára van a másik, pl: mindketten ugyanazt eszik)
- Jacobi mátrix paraméteresen: $J = \begin{pmatrix} 1-x-y & -x \\ -y & \mu-2y-x \end{pmatrix}$
- dx=0 ÉS dy=0 esetén a 4 egyensúlyi pont és a J mátrix ezekben a pontokban:

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 2\mu-2 \\ 2-\mu \end{pmatrix}$$

$$J(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad J(P) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \mu-2 \end{pmatrix} \quad J(Q) = \begin{pmatrix} 1-\mu & 0 \\ -\mu & -\mu \end{pmatrix} \quad J(N) = \begin{pmatrix} 1-\mu & 2-2\mu \\ \mu-2 & \mu-2 \end{pmatrix}$$

Megoldások

- Az O, P, Q egyensúlyi pontok a tengelyeken vannak: azt mutatják meg, mi történik, ha csak az egyik faj van jelen
  - a faj mennyisége beáll egy a szaporodási és a halálozási rátától függő szintre
- Az N pont a legérdekesebb: ekkor mindkét faj jelen van kezdetben a közösségben
- Változtassuk a mu paramétert 0 és 3 közt:
  - 0<mu<1 : minden megoldás a P-hez tart: y faj eltűnik, x beáll egy stabil szintre -> az x kiszorítja az y-t
  - 1<mu<2 közt : P, Q stabil egyensúlyi pontok, N nyeregpont: a kezdeti x,y aránytól függ, melyik faj szorítja ki a másikat (lásd: múlt óra)
  - 2<mu : minden megoldás a Q-hoz tart: x faj eltűnik, y beáll egy stabil szintre -> az y kiszorítja az x-et
  - **mu=1 és mu=2 a bifurkációs pontok**: ekkor keletkezik és tűnik el a nyeregpont (a vizsgált tartományban)

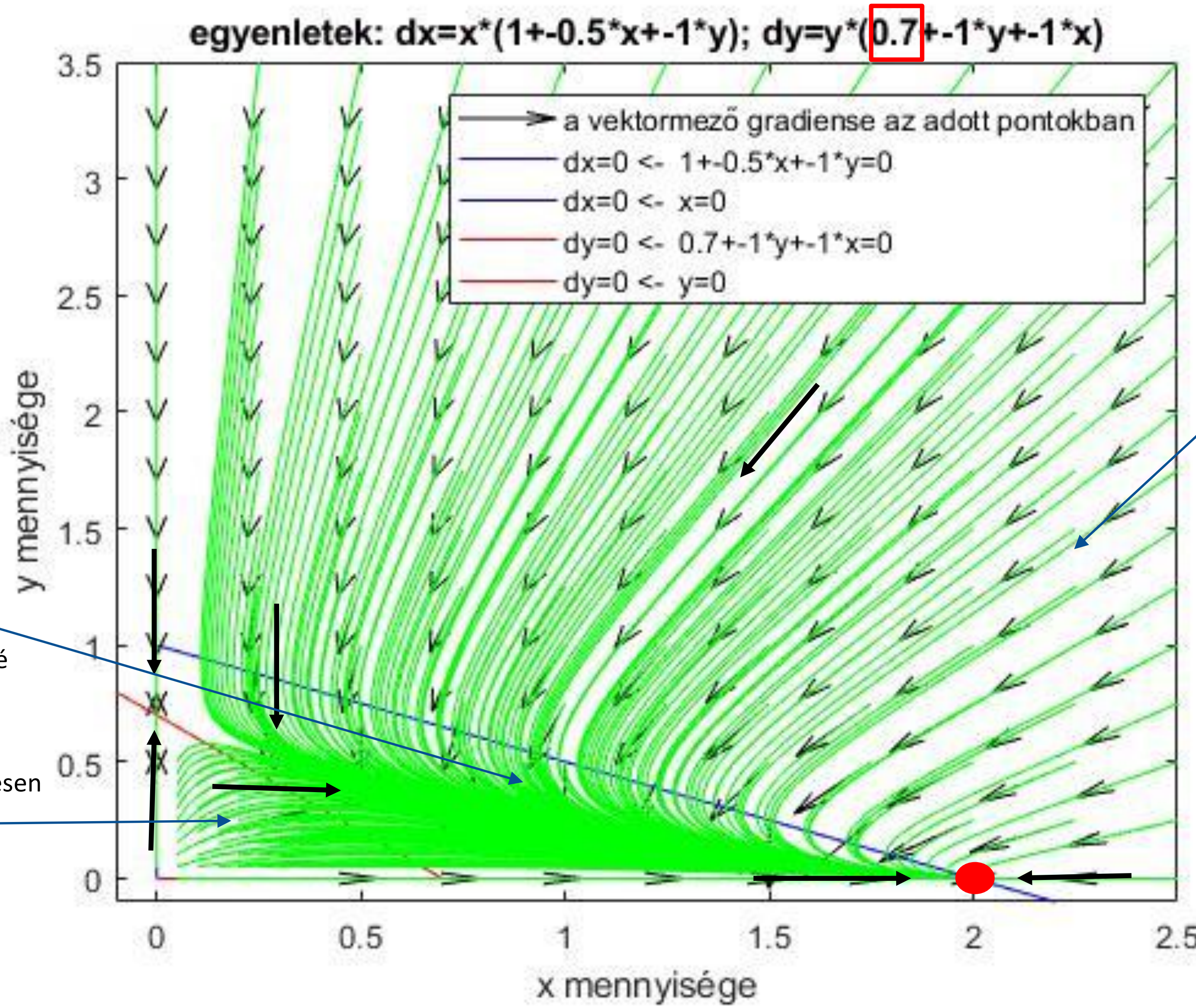
Megoldások

- **Biológiai jelentés**: mu=y szaporodási ráta
  - <u>mu<1</u>: az y mindenképp kihal, mert gyorsabban hal meg, mint ahogy szaporodna (-1 a halálozási ráta)
  - <u>mu>2</u>: az y sokkal gyorsabban nő az x-nél (1 a szaporodási rátája), mindig ő nyeri a versengést
  - <u>1<mu<2</u>: kiegyenlített a verseny, a kezdeti helyzet determinálja a végkifejletet (élet és halál szeparáló görbéje alapján, lásd: múlt hét)

Megoldások

- Vegyük észre, hogy
  - a dx=0 egyeneseket függőlegesen,
  - a dy=0 egyeneseket vízszintesen metszik a trajektóriák,
- Így **a fázistér felosztható olyan területekre** (kis háromszögek, négyszögek), **amik határain tudjuk a viselkedést**, és amiken belül a rendszer folytonosan változik (kis változás a paraméterekben -> kis változás a megoldásban)
- Ezeket a peremfeltételeket figyelembe véve (plusz a nagyon messzi pontban a gradiens irányát is) **a lokális** (egyensúlyi pont közeli) **fázisportrékból megalkothatjuk a globálist** (egész fázistérre vonatkozót) is

Megoldások

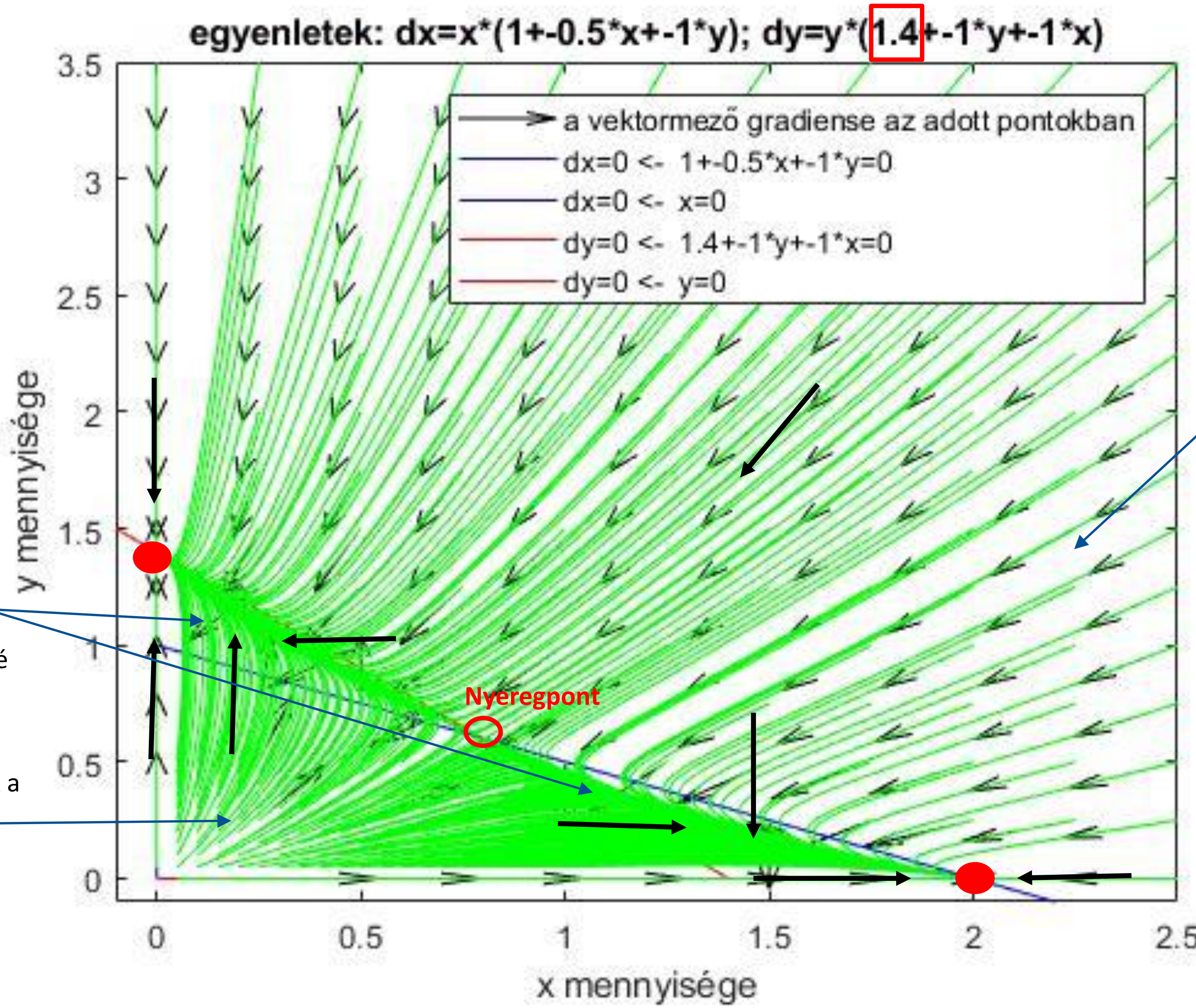


Innen az egyensúlyi pontba megy vagy lefelé elhagyja

Ezt a régiót nem tudják elhagyni a trajektóriák, az egynsúlyi pont felé tartanak benne

Innen vízszintesen távoznak a megoldások

Megoldások

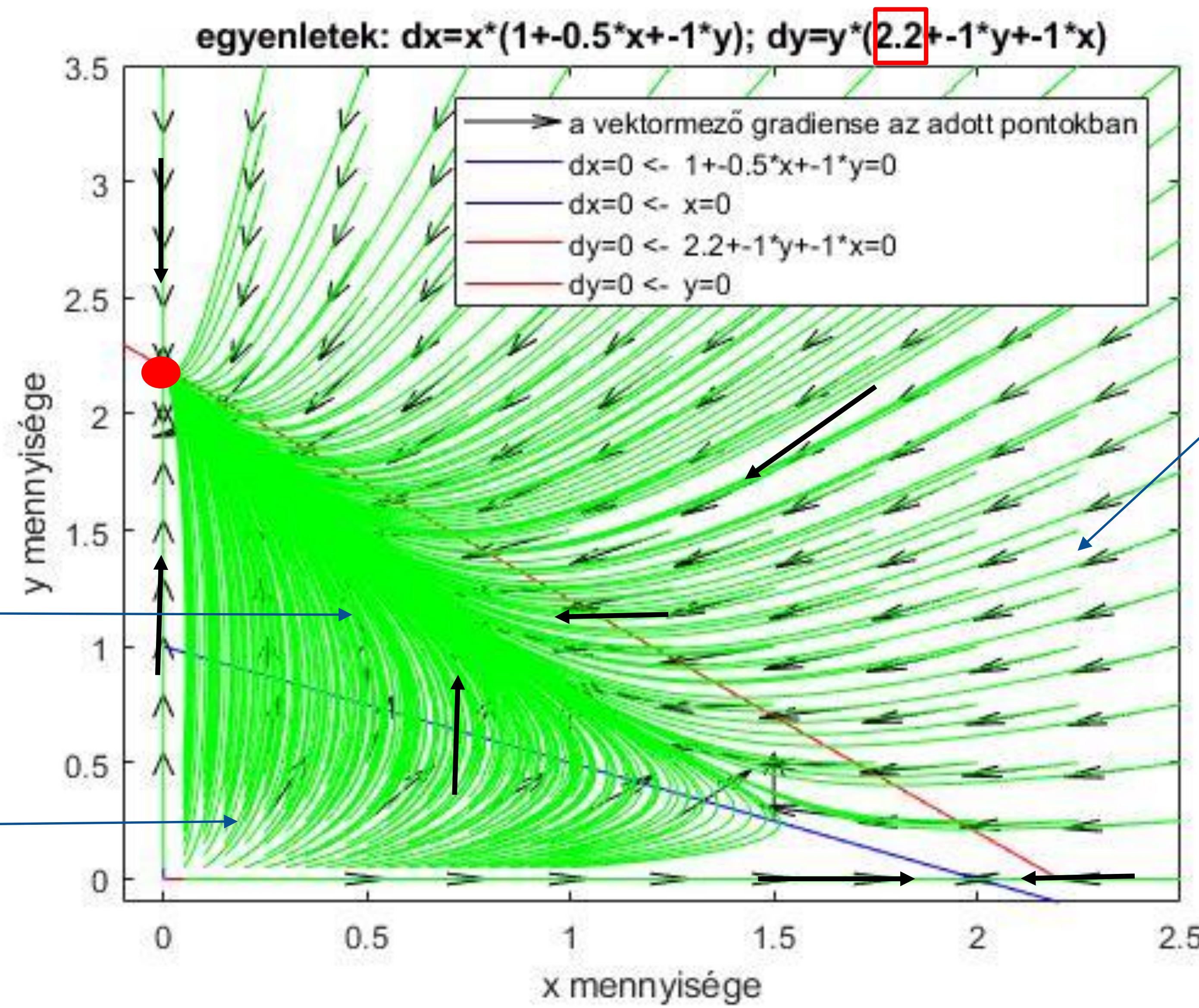


Ezt a régiót nem tudják elhagyni a trajektóriák, az egynsúlyi pont felé tartanak benne

Innen távoznak a megoldások

Innen befelé mennek a megoldások és elérik valamelyik alsó határt

Megoldások



Innen az egyensúlyi pontba megy vagy vízszintesen elhagyja

Ezt a régiót nem tudják elhagyni a trajektóriák, az egyensúlyi pont felé tartanak benne

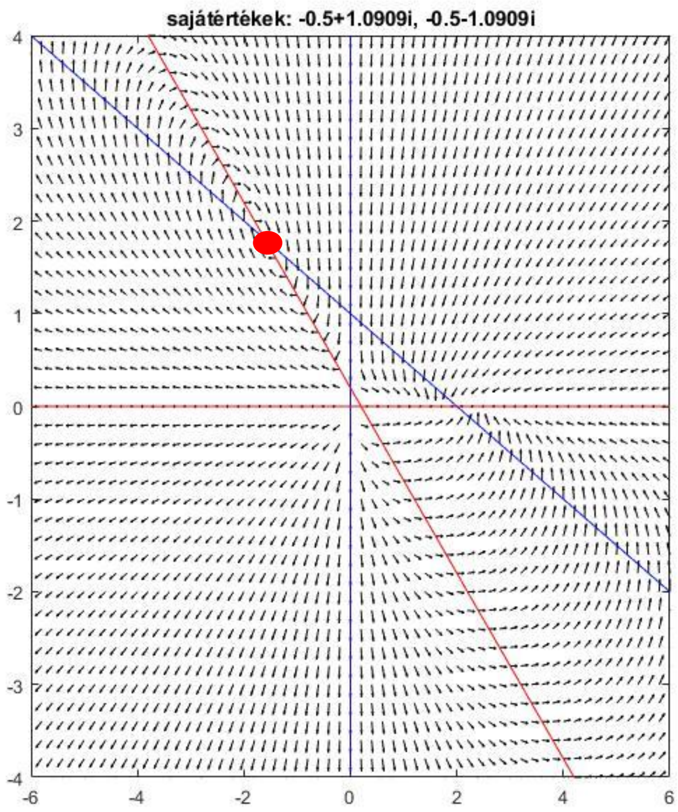
Innen függőlegesen távoznak a megoldások

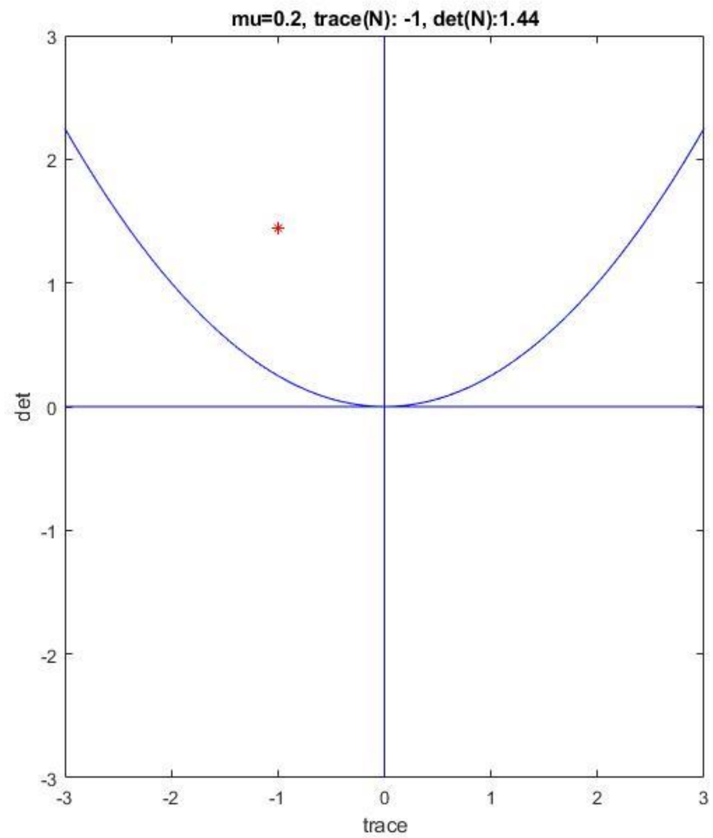
Megoldások

- A **J(N) mátrix nyomát és determinánsát** kiszámolva is ez jön ki
- Ha nem csak a pozitív síknegyeden vizsgálódunk, az alábbi egyensúlyi pont típusokat látjuk a mu-t növelve:
  - **vonzó fókusz -> vonzó csomó -> nyereg -> vonzó csomó -> vonzó fókusz**
  - A fókusz és a csomó „folyamatosan mennek át egymásba”, ezek közt nincs bifurkációs pont
  - (Köztük hol vannak a határpontok?)

Megoldások

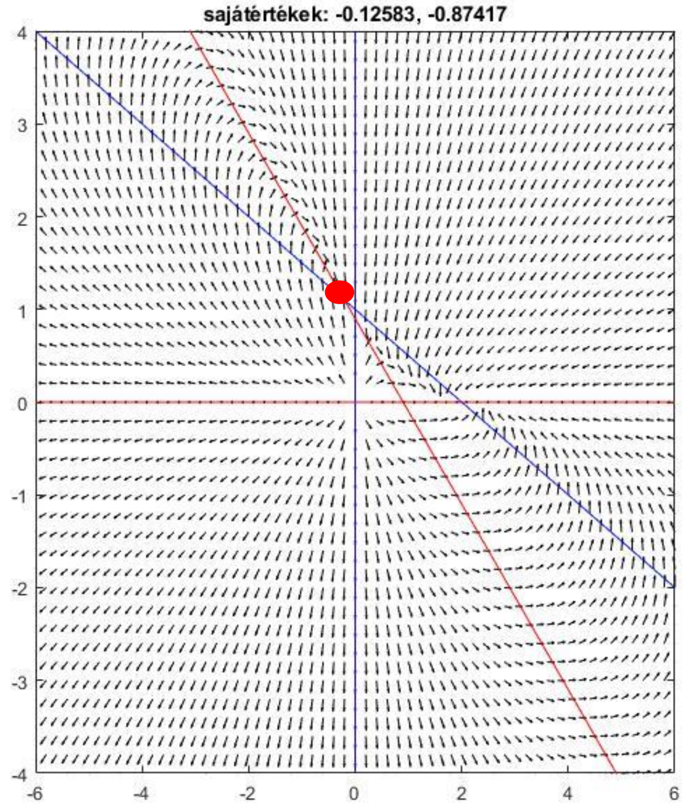
mu=0.2 -> Stabil fókusz

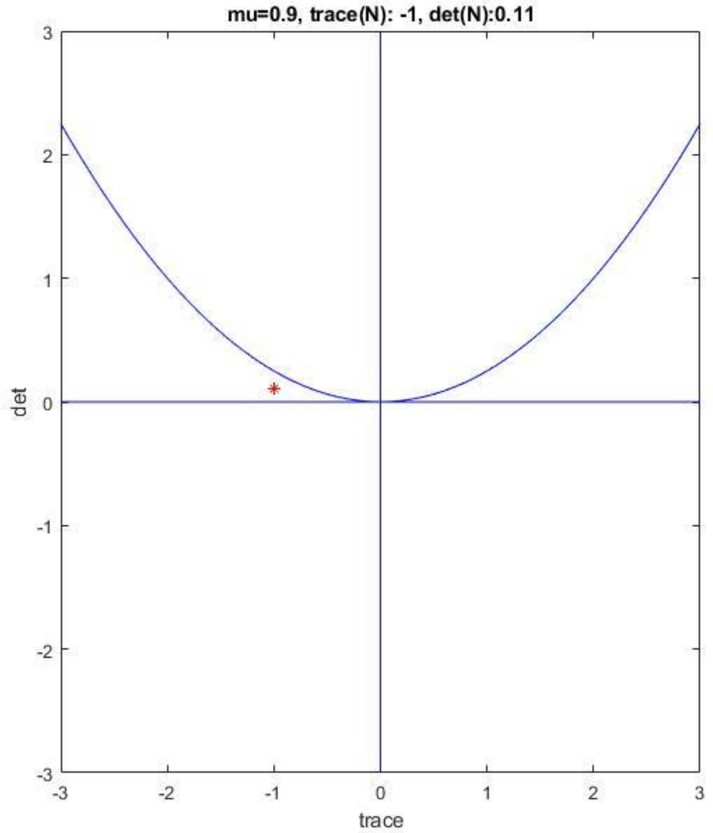




Megoldások

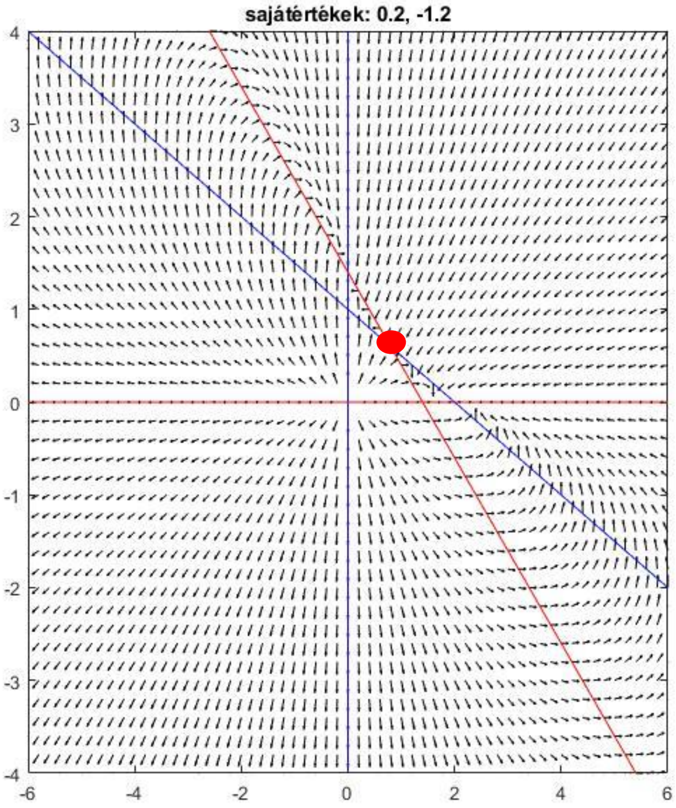
mu=0.9 -> Stabil csomó

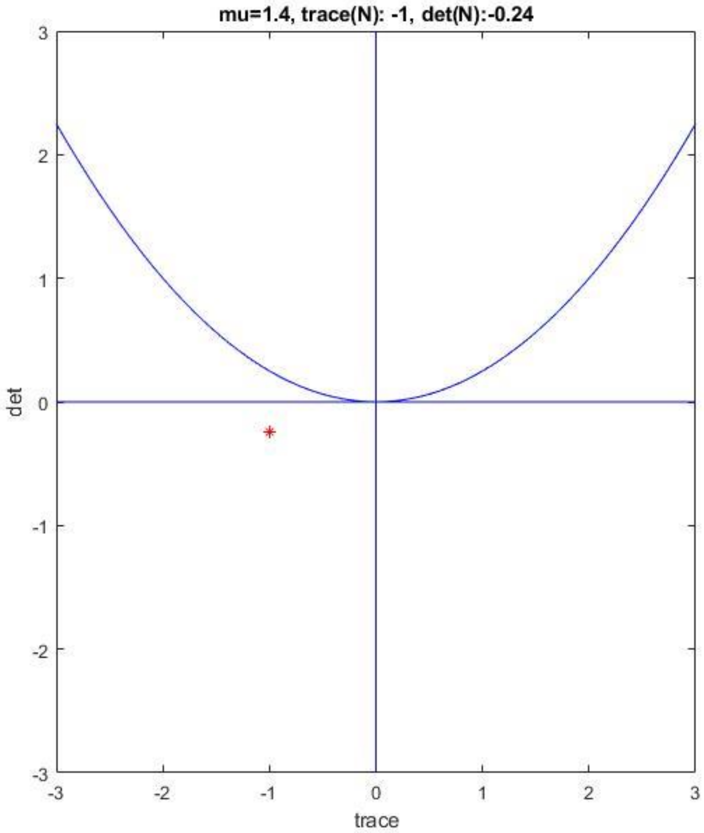




Megoldások

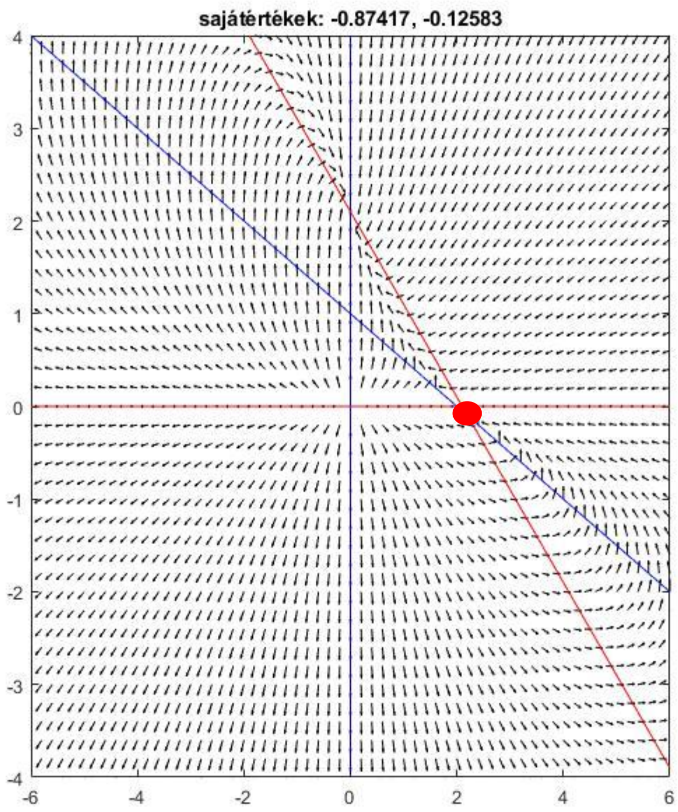
mu=1.4 -> Nyereg

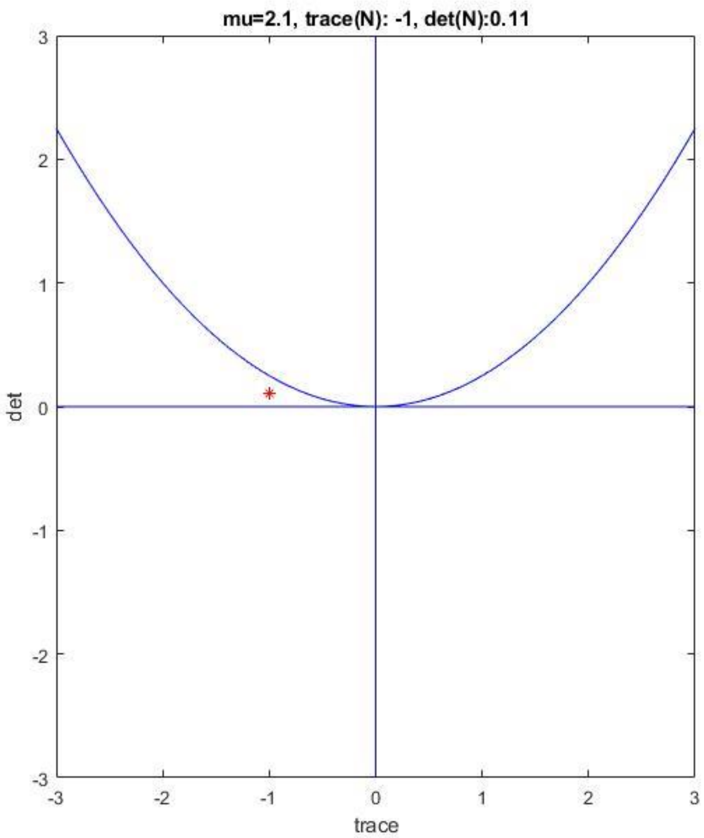




Megoldások

mu=2.1 -> Stabil csomó





Megoldások

mu=2.7 -> Stabil fókusz