Nemlineáris Dinamikai Modellek a Biológiában

Lotka-Volterra populáció modell

5. gyakorlat

Juhász János (juhasz.janos@.itk.ppke.hu)
Schäffer Katalin (sch.katalin17@gmail.com)

Populáció dinamika

- Modell kémiai oszcillációkra, ragadozó (y) és prédájának (x) együttélésére:

$$dx = x^*(\alpha - \beta^* y)$$
$$dy = y^*(-\gamma + \delta^* x)$$

Természetes szaporulat
Természetes halál
Fajok közti interakció (itt predáció)

- Az egyenletek megmondják, hogy adott kiindulási x és y mellett hogyan alakul az egyes fajok egyedszáma.
- A kezdeti értékektől függő stabil oszcilláció alakul(hat) ki a 2 faj mennyiségében.

Feladatok

A megadott 4 egyenletrendszerre:

- dinamika vizsgálata a tengelyeken (x=0 vagy y=0)
- belső egyensúly pont meghatározása (x>0 és y>0 és dx=0 és dy=0)
- hogyan viselkedik a rendszer?
  - Ábrázoljuk a dx=0 és dy=0 egyeneseket
  - Számítsuk ki a két populáció mennyiségének alakulását több kiindulási pontból
  - Számítsuk ki a vektormező gradiensét is
  - Lásd: gyak04_Lotka_Volterra.m és gyak05_Lotka_Volterra_nyeregpont.m kódok

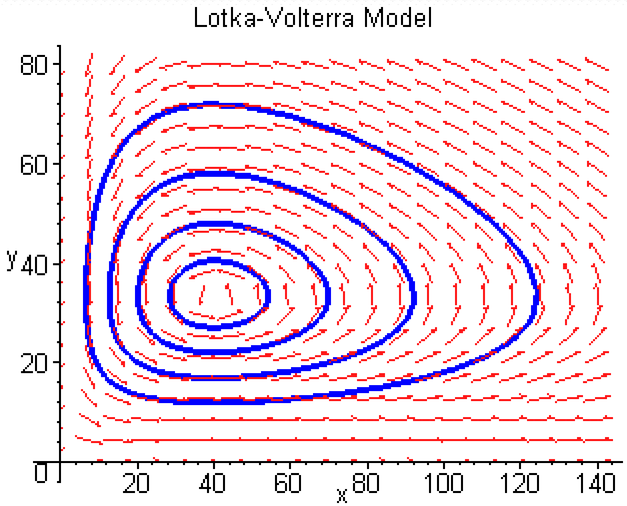
Lotka-Volterra feladatok

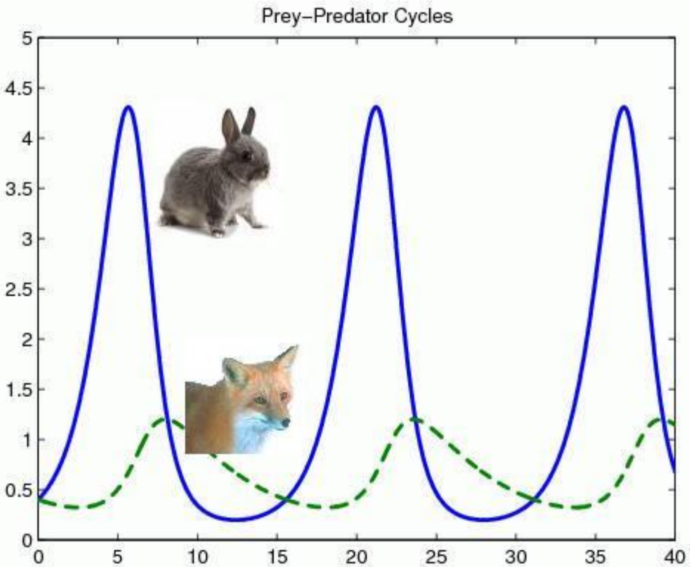
Klasszikus ragadozó - préda modell

1) kritikus eset

$$\dot{x} = x(-4 + y)$$

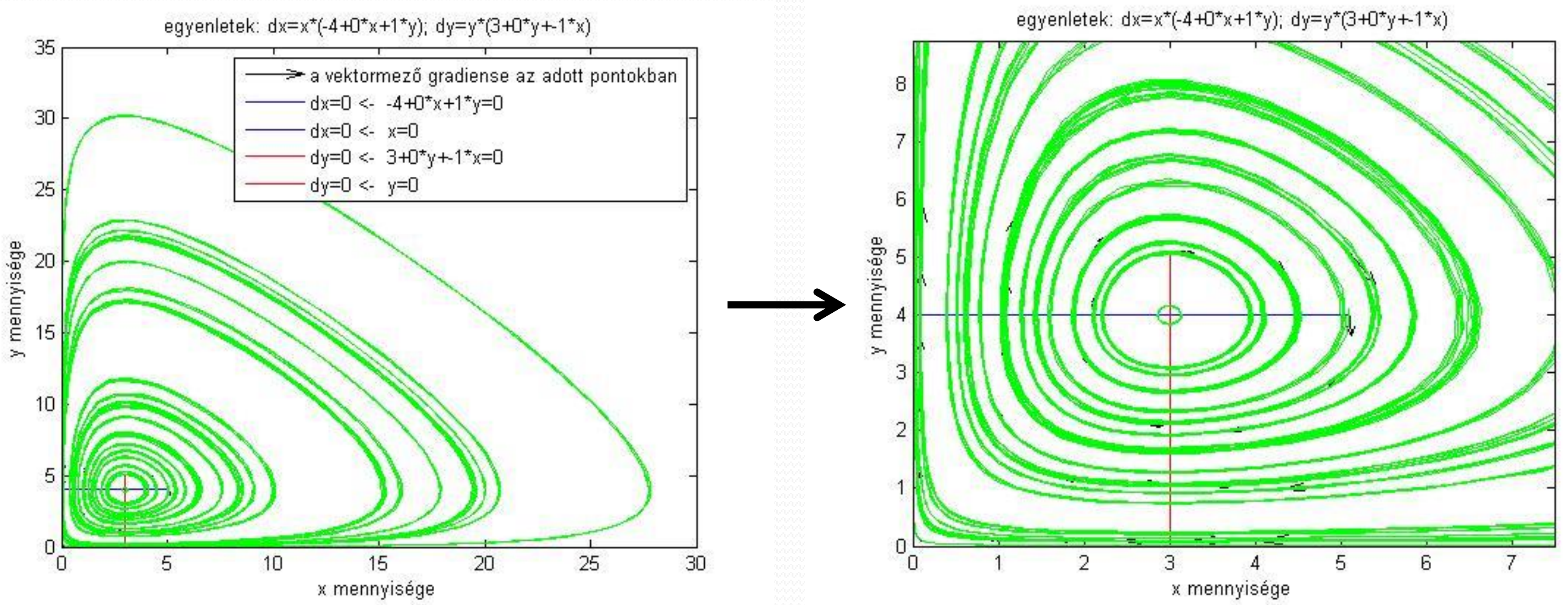
$$\dot{y} = y(3 - x)$$





1) Oszcilláció (centrum)

- A kezdeti értékektől függ a mértéke
- Ideális eset



Lotka-Volterra feladatok

2) reálisabb eset (y kis mértékben pusztul x nélkül is)

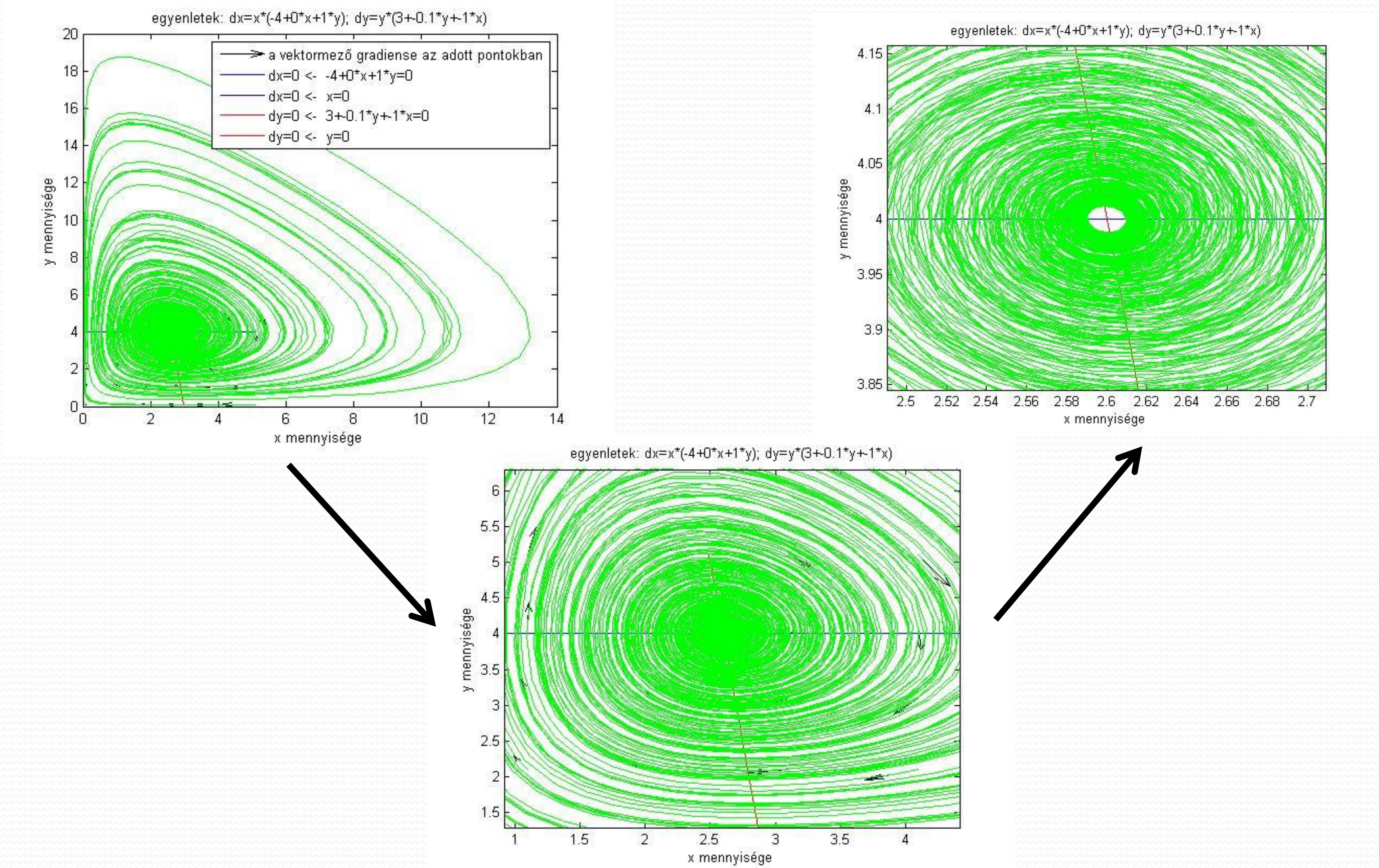
$$\dot{x} = x(-4 + y)$$

$$\dot{y} = y\left(3 - x - \frac{1}{10}y\right)$$

2) Y pusztul is (stabil fókusz)

- Az előbbi ideális rendszert kicsit megzavarva már nem oszcillál azonos frekvenciával hanem egy stabil ponthoz tart (~ súrlódás fizikai rendszereknél)
- A 2 faj közt stabil létszámbeli egyensúly alakul ki (a kezdeti állapottól függetlenül (ha $x_0>0$ és $y_0>0$))
- Ráközelítve a stabil pontra látszik, hogy a trajektóriák nem érik el, hanem körülötte köröznek:
  - ez numerikus hiba: a vektormezőt kirajzolva látszik hogy a vonzás az egyensúlyi pontba nagyon gyenge és az ode45-nek kissé destabilizáló hatása van (mint az implicit Euler módszernek is), a stabil pontból inkább kimozdítja a megoldásokat, ezért nem látszik, hogy a megoldások elérnék azt, csak köröznek körülötte

2) Y pusztul is (stabil fókusz)



Lotka-Volterra feladatok

3) véletlen hatás kivédése (nagyon kis y populáció már nem életképes)

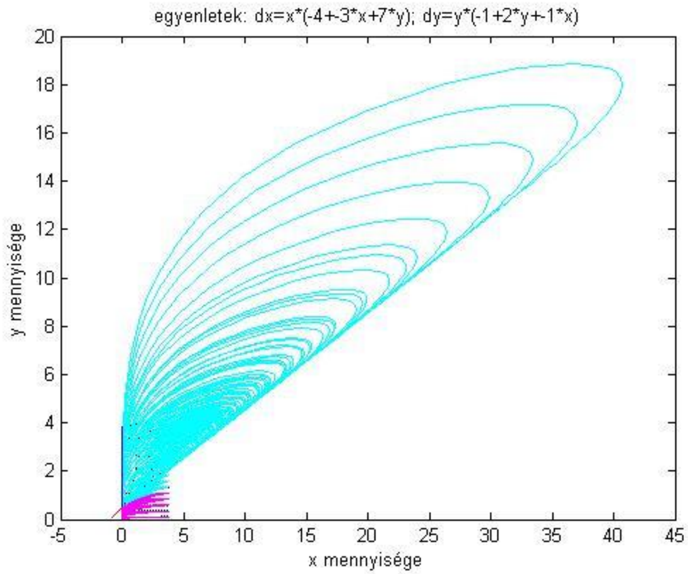
$$\dot{x} = x(-4 - 3x + 7y)$$

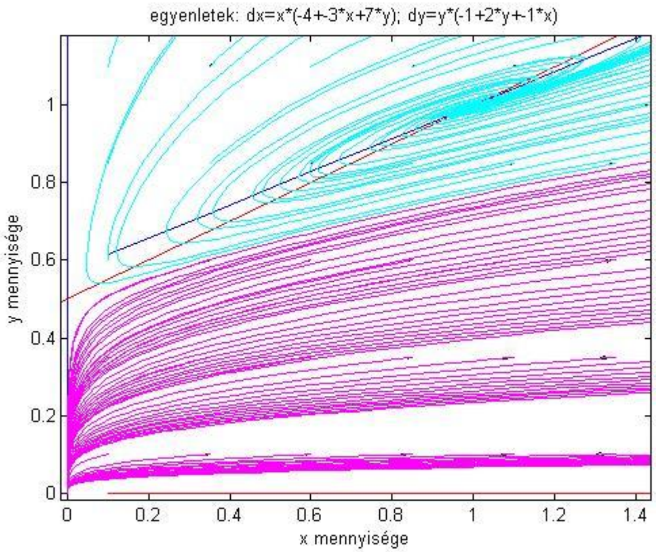
$$\dot{y} = y(-1 + 2y - x)$$

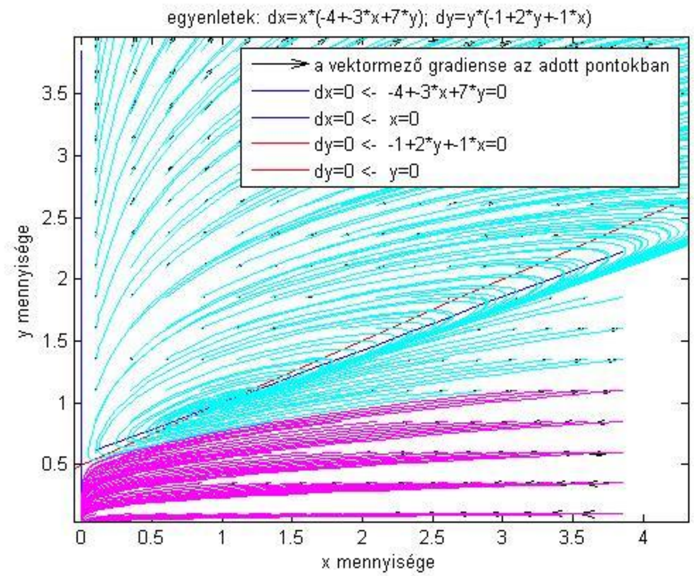
3) Kis mennyiségben az y nem életképes (stabil csomó, stabil fókusz)

- Még reálisabb eset: ha egy fajból már kevés van, nagyon sérülékennyé válik, valószínű, hogy kihal
- Az eddigi modellekben ezzel szemben extrém kis mennyiségekről is növekedésnek indulhattak a populációk
- Itt a fajok kezdeti arányától függ, stabil egyensúly alakul-e ki a 2 faj közt (oszcillációk után), vagy mindenki kihal

3) Kis mennyiségben az y nem életképes (stabil csomó, stabil fókusz)







Lotka-Volterra feladatok

4. Két populáció versengése (nyeregpont ábrázolása)

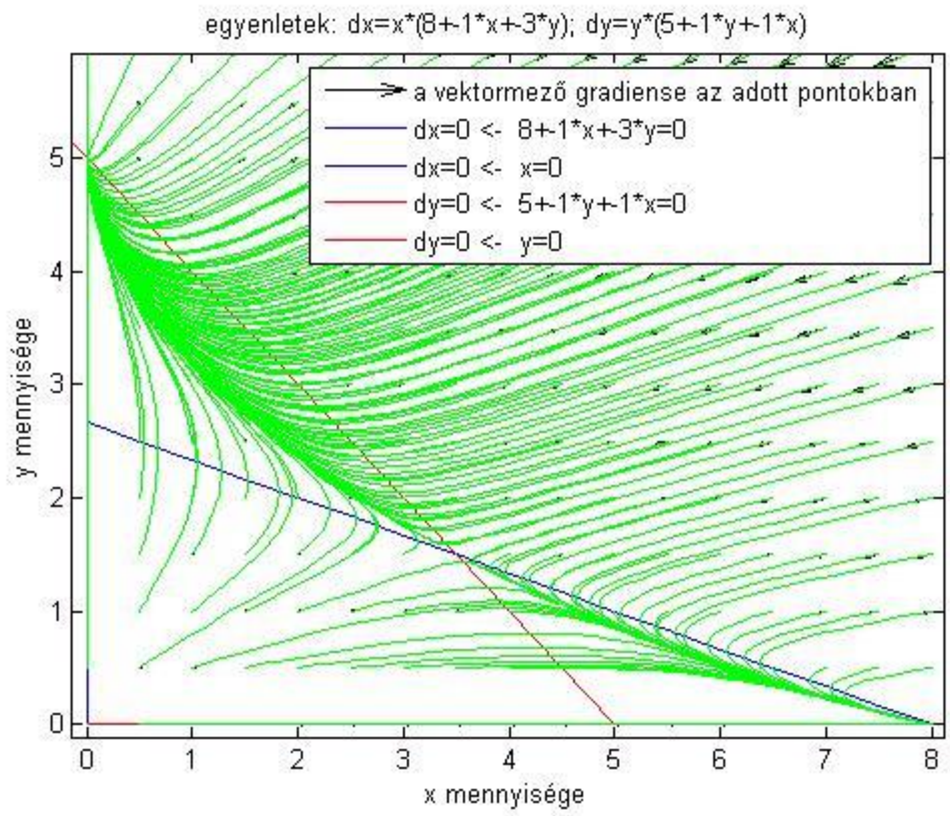
$$\dot{x} = x(8 - x - 3y)$$

$$\dot{y} = y(5 - y - x)$$

- További feladatok:
  - rajzoljuk ki a nyeregpontot
  - ábrázoljuk minél szemléletesebben az „élet és halál” szeparáló görbéjét (a görbét ami eldönti, melyik faj marad meg)

4) Versengés (nyeregpont)

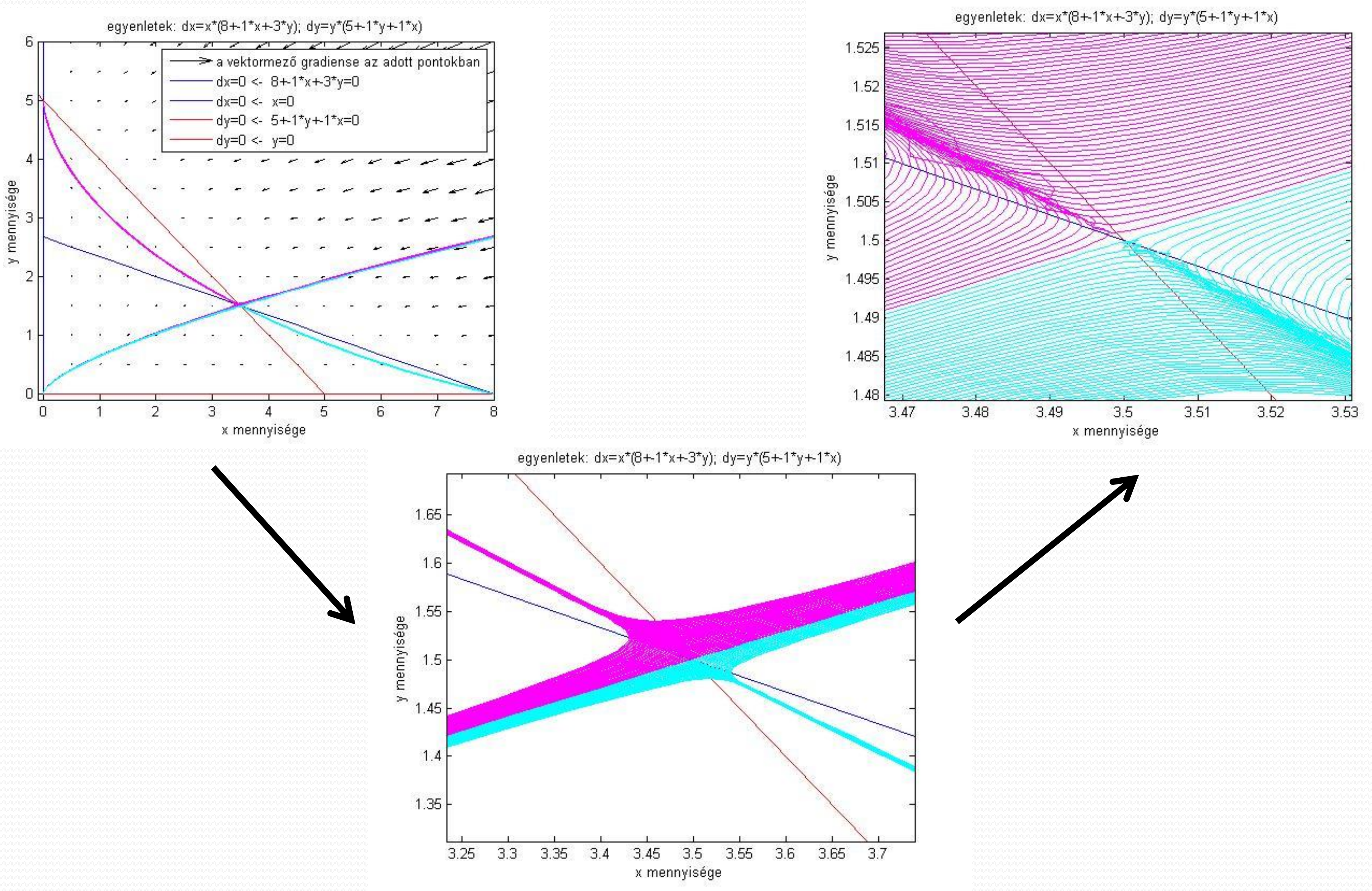
- A 2 faj kezdeti arányától függően vagy az egyik vagy a másik marad életben (jellemző mennyiséggel)



4) Versengés: nyeregpont

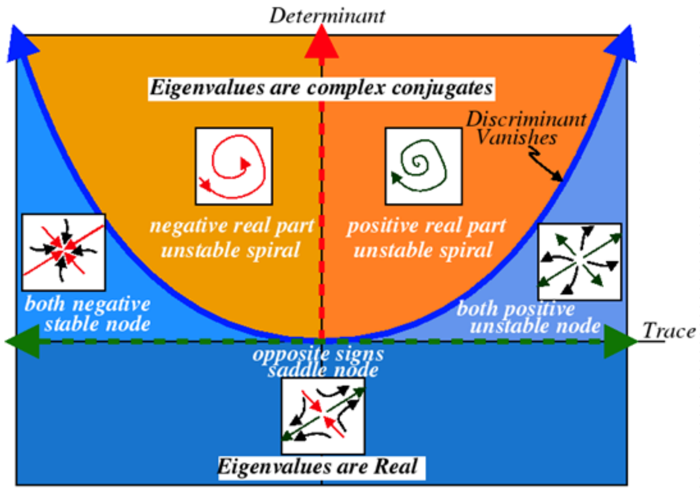
- Stabil egyensúlyi pontokat könnyű megmutatni, maga a folyamat rajzol <- a stabil pontba tartanak a pályák
- A nyeregpont szemléltetése nehezebb <- ide pont nem mennek megoldások
- Tippek:
  - A nyeregpont környezetéből indítva a megoldásokat nyeregpont jól közelíthető (a trajektóriák a 2 stabil egyensúlyi pont valamelyikébe tartanak)
  - Ha az dx, dy rendszer helyett a –dx, -dy rendszert oldjuk meg, akkor „megfordítottuk a folyamat idejét”, így megtudjuk, hogy honnan indulnának azok a trajektóriák, amiknek az adott pontban végződnének
  - A nyeregponthoz közeli pontokból az idő mindkét irányába megoldva a rendszert az „élet és halál” szeparáló görbe kirajzolható

4) Versengés: nyeregpont



Nyom-determináns diagram

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Bigg\} \quad \Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D, \text{ ahol } T = a + d\,,\; D = ad - bc$$



- instabil fókusz $\Leftrightarrow$ $T > 0$ & $D > \frac{T^2}{4}$
- instabil csomó $\Leftrightarrow$ $T > 0$ & $0 < D < \frac{T^2}{4}$
- nyereg $\Leftrightarrow$ $D < 0$
- stabil csomó $\Leftrightarrow$ $T < 0$ & $0 < D < \frac{T^2}{4}$
- stabil fókusz $\Leftrightarrow$ $T < 0$ & $D > \frac{T^2}{4}$

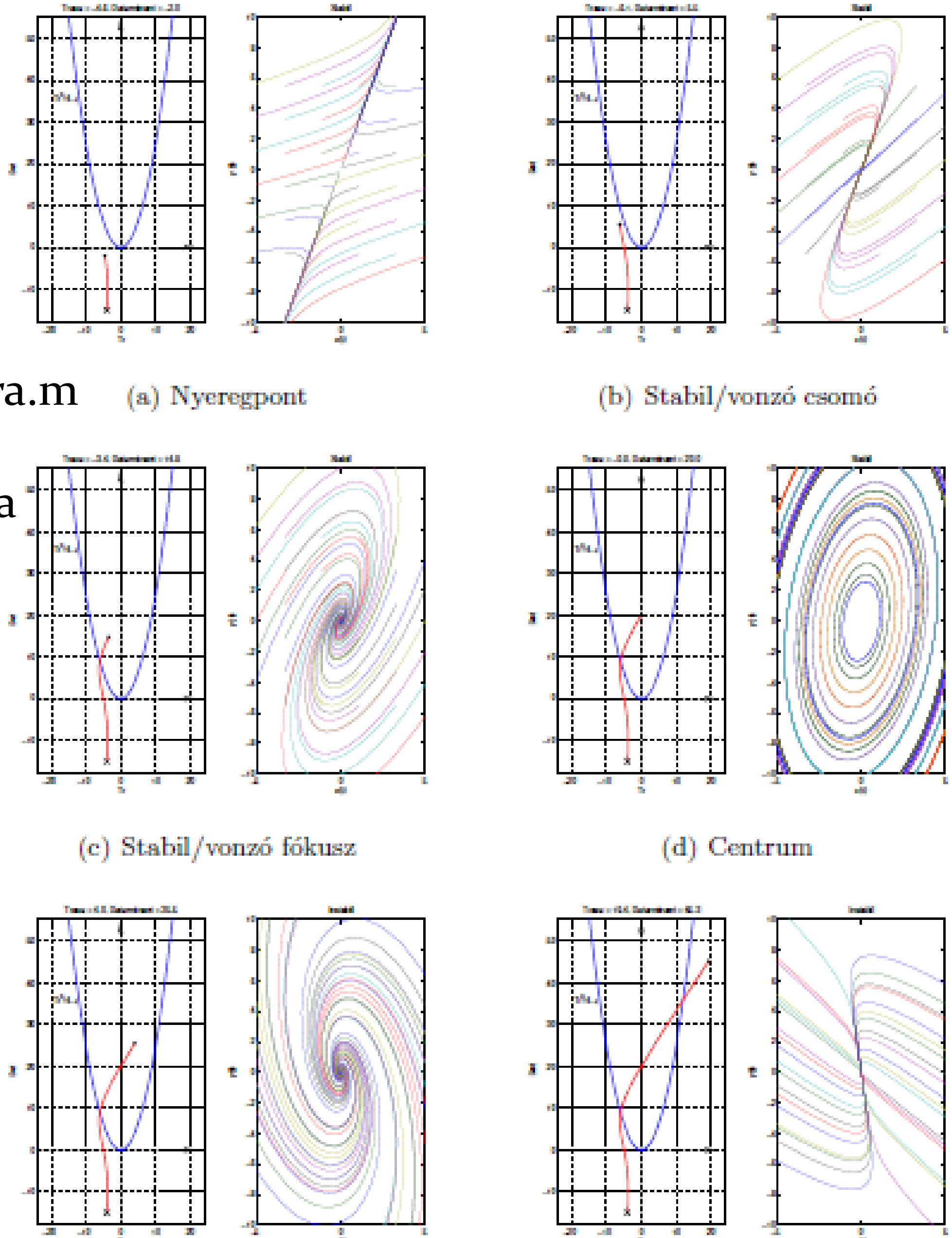
Az átmeneti esetek közül a legfontosabb

- centrum $\Leftrightarrow$ $T = 0$ & $D > 0$ — stabilitás vonzás nélkül .

Az aszimptotikus stabilitás ($\Leftrightarrow$ stabilitás & vonzás) jellemzése:

- stabil csomó vagy stabil fókusz $\Leftrightarrow$ $T < 0$ & $D > 0$
- átfogalmazás: $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, ahol $a_1 > 0$ & $a_0 > 0$

lásd Trace-det_abra.m kód
És a szkennelt lap a Wiki oldalon



(a) Nyeregpont

(b) Stabil/vonzó csomó

(c) Stabil/vonzó fókusz

(d) Centrum

(e) Instabil/taszító fókusz

(f) Instabil/taszító csomó

Feladat

- A korábbi 4 populáció dinamikai rendszer egyensúlyi pontjainak típusát is határozzuk meg a Nyom(trace)-determináns diagram segítségével
- Tipp:
  - Számoljuk ki az egyensúlyi pontokat (dx=0 ÉS dy=0)
  - Határozzuk meg a rendszer Jacobi mátrixát:

    [dx x-szerint deriválva, dx y szerint deriválva;
    dy x szerint deriválva dy yszerint deriválva]
  - Helyettesítsük be ebbe a mátrixba az egyensúlyi pontok x y koordinátáit
  - Számítsuk ki a kapott mátrix nyomát (T) és determinánsát (D)
  - A kapott T,D pontot elhelyezve a nyom-determináns ábrán megkapjuk az egyensúlyi pont típusát

Matlab® kiegészítés

- [X,Y] = meshgrid(x,y) replicates the grid vectors x and y to produce a full grid.
- equation= @(t,y) [y(2); y(1)]; y(1) = x, y(2) = y,
  bal oldal dx/dt ; jobb oldal dy/dt
- [t,y]=ode45(equation, [t_0,t_{max}][X_{init},Y_{init}]);
  több ode solver is választható, elsőnek ezt próbáljuk
- figure creates figure graphics objects. Figure objects are the individual windows on the screen in which the MATLAB software displays graphical output.
- plot(x,y,how…)
- subplot(m,n,p) (m*n re osztja a figure-t, p. pozícióba/tartományba, etc.))
- contour(X,Y,Z), contour(X,Y,Z,n), and contour(X,Y,Z,v) draw contour plots of Z using X and Y to determine the x- and y-axis limits.