

# Nemlineáris Dinamikai Modellek a Biológiában

## 4. gyakorlat

Juhász János (juhasz.janos@itk.ppke.hu)

Schäffer Katalin (sch.katalin17@gmail.com)

# Explicit Euler módszer

Általános feladat:

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

$$\varphi: [0, h_0] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

A módszer általános formája:

$$x_{k+1} = \varphi(h, x_k), k = 0, 1, 2, \dots \leftrightarrow X = \varphi(h, x)$$

$\varphi_E$  explicit Euler módszer:

$$X = \varphi_E(h, x), \text{ ahol } X = x + hf(x)$$

# Implicit Euler módszer

Általános feladat:

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

$$\varphi: [0, h_0] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

A módszer általános formája:

$$x_{k+1} = \varphi(h, x_k), k = 0, 1, 2, \dots \leftrightarrow X = \varphi(h, x)$$

$\varphi_I$  implicit Euler módszer:

$$X = \varphi_I(h, x), \text{ ahol } X = x + hf(X)$$

# Explicit Euler - Implicit Euler

## Explicit Euler:

$$X = x + hf(x)$$

- könnyű implementáció
- stabil egyensúlyi helyzetet destabilizálja
- korlátozott lépésköz

## Implicit Euler:

$$X = x + hf(X)$$

- nehezebb implementáció  
(nagyobb számítási igény)
- stabil egyensúlyi helyzetet még jobban stabilizálja
- nagyobb lépésközt megenged  
-> gyorsabb lehet

Pl.:  $\dot{x} = -10x$

# Feladat

- Oldjuk meg  $\dot{x} = -10x$  egyenletet
  - Explicit Euler módszerrel
  - Implicit Euler módszerrel
  - Hasonlítsuk össze a megoldásokat az egyenlet analitikus megoldásával:  $x(t) = e^{-10t}$
- Próbáljuk ki a módszereket különböző (h) lépésközökkel.
  - Pl: 0.01, 0.05, 0.1, 0.11, 0.15, 0.2, 0.21, 0.5
- Oldjuk meg az egyenletet ode45, ode15s és ode113 megoldókkal is
  - Mennyi ponton és hol számolják ki a megoldók a görbét?
- Mi a helyzet az  $\dot{x} = -100x$  rendszerrel?

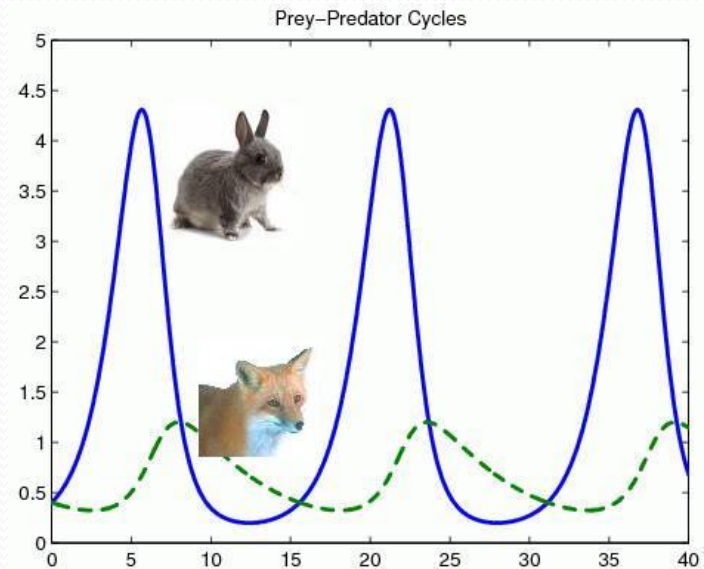
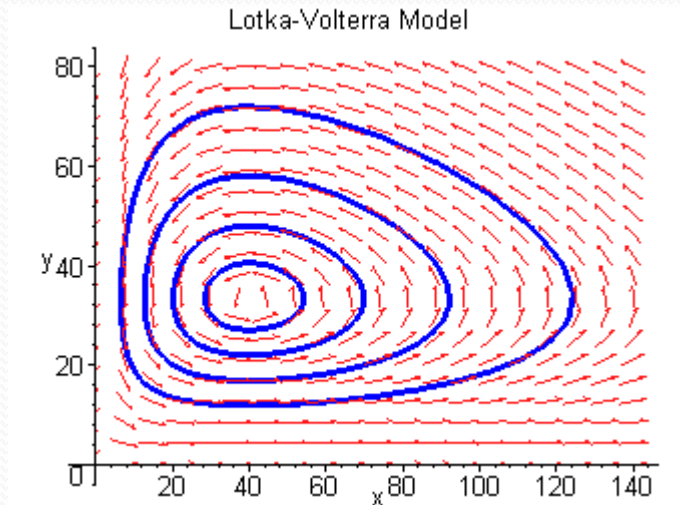
# Lotka-Volterra feladatok

Klasszikus ragadozó - préda modell

1) kritikus eset

$$\dot{x} = x(-4 + y)$$

$$\dot{y} = y(3 - x)$$



# Lotka-Volterra feladatok

2) reálisabb eset ( $y$  kis mértékben pusztul  $x$  nélkül is)

$$\dot{x} = x(-4 + y)$$

$$\dot{y} = y\left(3 - x - \frac{1}{10}y\right)$$

# Lotka-Volterra feladatok

- 3) véletlen hatás kivédése (nagyon kis  $y$  populáció már nem életképes)

$$\dot{x} = x(-4 - 3x + 7y)$$

$$\dot{y} = y(-1 + 2y - x)$$



# Lotka-Volterra feladatok

4. Két populáció versengése (nyeregpont ábrázolása)

$$\dot{x} = x(8 - x - 3y)$$

$$\dot{y} = y(5 - y - x)$$

# Feladatok

- dinamika vizsgálata a tengelyeken ( $x=0$  vagy  $y=0$ )
- belső egyensúly pont meghatározása ( $x>0$  és  $y>0$  és  $dx=0$  és  $dy=0$ )
- hogyan viselkedik a rendszer?
  - Ábrázoljuk a  $dx=0$  és  $dy=0$  egyeneseket
  - Számítsuk ki a két populáció mennyiségének alakulását több kiindulási pontból
  - Számítsuk ki a vektormező gradiensét is.