Nemlineáris Dinamikai Modellek a Biológiában

3. gyakorlat

Schäffer Katalin (sch.katalin17@gmail.com)
Juhász János (juhasz.janos@.itk.ppke.hu)

Van der Pol oszcillátor

- *Oszcillátor*:
- olyan áramkör, amely stabil, periodikus elektromágneses rezgést hoz létre és tart fenn.
- biológiai oszcillációk: pl.: szívritmus, napi ritmus, napszakok/ évszakok váltakozása

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$$

- DE megoldása: $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

  ahol
    - U_o amplitúdó
    - ω_o frekvencia
    - ς_o fázis
- Nehéz az áramkör implementálása

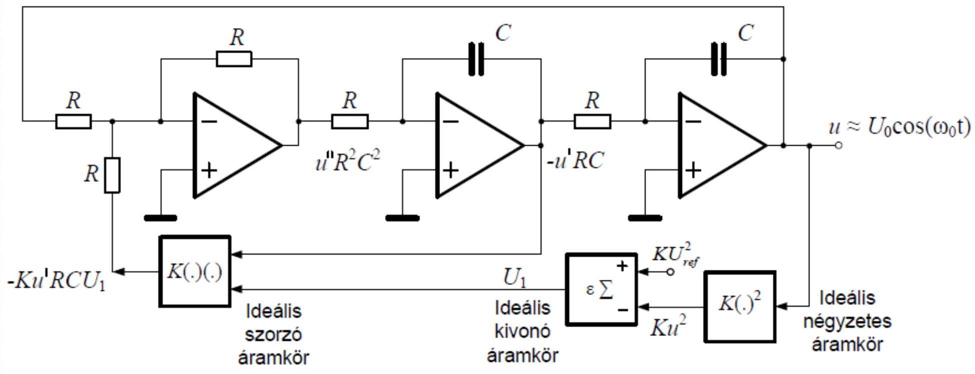
Van der Pol oszcillátor

- Nehézségek:
  - Függés a kezdeti értékektől (kikapcsolás után az amplitúdó változhat)
  - A valóságban egy tökéletes rendszerre lenne szükség egy konstans amplitúdójú szabályos szinuszos megoldáshoz
  - Konstans amplitúdójú oszcillátort nem lehet lineáris áramköri elemekből építeni
- Cél:
  - Konstans és stabil frekvenciájú/ amplitúdójú oszcilláció biztosítása
  - A rendszernek bármely kezdeti állapotból el kell érnie a konstans frekvenciát/ amplitúdót

Van der Pol oszcillátor

- Megoldás:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$



A Van der Pol oszcillátor kapcsolási rajza.

Van der Pol oszcillátor

Feladatok:

- Az egyenlet megoldása különböző módszerekkel
  - explicit Euler (különböző lépésközökkel)
  - ode45
  - ode15s
- Mi a különböző μ paraméter értékek hatása a megoldásra?

  Pl.:

  - μ = 0:0.1:10
  - μ = 0:10:100

Explicit Euler módszer

Általános feladat:

$$\dot{x} = f(x), x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$$

$$\varphi: [0, h_0] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$$

Általános formája a megoldásnak:

$$x_{k+1} = \varphi(h, x_k), k = 0,1,2, \ldots \leftrightarrow \mathrm{X} = \varphi(h, x)$$

φ_E explicit Euler módszer:

$$\mathrm{X} = \varphi_E(h, x), \text{ ahol } X = x + hf(x)$$

ode45

- Hibaforrások (általánosan a numerikus megoldásoknál):
  - ***Matematikai hiba***: a numerikus módszer miatt
    → nagyobb lépéseknél egyre jelentősebb
  - ***Kerekítési hiba***: számítógép hibája
    → több lépésre egyre nagyobb
- Fontos a megfelelő lépésköz megválasztása
  - Matlab ode differenciál egyenlet megoldók adaptív lépésközt használnak (a „változás sebességétől” függően)

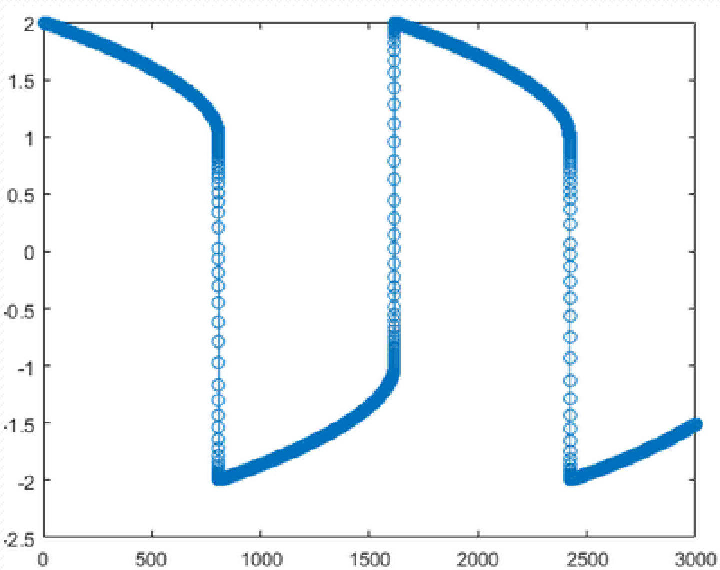
Van der Pol oszcillátor

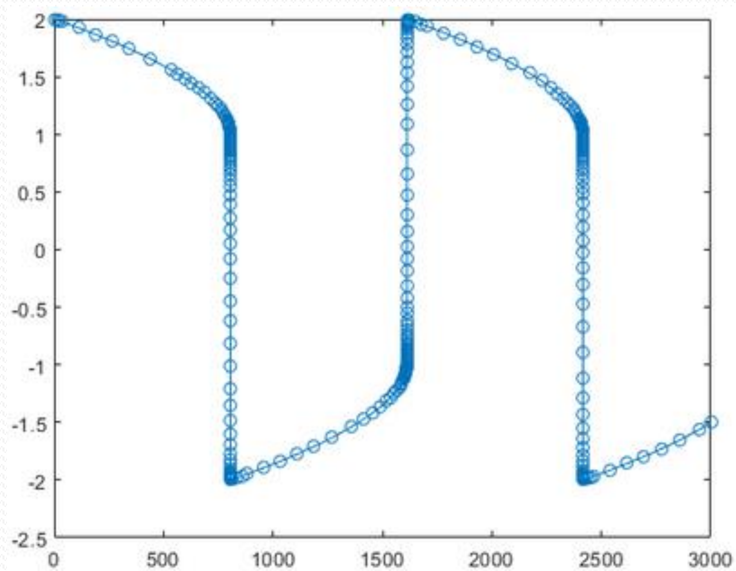
ode45

- merev (=különböző időskálás) problémákat nem tud hatékonyan kezelni
  → lelassul
- a legtöbb „általános" problémához jó első tipp

ode15s

- megfelelő a merev problémákhoz:
  - kisebb lépésközöket használ időskálák közti nagyobb, meredekebb változásoknál
  - nagyobb lépésközök lassan változó régióknál





- különböző módszerek különböző heurisztikákat használnak
- többféle rendű ODE megoldókat kombinálnak