PPKE ITK 2019 tavaszi félév Tételjegyzék
NEMLINEÁRIS DINAMIKAI MODELLEK A BIOLÓGIÁBAN

1.) Egy–faj mátrix–modellek

Biológia és mögöttes matematika: Fibonacci, Leslie, korfa, utódok átlagos száma, az $R \underset{>}{\overset{<}{=}} 1 \Leftrightarrow r \underset{>}{\overset{<}{=}} 1$ tulajdonság, bolyongási játékpélda valóságos egérrel, pozitív mátrixok Perron–Frobenius tulajdonságai

2.) Az $u_t = u_{xx}$ diffúziós egyenlet és általánosításai

Fizikai modell és mögöttes matematika: az egyenlet levezetése mikroszkopikus (Brown–mozgás, bolyongás 1D–ben, skálázás) illetve makroszkopikus (hővezetés, hőenergia–mérleg adott térrészben — diffúzió, anyagmérleg adott térrészben) megfontolások segítségével, diffúzió–advekció–reakció egyenlet, diffúzió–kemotaxis–reakció egyenletrendszer, kezdeti- és peremfeltételek[1], kapcsolat Gauss–görbék egy családjával, maximum–elv, numerikus megfontolások

3.) Analitikus módszerek közönséges differenciálegyenletek vizsgálatára

Linearizálás és lokális fázisportré egyensúlyi helyzetek körül. Elemi következtetések a vektormező valamint Ljapunov függvények alapján. A fázisportré változása a paraméterek változtatásának tükrében: jellegzetes $\mu \underset{>}{\overset{<}{=}} 0$ bifurkációs ($\dot{x} = \mu - x^2$, $\dot{y} = -y$ nyereg–csomó), ($\dot{r} = \mu r - r^3$, $\dot{\varphi} = -1$ Hopf) ábrák. Stabilitás és vonzás, egyensúlyi helyzeté és periodikus pályáé. Numerikus megfontolások. A 2D eset specialitásai, omega–határhalmazok a síkon. Lotka és Volterra két–faj modelljei

4.) Példák hálózatokon értelmezett dinamikára

a.) az évenkénti adóbevallások $x_{i,t+1} = F(\overline{x}_{i,t})$ átlagolásos modellje, elégséges feltétel globálisan aszimptotikusan stabil homogén fixpont létezésére, matematikai részletekkel

b.) a véletlen gráfok Erdős–Rényi, Strogatz–Watts, Barabási–Albert féle típusai[2], néhány mondat a járványterjedésről

c.) további modellek, négyzetrácsokon is[3]

5.) Adott gén térbeli terjedése

Biológia és matematika együtt: a Fischer féle $u_t = u(1-u) + u_{xx}$ parciális egyenlet levezetése. Utazó hullám mint speciális alakú megoldás differenciálegyenlete és annak $U(-\infty) = 1$, $U(\infty) = V(-\infty) = V(\infty) = 0$ megoldásai a hullámsebesség $c \geq 2$ értékeire. Az itt és most szükséges fázisportré analízis. A $c = 2$ sebességhez tartozó stabil utazó hullám

[1] aki jelest szeretne, az nézze át az $u_t = u_{xx}$ egyenletre vonatkozó 1D kezdetiérték–probléma megoldását a $[0, \pi]$ intervallumon is, ez utóbbi esetben az $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ illetve az $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$ peremfeltétel mellett (azaz a segédlet negyedik oldalának alján kezdődő és az ötödik oldalának tetején végződő *Megjegyzés*–t — ez tulajdonképpen a változók szétválasztása más néven Fourier módszer, ami vektoros alakban a mintázatképződés Turing–féle modelljében is megjelenik)

[2] a jeles osztályzatért a segédlet harmincharmadik oldalának alján szereplő függvényegyenletet is kérem

[3] amelyeket a gyakorlatokról vagy, a jeles osztályzatért, más tantárgyakból ismer, informatív jelleggel, a finomabb részletek nélkül

6.) A mintázatképződés Turing–féle modellje

A Turing által alkalmazott biológiai–kémiai heurisztika. A Turing féle parciális egyenletrendszer matematikai kezelése és az azt megalapozó Fourier módszer az $u_t = u_{xx}$, $u(0,x) = g(x)$, $0 \le x \le \pi$ kezdetiérték–probléma megoldására az $u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0$, $t \ge 0$ homogén Neumann peremfeltétel mellett

7.) Idegi ingerületvezetés: Hodgkin–Huxley alapmodell

Biológia: Hodgkin és Huxley (1952) kísérletei a tintahal óriás–idegrostjával. Ionáramlás az idegrost–sejthártyán át és ami hajtja. Biológia és matematika együtt: az ekvivalens áramköri modell és egyenletrendszer. Ingerküszöb és regenerációs időküszöb. Az akciós potenciál mint ingerületre adott válasz és a hozzátartozó "V", "Na–pumpa, K–pumpa", "h, m, n" ábrák. Utazó hullám az idegrostban és a teljes (egy parciális és három közönséges differenciálegyenletet tartalmazó) Hodgkin–Huxley egyenletrendszerben

8.) Relaxációs oszcillációk és a Nagumo–Fitzhugh egyenletrendszer

Az ingerköszöb és az akciós potenciál mint valóságos viselkedés megjelenése az

$$\dot{x} = c(y + x - \frac{x^3}{3} + I) \quad , \quad \dot{y} = \frac{1}{c}(a - x - by)$$

($b < 1$, $1 << c$) Nagumo–Fitzhugh egyenletrendszerben. A periodikus pálya keletkezésének kétféle mechanizmusa, "kicsiben = lokálisan" és "nem–lokálisan = nagyban". Az itt és most szükséges fázisportré analízis.

A fenti listából az a vizsgaanyag, ami az előadáson tételesen szerepelt. A fésületlenül abbahagyott és egyenetlen, nem–eléggé tagolt, s helyenként vázlatos ujnemlindinmodbiol.pdf es az extranemlindinmodbiol.pdf szövegek több olyan részt is tartalmaznak, ami nem a vizsga anyaga.

Mindenki két tételt húz a vizsgán: az egyiket szabad előadás, a másikat párbeszédes formában kérem. Általában véve nagyon örülök annak, ha a vizsgázó arra is utal, amit a gyakorlatokon látott, valamint az egyes témákról a többi tantárgyban tanult. A tételes vizsgaanyag az, ami az előadáson szerepelt. A vizsgába a zárthelyi eredménye is beszámít. Ami az 5-ös és a 7-es tételt illeti, a jelenleg 53+13 oldalas segédletet tovább fogom írni illetve rajzolni ezekbe az irányokba.

Konzultáció a vizsgák előtt, időpontok megadása később.

Jó tanulást és jó kedvet is hozzá!

Garay Barna