"Numerikus bezártság" — *Szorgalmi feladat a bezártság idejére*

A $p_t = p(1-p) + D\, p_{xx}$ Fisher féle parciális differenciálegyenlet a gyakorlaton is szerepelt, kézenfekvő numerikus megoldási módszere

$$\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\tau} = D\,\frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{h^2} + p_{i,j}(1-p_{i,j})$$

$$\Leftrightarrow \qquad p_{i+1,j} = \mu p_{i,j+1} + (1-2\mu)p_{i,j} + \mu p_{i,j-1} + \tau p_{i,j}(1-p_{i,j})\,,$$

ahol $0 < \mu = D\,\frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{2}$ paraméter. Az átrendezett egyenletrendszer explicit módon, időrétegenként oldható meg, kiindulva a nulladik időréteg rácspontjaiban ismert $p_{0,j} = g(jh)$ (j=0,1,2,…, $N \gg 1$) numerikus kezdeti értékekekből. Itt $g\!:[0, L] \to [0,1]$ folytonos, csökkenő függvény, a $g(0) > 0$, $g(L) = 0$ tulajdonságokkal. A numerikus peremfeltételek legyenek $p_{i,0} = p_{i,1}$, $p_{i,N} = p_{i,N-1}$, ahol $i = 0,1,\ldots$. A numerikus megoldás a Fisher féle parciális differenciálegyenletet a $t \geq 0$ időben oldja meg, ahol az $x \geq 0$ félegyenest a $[0, L]$ szakasszal pótoljuk, és annak végpontjaiban a "zero–flux" homogén Neumann peremfeltételt követeljük meg. Világos, hogy $h = L/N$ a térbeli, τ pedig az időbeli lépésköz. A numerikus kezdeti feltétel az utazó hullám érkezését készíti elő. Szokásos a $p_{0,0} = p_{0,1} = \varepsilon > 0$, $p_{0,j} = 0$ ($j = 2,3,\ldots, N-2 \gg 1$) közelítés is.

Az 1D hővezetési egyenletre tanult numerikus maximum–elv bizonyítását követve igazolja, hogy a $\tau + 2\mu < 1$ lépésköz–feltétel teljesülése esetén

$$0 \leq p_{i,j} \leq 1 \;\;, \quad \forall\; i = 0,1,\ldots \quad \text{és} \;\; \forall\; j = 0,1,2,\ldots,N\,.$$

Magyarán a $0 \leq p(t,x) \leq 1$ "bezártsági" tulajdonság nemcsak a pontos, hanem a közelítő megoldásokra is teljesül. Ez esetben is arról van szó, hogy a pontos megoldás — emlékszünk rá, $p(t,x)$ tulajdonképpen valószínűség — egy fontos kvalitatív tulajdonsága átöröklődik a numerikus megoldásra is.

A fenti feladat megoldása rövidebb, mint annak megfogalmazása. Most egy minden szempontból sokkal rövidebb feladat következik.

Még egy szorgalmi feladat a bezártság idejére

Mi a jelentése a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = p \;\;, \qquad \forall\; n = 2,3,\ldots$$

azonosságnak a Mendel féle szabályok vonatkozásában?