

KEDVEZŐ GÉN TERJEDÉSE AZ IDŐBEN I. MEMO

AA	Aa	génpárok kombinálódása	MENDEL	$\frac{p^2}{pq}$	$\frac{pq}{q^2}$	kísérő valószínűségek
aA	aa			$\frac{pq}{q^2}$	$\frac{pq}{q^2}$	

Legyen az **A** gén relatív gyakorisága p helyett $(1+s)p$, az **a** géné $1-(1+s)p$, ($0 < s \ll 1$), minden egyes gén-kombinációban. \Rightarrow Tehát a $t \rightarrow (t+1)$ generációváltás során

$$p_{t+1} - p_t = (1+s)^2 p_t^2 + 2(1+s)p_t(1-(1+s)p_t) - p_t \approx 2sp_t(1-p_t) \quad , \quad \text{ami a}$$

$$\dot{p} = 2sp(1-p) \quad \text{differenciálegyenlet explicit Euler közelítése } h = 1 \text{ lépésközzel.}$$

Ez Fisher modellje egy kedvező gén relatív gyakoriságára a $-\infty < t < \infty$ időben.

KEDVEZŐ GÉN TERJEDÉSE TÉRBEN ÉS IDŐBEN II. MEMO

Az 1D térbeliséget a $\frac{\partial^2}{\partial x^2} p$ diffúziós tag hozzáadásával vehetjük/vesszük figyelembe. Idő szerinti lineáris skálázás $\Rightarrow 2s = 1$. Technikai feltétel: legyen $D = 1$.

$$p_t = p(1-p) + p_{xx} \quad \text{Fisher próbafüggvénye} \quad p(t, x) = \varphi(x-ct) \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow -c\varphi' = \varphi(1-\varphi) + \varphi'' \quad \text{ahol } \varphi' = \frac{d}{dz}\varphi \text{ és } z = x-ct \text{ az új, mesterséges idő.}$$

A biológiailag remélt megoldás peremfeltételei: $\varphi(-\infty) = 1 > \varphi > \varphi(\infty)$, $\varphi'(\pm\infty) = 0$.

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi' = \psi \\ \psi' = -\varphi(1-\varphi) - c\psi \end{array} \right\} \quad , \quad \text{ahol a } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ megoldást keressük.}$$

2D Fázisportré-elemzés \Rightarrow **Tétel:** Pontosán akkor létezik $Q \rightarrow P$ trajektória, ha $c \geq 2$.

FOLYTATÁS. UTAZÓ HULLÁMOK I. MEMO

Az, hogy Q és P egyensúlyi helyzetek, az teszi jogossá a Fisher féle heurisztikát. A sok-sok utazó hullám közül a PDE numerika a $c = c_{min} = 2$ hullámsebesség értékehez tartozót mutatja meg, mert egyedül ennek vannak erős stabilitási tulajdonságai.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \Leftrightarrow \quad u(t, x) = f(x-ct) + g(x+ct) \quad , \quad \text{ahol } f, g \text{ tetszőlegesen,}$$

Tehát a klasszikus, lineáris hullámegyenlet általános megoldása egy jobbra és egy balra haladó hullám szuperpozíciója (amelyek a $0 < x < L$ húr végpontjaiban visszaverődnek). A jobbra haladó $u(t, x) = f(x-ct)$ hullámok az $u_t = cu_x$ transzportegyenlet megoldásai.

Önellenőrzés: Rajzoljon front/pulzus típusú $(t, x) \rightarrow u(t, x) = \varphi(x-ct)$ utazó hullámot!

Az $u(t, x) = \varphi(x - ct)$ ($c \in \mathbb{R}$) PRÓBAFÜGGVÉNY \Rightarrow UTAZÓ HULLÁM II. MEMO

Másodrendű parabolikus parciális egyenlet(rendszer) \Rightarrow Közönséges egyenlet(rendszer), ahol két egyensúlyi helyzetet összekötő heteroklinikus trajektóriá(ka)t keresünk.

- $u_t = u(1 - u^2) + u_{xx}$ — Általános Fisher: sebgyógyulás; egyszerű metastabilitás.
- $\dot{S} = -\tau SI + S_{xx}$, $\dot{I} = \tau SI - I + I_{xx}$ — Diffúziós SI-R modell, $S, I \geq 0$.
- $\dot{v} = c\left(w + v - \frac{1}{3}v^3 + I\right) + v_{xx}$, $\dot{w} = \frac{1}{c}(a - v - bw)$ — Diffúziós FitzHugh-Nagumo, $I \in \mathbb{R}$ és $a, b, c > 0$, ahol $b < 1$ és $c \gg 1$ — egyszerűsített Hodgkin-Huxley.

A második rendszer a pestis modellje, ahol az S, I Brown-mozgása szállítja a baktériumokat és a járványt egyaránt. Kibővíthető az s, i változókkal is (egészséges és beteg patkányok). A harmadik rendszer akciós potenciált modellez, v gyors, w lassú változó.