Absztrakt Fogalmak és Tételek. Bevezetés I. Memo

Egy tétel megértéséhez nem az kell, hogy bizonyítani tudjuk, hanem az, hogy

- példákat tudunk rá mondani, ismerjük legegyszerűbb speciális eseteit
- le tudjuk rajzolni, szemléltetni tudjuk
- felfogjuk a benne szereplő feltételek értelmét/szerepét
- pozitív, rámutató érveket sorakoztatunk fel a tétel igaz volta mellett
- tudjuk, mikor és mire használható, alkalmazható, általánosítható
- ismerjük a hozzá kapcsolódó numerikus/számítógépes eljárásokat

Absztrakt Fogalmak és Tételek. Bevezetés II. Memo

Hasonló a helyzet egy absztrakt fogalommal is. Akkor értjük igazán, ha

- példákat tudunk rá mondani, ismerjük legegyszerűbb speciális eseteit
- le tudjuk rajzolni, szemléltetni tudjuk
- van képünk a vele kapcsolatos, rokon fogalmakról
- látjuk szerepét a biomatematika modelljeiben
- tudjuk, mikor és mire használható, alkalmazható, általánosítható
- ismerjük a hozzá kapcsolódó numerikus/számítógépes eljárásokat

Dinamikus Rendszer avagy Dinrend I. Memo

A $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ leképezés *folytonos idejű dinamikus rendszer X–en*, ha igazak rá
(i) Φ folytonos , (ii) $\Phi(0,x)=x \ \ \forall x\in X$, (iii) $\Phi(t,\Phi(s,x))=\Phi(t+s,x) \ \ \forall t,s\in\mathbb{R} \ \ \forall x\in X$

Itt (X,d) metrikus tér, az (ii) és (iii) axiómák pedig egyszerűen az idő múlását fejezik ki az aktuális állapot megváltozásának tükrében. Világos, hogy $\mathbb{R}$ helyére $\mathbb{T}$ is írható, ahol $\mathbb{T}$ az $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $h\mathbb{Z}$ és a $h\mathbb{N}$ ($h>0$ rögzített) bármelyike lehet.

A $\Phi : \mathbb{T} \times X \to X$ leképezés $\mathbb{T}$ *idejű dinamikus rendszer X–en*, ha igazak rá
(i) Φ folytonos , (ii) $\Phi(0,x)=x \ \ \forall x\in X$, (iii) $\Phi(t,\Phi(s,x))=\Phi(t+s,x) \ \ \forall t,s\in\mathbb{T} \ \ \forall x\in X$

Dinamikus Rendszer avagy Dinrend II. Memo

Folytatás: A $\mathbb{T}$ szerinti elnevezések rendre *folytonos idejű szemidinrend, diszkrét (idejű) dinrend, diszkrét (idejű) szemidinrend, és $h>0$ időlépésű diszkrét (szemi)dinrend.*

A $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ és $\mathbb{T}=h\mathbb{N}$ alappéldák rendre
$\Phi(t,x) = x_{0,x_0}(t)$, ahol $x_{0,x_0} : \mathbb{R} \to X = \mathbb{R}^n$ az $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ megoldása illetve ugyanezen kezdetiérték–probléma diszkretizált megoldása $\Phi((k+1)h,x)=\varphi(h,\varphi^k(h,x))$, $k = 0,1,2,\ldots$ ahol $\varphi(h,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a diszkretizáció operátora ($0 < h \le h_0$ small)

Magától értetődik, hogy f és φ eleget kell tegyenek bizonyos símasági feltételeknek. A definíciókat kézenfekvő nem–autonóm közönséges diffegyenletekre is kiterjeszteni, de az ez utóbbiakra vonatkozó kvalitatív elmélet nehéz és mind a mai napig kevéssé ismert.

Dinamikus Rendszer avagy Dinrend III. Memo

Folytatás: Alapfeltevésünk, hogy $f \in C^{p+1}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ és $\phi \in C^{p+1}([0,h_0) \times \mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$.
Legyen $p>0$ egész szám és $h_0>0$. A $\phi : [0,h_0] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ leképezés *p–edrendű egylépéses diszkretizációs operátor* az $\dot{x} = f(x)$ egyenletre, ha alkalmas $K = K(f) > 0$ konstanssal

$$|\Phi(h,x) - \phi(h,x)| \le K h^{p+1} \qquad \forall h \in [0,h_0] \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d .$$

Azt is elvárjuk, hogy $\phi(h,x)$ a h lépésköz és az f függvény x körüli lokális viselkedése ismeretében hatékonyan kiszámítható legyen.
Példák: $X = \phi_{EE}(h,x)$ ahol $X = x + hf(x)$ és $X = \phi_{IE}(h,x)$ ahol $X = x + hf(X)$.

Egyensúlyi helyzet, fixpont, periodikus pont. Szóhasználat Memo

Az $x_0 \in \mathbb{R}^d$ pont *egyensúlyi helyzete az* $\dot{x} = f(x)$ *autonóm differenciálegyenletnek*, ha $f(x_0) = 0$. Az egyensúlyi helyzet kifejezést használjuk a $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ megoldó–operátorra, sőt tetszőleges folytonos idejű dinamikára nézve is. Az $x_0 \in X$ egyensúlyi helyzet, ha $\Phi(t, x_0) = x_0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.

Ha az idő diszkrét, akkor az egyensúlyi helyzet kifejezés helyett inkább fixpontot mondunk: $x^* \in X$ az $F : X \to X$ *leképezés fixpontja*, ha $x^* = F(x^*)$.

A periodikus pont elnevezést egyszerre használjuk folytonos és diszkrét idejű dinamikus rendszerek esetén. Periódusnak általában a minimális periódusidőt nevezzük.

Trajektória, omega–határhalmaz Memo

Az $x \in X$ *ponton átmenő (teljes) trajektória* a $\gamma(x) = \{\, \Phi(t, x) \in X \mid t \in \mathbb{T} \,\}$ halmaz. A $\gamma^+(x) = \{\, \Phi(t, x) \in X \mid t \in \mathbb{T},\, t \geq 0 \,\}$ halmaz a *pozitív féltrajektória*. Ha $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, akkor $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$ $\big($és $\gamma^-(x)\big)$ egyaránt az idővel paraméterezett görbék.

Az $x \in X$ *pont omega–határhalmaza* a $\Phi : \mathbb{T} \times X \to X$ dinamikában az

$$\omega(x) = \{\, y \in X \mid \textit{van olyan } \{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{T} \textit{ sorozat, hogy } t_n \to \infty \textit{ és } \Phi(t_n, x) \to y \,\}$$

halmaz. A $\gamma^-(x)$ negatív féltrajektóriához az $\alpha(x)$ *alfa–határhalmaz* tartozik.

Önellenőrzés: adja meg $\gamma^-(x)$ és $\alpha(x)$ szabatos definícióját, rajzoljon többféle példát!

Bolzano–Weierstrass Tételek a Dinamikában I. Memo

Legyen (X, d) továbbra is metrikus tér. Az $M \subset X$ halmaz a $\Phi : \mathbb{T} \times X \to X$ dinamikus rendszerre nézve *invariáns*, ha tetszőleges $x \in M$ esetén $\Phi(t, x) \in M \quad \forall t \in \mathbb{T}$. Az $M \subset X$ halmaz *pozitíven invariáns*, ha tetszőleges $x \in M$ esetén $\Phi(t, x) \in M \quad \forall t \in \mathbb{T},\, t \geq 0$.

Ha $x \in X$ és a $\gamma^+(x)$ pozitív féltrajektória lezárása kompakt halmaz, akkor

- $\omega(x)$ nem–üres, kompakt és invariáns halmaz
- $t \to \infty$ esetén $d(\Phi(t, x), \omega(x)) \to 0$
- amennyiben $\mathbb{T} \supset \mathbb{R}^+$, akkor $\omega(x)$ összefüggő halmaz

Poincaré–Bendixson Tétel Memo

Legyen $X = \mathbb{R}^2$ és $\mathbb{T} = \mathbb{R}$. Ha $x \in X$ és ha a $\gamma^+(x)$ pozitív féltrajektória (a) korlátos és (b) lezárása legfeljebb véges sok egyensúlyi helyzetet tartalmaz, akkor

- $\omega(x)$ egyensúlyi helyzet: $\omega(x) = \{x_0\}$ vagy
- $\omega(x)$ periodikus pálya: $\omega(x) = \Gamma$ vagy
- $\omega(x)$ heteroklinikus kör: $\omega(x) = \{x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_{N+1} = x_1\}$ $(N \in \mathbb{N})$,
  azaz egyensúlyi helyzetekből és az őket összekötő trajektóriákból álló irányított kör

Utóbbi két esetben az $\omega(x)$ által körbezárt síktartomány tartalmaz egyensúlyi helyzetet

Bolzano–Weierstrass Tétel Kompakt Halmazokra Memo

Az $x \in X$ pont és az $\emptyset \neq Y \subset X$ halmaz távolsága $d(x, Y) = \inf\{d(x, y) \,|\, y \in Y\}$, az Y halmaz $\varepsilon > 0$ sugarú nyílt környezete ($\mathcal{B}$ mint ball/gömb) $\mathcal{B}(Y, \varepsilon) = \{x \in X \,|\, d(x, Y) < \varepsilon\}$.

Az (X, d) tér *nem–üres, kompakt részhalmazai metrikus teret alkotnak*, a Hausdorff féle $d_H(Y, \tilde{Y}) = \max\{\max\{d(y, \tilde{Y}) \,|\, y \in Y\}, \max\{d(\tilde{y}, Y) \,|\, \tilde{y} \in \tilde{Y}\}\}$ metrikára nézve. Itt $d_H(\{x\}, Y) = d(x, Y)$ és $d_H(Y_n, Y) \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 = N_0(\varepsilon)$ hogy $Y_n \subset \mathcal{B}(Y, \varepsilon) \; \forall n \geq N_0$.

Ha $\emptyset \neq Y_n \subset X$ kompakt halmazok és $\exists Y \subset X$ kompakt, hogy $Y_n \subset Y$, $n = 1,2,\ldots$, akkor *egy n_k index–részsorozatra és alkalmas $Y^* \subset Y$ kompakt halmazra* $d_H(Y_{n_k}, Y) \to 0$.

Igazolja a fenti állítást a szokásos BW Tétel alapján, ha Y_n, $n = 1,2,\ldots$ szabályos ötszög!

Stabilitás és Vonzás. Kompakt Attraktorok Memo

Legyen (X, d) metrikus tér és legyen az $\emptyset \neq M \subset X$ kompakt halmaz invariáns a $\Phi : \mathbb{T} \times X \to X$ dinamikus rendszerre nézve. Az M halmaz *stabil* illetve *vonzó*, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\textit{hogy}\; \forall\, t \in \mathbb{T},\; t \geq 0 \;\textit{és}\; x \in \mathcal{B}(M, \delta) \;\textit{esetén}\; \Phi(t, x) \in \mathcal{B}(M, \varepsilon)$$
$$\text{illetve} \quad \exists\, \eta_0 > 0 \;\textit{hogy}\; \forall\, x \in \mathcal{B}(M, \eta_0) \;\textit{esetén}\; d(\Phi(t, x), M) \to 0^+ \;\textit{ha}\; t \to \infty\,.$$

Az M halmaz *aszimptotikusan stabil* vagy más néven *attraktor*, ha egyszerre stabil és vonzó. A (szükségképpen nyílt) $A(M) = \{x \in X \mid d(\Phi(t, x), M) \to 0^+ \;\textit{ha}\; t \to \infty\}$ halmaz az M attraktor *vonzási tartománya* vagy *medencéje*. Ha $A(M) = X$, akkor M *globális*.

Önellenőrzés: adjon definíciókat, rajzoljon ábrákat, ha $M = \{x_0\} = x_0$ egyensúlyi helyzet!

Bolzano–Weierstrass Tételek a Dinamikában II. Memo

Legyen $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ folytonos idejű dinamikus rendszer, $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt halmaz, és tegyük fel, hogy $\Phi(t, \partial K) \subset \mathrm{int}(K)$ minden $t > 0$ esetén. Ekkor az egymásba skatulyázott kompakt halmazok metszeteként előálló $M = \cap\{\Phi(t,K) \mid t \geq 0\}$ halmazra:

- M nem–üres, kompakt, invariáns és összefüggő halmaz
- M attraktor, $t \to \infty$ esetén $d_H(\Phi(t,K), M) \to 0$, és $K \subset A(M)$
- ha K konvex is, akkor M tartalmaz egyensúlyi helyzetet

A K halmaz neve *csapdahalmaz*, amelyet általában erős Ljapunov felület határol.

Nevezetes Példák/Ábrák Polárkoordináta–Rendszerben Memo

$\dot r = 0$, $\dot\varphi = -1$ – az origó az óramutató járásával ellentétes dinamikájú centrum

$\dot r = r(\mu - r^2)$, $\dot\varphi = -1$ – stabilitásvesztő *Hopf bifurkáçió* az origóban

$\dot r = r(1-r^2)$, $\dot\varphi = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ – az $r=1$, $\varphi=0$ egyensúlyi helyzet az origó kivételével mindent vonz, de nem stabil ; az $r=1$ kör és a $\varphi=0$ félegyenes invariánsak

$\dot r = r(1-r^2)$, $\dot\varphi = \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \mu$ – *nyereg–csomó bifurkáció* az aszimptotikusan stabil $r=1$ körvonalon ; az $r=1$ kör és a $\varphi = \pm 2\arcsin\left(\sqrt{\mu}\right)$ félegyenesek (ha $\mu \geq 0$) invariánsak

Bifurkáció mint Stabilitás–Vesztés Memo

$$\left.\begin{aligned} \dot r &= r f(r) \\ \dot\varphi &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \dot x &= y + x f(r) \\ \dot y &= -x + y f(r) \end{aligned}\right. \quad \text{ahol} \quad \left\{\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot x = \dot r\cos(\varphi) - \dot\varphi r\sin(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \dot y = \dot r\sin(\varphi) + \dot\varphi r\cos(\varphi) \end{aligned}\right.$$

$f(r) = \mu - r^2 \;\Rightarrow\;$ *Hopf bifurkáció* növekvő μ mellett a paraméter $\mu = \mu_0 = 0$ értékénél

$\dot x = \mu - x^2$, $\dot y = -y$ *nyereg–csomó bifurkáció* növekvő μ mellett a $\mu = \mu_0 = 0$ értéknél

$$\begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu & -2 \\ 4-\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \textit{stabil fókusz} \to \textit{instabil fókusz} \text{ átmenet ha } \mu = \mu_0 = 0$$

Önellenőrzés: sok–sok ábra, utolsó a T–D nyom–determináns diagrammon (4 átmenet)!

Ljapunov–felület, Ljapunov–függvény I. Memo

Az $N\subset\mathbb{R}^d$ halmaz *erős Ljapunov felület* az (E) $\dot{x}=f(x)$ autonóm differenciálegyenletre nézve, ha van olyan $V:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ C^1 függvény és olyan $c\in\mathbb{R}$ állandó, hogy

$$N\subset\{x\in\mathbb{R}^d \mid V(x)=c\} \quad \text{és} \quad \dot{V}_{(E)}(x)=\frac{d}{dt}V(\Phi(t,x))\Big|_{t=0}=\langle\underline{\mathrm{grad}}V(x),f(x)\rangle<0 \quad \forall x\in N\,.$$

A V *erős Ljapunov függvény* az $\mathcal{N}\subset\mathbb{R}^d$ nyílt halmazon, ha $\langle\underline{\mathrm{grad}}V(x),f(x)\rangle<0 \ \ \forall x\in\mathcal{N}$. Itt $\Phi(t,x)$ az (E) $\dot{x}=f(x)$ differenciálegyenlet lokális megoldó–operátora az $\mathcal{N}$ halmazon.

Mostantól legyen $f(x_0)=0$ és $\mathcal{N}\subset\mathbb{R}^d$ az x_0 egyensúlyi helyzet nyílt környezete.

Ljapunov–felület, Ljapunov–függvény II. Memo

Továbbá tegyük fel, hogy $V(x_0)<V(x)\ \forall\, x\in\mathcal{N}\setminus\{x_0\}$. Ha ezek teljesülnek, akkor

- (a) $\dot{V}_{(E)}(x)\le 0\ \forall\, x\in\mathcal{N} \ \Rightarrow$ az x_0 egyensúlyi helyzet (lokálisan) stabil.
- (b) $\dot{V}_{(E)}(x)<0\ \forall\, x\in\mathcal{N}\setminus\{x_0\} \ \Rightarrow$ az x_0 egyensúlyi helyzet aszimptotikusan stabil.

Ha még $V(x_0)<c_0$ olyan állandó, amelyre $\mathcal{N}_{c_0,\le}=\{x\in\mathcal{N}\mid V(x)\le c_0\}$ korlátos és zárt (mint $\mathbb{R}^d$ részhalmaza), akkor $\mathcal{N}_{c_0,\le}\subset A(x_0)$.

Önellenőrzés: a BW Dinamikában II. Memo szerint $K=\mathcal{N}_{c_0,\le}(?)$ mint Matrjosa–baba?