Absztrakt Fogalmak és Tételek. Bevezetés I. Memo

Egy tétel megértéséhez nem az kell, hogy bizonyítani tudjuk, hanem az, hogy

- példákat tudunk rá mondani, ismerjük legegyszerűbb speciális eseteit
- le tudjuk rajzolni, szemléltetni tudjuk
- felfogjuk a benne szereplő feltételek értelmét/szerepét
- pozitív, rámutató érveket sorakoztatunk fel a tétel igaz volta mellett
- tudjuk, mikor és mire használható, alkalmazható, általánosítható
- ismerjük a hozzá kapcsolódó numerikus/számítógépes eljárásokat

Absztrakt Fogalmak és Tételek. Bevezetés II. Memo

Hasonló a helyzet egy absztrakt fogalommal is. Akkor értjük igazán, ha

- példákat tudunk rá mondani, ismerjük legegyszerűbb speciális eseteit
- le tudjuk rajzolni, szemléltetni tudjuk
- van képünk a vele kapcsolatos, rokon fogalmakról
- látjuk szerepét a biomatematika modelljeiben
- tudjuk, mikor és mire használható, alkalmazható, általánosítható
- ismerjük a hozzá kapcsolódó numerikus/számítógépes eljárásokat

Dinamikus rendszer avagy dinrend I. Memo

A $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ leképezés *folytonos idejű dinamikus rendszer X–en*, ha igazak rá
(i) Φ folytonos , (ii) $\Phi(0,x) = x \ \ \forall x \in X$, (iii) $\Phi(t, \Phi(s,x)) = \Phi(t+s,x) \ \ \forall t,s \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X$

Itt (X,d) metrikus tér, az (ii) és (iii) axiómák pedig egyszerűen az idő múlását fejezik ki az aktuális állapot megváltozásának tükrében. Világos, hogy $\mathbb{R}$ helyére $\mathbb{T}$ is írható, ahol $\mathbb{T}$ az $\mathbb{R}^+ = [0,\infty)$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $h\mathbb{Z}$ és a $h\mathbb{N}$ ($h > 0$ rögzített) bármelyike lehet.

A $\Phi : \mathbb{T} \times X \to X$ leképezés $\mathbb{T}$ *idejű dinamikus rendszer X–en*, ha igazak rá
(i) Φ folytonos , (ii) $\Phi(0,x) = x \ \ \forall x \in X$, (iii) $\Phi(t, \Phi(s,x)) = \Phi(t+s,x) \ \ \forall t,s \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in X$

Dinamikus rendszer avagy dinrend II. Memo

Folytatás: A $\mathbb{T}$ szerinti elnevezések rendre *folytonos idejű szemidinrend, diszkrét (idejű) dinrend, diszkrét (idejű) szemidinrend, és $h > 0$ időlépésű diszkrét (szemi)dinrend.*

A $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ és $\mathbb{T} = h\mathbb{N}$ alappéldák rendre
$\Phi(t,x) = x_{0,x_0}(t)$, ahol $x_{0,x_0} : \mathbb{R} \to X = \mathbb{R}^n$ az $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ megoldása illetve ugyanezen kezdetiérték–probléma diszkretizált megoldása $\Phi((k+1)h, x) = \varphi(h, \varphi^k(h,x))$, $k = 0,1,2,\ldots$ ahol $\varphi(h,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a diszkretizáció operátora ($0 < h \le h_0$ small)

Magától értetődik, hogy f és φ eleget kell tegyenek bizonyos símasági feltételeknek. A definíciókat kézenfekvő nem–autonóm közönséges diffegyenletekre is kiterjeszteni, de ez utóbbiakra vonatkozó kvalitatív elmélet nehéz és mind a mai napig kevéssé ismert.

Korrekt kitűzésű feladatok I. Memo

A matematikai analízis egy feladata korrekt kitűzésű, ha igaz rá:

egzisztencia & *unicitás* & *folytonos függés*

a folytonos függés a feladat összes paraméterére nézve $(A, b; x_0, y_0, f, F; t_0, x_0, f)$ áll fenn: a feladat megfogalmazásának kis hibáit a megoldás csak mérsékelten nagyítja fel

FELADAT	MEGOLDÁS	A FELADAT NEVE és a KORREKT KITŰZÖTTSÉG FELTÉTELE
$Ax = b$	$x = A^{-1}b$	Lineáris Algebrai Egyenletrendszer $\det(A) \neq 0$
$y = f(x)$	$x = f^{-1}(y)$ és $x_0 = f^{-1}(y_0)$	(Lokális) Inverz Függvény Feladat $f \in C^1$, $f(x_0) = y_0$, $\det(f'(x_0)) \neq 0$
$F(x, y) = 0$	$y = y(x)$ és $y_0 = y(x_0)$	(Lokális) Implicit Függvény Feladat $F \in C^1$, $F(x_0, y_0) = 0$, $\det(F'_y(x_0, y_0)) \neq 0$
$\dot{x} = f(t, x)$	$x(t) = x_{t_0,x_0}(t)$	Kezdetiérték Feladat (Globális változata) $f \in C^0$, $x(t_0) = x_0$, $\lvert f(t,x) - f(t,\tilde{x})\rvert \leq L\,\lvert x - \tilde{x}\rvert \quad \forall t \quad \forall x\ \forall \tilde{x}$

Közönséges Differenciálegyenletek I. Memo

Lokális egzisztencia–tétel (Peano Tétel):

Ha $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ a (t_0, x_0) egy környezetében értelmezett és folytonos, akkor az $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ feladatnak létezik megoldása a t_0 egy környezetében.

Nincs unicitás: $x(t) = 0$ és $x(t) = t^3$ egyaránt megoldja a $\dot{x} = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$ feladatot
Lokálisan, a $(t_0, x_0) = (0{,}0)$ körül sem teljesül a Lipschitz egyenlőtlenség: $f(t, x) = 3x^{2/3}$
Megoldás csak t_0 egy környezetében: $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1 \;\rightarrow\; x(t) = \frac{1}{1-t}$

Lokális egzisztencia– és unicitástétel (Picard–Lindelöf Tétel):

Ha még $|f(t,x) - f(t,\tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}|$ is teljesül a (t_0, x_0) egy környezetében, akkor az $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ kezdetiérték–feladat megoldása egyértelmű.

Kiegészítés: egzisztencia és folytonos függés a (t_0, x_0) kezdeti értékre nézve $\Rightarrow$ unicitás.

Közönséges Differenciálegyenletek II. Memo

Peano Tétel $\Leftarrow$ *Brouwer féle Fixpont–Tétel*:
Ha $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^d$ konvex kompakt halmaz és $f : K \to K$ folytonos, akkor az $x = f(x)$ fixpont–egyenletnek létezik x^* megoldása, amelyet az f függvény fixpontjának is mondunk.

Előkészítő definíció Legyen (X, d) metrikus tér. Az $f : X \to X$ leképezés *kontrakció* a $0 \leq q < 1$ *kontrakciós állandóval*, ha $d(f(x), f(\tilde{x})) \leq q \cdot d(x, \tilde{x})$ minden $x, \tilde{x} \in X$ esetén.
Picard–Lindelöf Tétel $\Leftarrow$ *Banach féle avagy Kontrakciós Fixpont–Tétel*:
Legyen $f : X \to X$ kontrakció az (X, d) teljes metrikus téren. Ekkor az $x = f(x)$ egyenletnek egyetlen x^* megoldása van, és minden $x_0 \in X$ kezdőpontra az $x_{k+1} = f(x_k)$ iterációs sorozat x^*–hoz tart, a $d(x_k, x^*) \leq \frac{q^k}{1-q} d(x_0, x_1)$, $k = 0,1,2,\ldots$ konvergencia–becsléssel.

Korrekt kitűzésű feladatok II. Memo

A táblázat megértéséhez a Cramer szabály és a kontrakciós fixpont–tétel elegendő. (A három utolsó feladat mindegyike értelmezhető úgy, mint a kontrakciós fixpont–tétel egy-egy alkalmazása végtelen dimenziós teljes normált térben.) Nem véletlen, hogy a kezdeti és peremfeltételekkel ellátott parciális differenciálegyenletek hiányoznak a táblázatból.

A közönséges differenciálegyenletekkel ellentétben, ahol van általános elmélet, a parciális differenciálegyenletek elmélete típusonként más és más. Klasszikus megoldások, hagyományos függvényosztályok tekintetében a korrekt kitűzöttség ritka.

A korrekt kitűzöttség — ha egyáltalán — az általánosított deriváltakkal definiált függvényosztályokban szokott fennállni. A deriválható függvény és a derivált–függvény fogalma disztribúció– valamint Szoboljev–értelemben egyaránt általánosítható. Parciális differenciálegyenletek közelítő módszereinek megértéséhez és számítógépes végrehajtásához szerencsére nincs szükség igazán kemény absztrakcióra.

Lineáris skálázás és Feladatok normálalakja I. Memo

HŐVEZETÉS Ha eredetileg $u_t = Du_{xx}$, $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]$, akkor *az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük*, $D = 1$, $L = \pi$. A mögöttes matematika a következő:

a $\tau = \alpha t \geq 0$, $y = \beta x \in [0, \beta L]$, $u(t,x) = \mathcal{U}(\alpha t, \beta x) = \mathcal{U}(\tau, y)$ lineáris helyettesítésekkel

ez utóbbi formulát t szerint egyszer, valamint x szerint kétszer deriválva $u_t = \mathcal{U}_\tau \cdot \alpha$, $u_{xx} = \mathcal{U}_{yy} \cdot \beta^2$ adódik, így az α és a β paraméterek optimális megválasztásával

$u_t = Du_{xx}$, $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,L]$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U}_\tau \cdot \alpha = D\mathcal{U}_{yy} \cdot \beta^2$, azaz $\mathcal{U}_\tau = \mathcal{U}_{yy}$ ha $\beta L = \pi$ és $\alpha = D\beta^2$.

Egy Konklúzió: az 1D homogén Dirichlet peremértékfeladat alapmegoldásai "valójában"

$$\text{nem} \quad \exp\left(-D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2 t\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) , \quad \text{hanem} \quad e^{-n^2 t} \sin(nx) , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Lineáris skálázás és Feladatok normálalakja II. Memo

Lotka–Volterra Ha eredetileg $\dot{x} = x(a + bx + cy)$, $\dot{y} = y(A + Bx + Cy)$, akkor a $\tau = \alpha t$, $x(t) = \beta \mathcal{X}(\tau)$, $y(t) = \gamma \mathcal{Y}(\tau)$ lineáris helyettesítésekkel $\dot{x} = \beta \mathcal{X}' \cdot \alpha$, $\dot{y} = \gamma \mathcal{Y}' \cdot \alpha$ alapján

$$\beta \mathcal{X}' \cdot \alpha = \beta \mathcal{X}(a + b\beta \mathcal{X} + c\gamma \mathcal{Y}) \quad , \quad \gamma \mathcal{Y}' \cdot \alpha = \gamma \mathcal{Y}(A + B\beta \mathcal{X} + C\gamma \mathcal{Y}) \qquad \text{és így az}$$

$$\frac{a}{\alpha}, \ \frac{b\beta}{\alpha}, \ \frac{c\gamma}{\alpha}, \ \frac{A}{\alpha}, \ \frac{B\beta}{\alpha}, \ \frac{C\gamma}{\alpha} \qquad \text{értékek közül három}$$

— de nem tetszőleges három — egyenlővé tehető 1-gyel vagy -1-gyel, ha az $\alpha, \beta, \gamma > 0$ líneárisan skálázó paramétereket megfelelően választjuk.

Konklúzió: a 2D Lotka–Volterra feladatban a paraméterek száma 6 helyett 3.

Időmegfordítás az $\dot{x} = f(x)$ közönséges differenciálegyenlet–rendszerben

Számítógéppel az $\dot{x} = f(x)$, $t \in \mathbb{R}$ feladat megoldása az $\dot{x} = f(x)$, $t \geq 0$ és az $\dot{x} = -f(x)$, $t \geq 0$ feladatok együttes megoldását igényli.

A DIFFÚZIÓ $u'_t = -\operatorname{DIV}(\underline{F}) + f$ EGYENLETÉNEK TÍPUSAI MEMO

Az $\underline{F}$ főrész az $u = u(t,x)$ ismeretlenben szokás szerint lineáris, de az f mellékrész/forrástag u–ban nemlineáris is lehet — a kémiai interpretációban $\dot{u} = f(u)$ a reakció.

- diffúzió: $\underline{F} = \underline{F}_{diff} = -\, k_1\, \underline{\operatorname{grad}}\, u$
- advekció: $\underline{F} = \underline{F}_{adv} = k_2 u \underline{v}$, ahol $\underline{v} = \underline{v}(t,x)$ az áramló közeg ismert sebessége
- advekció–diffúzió: $\underline{F} = \underline{F}_{adv-diff} = -\, k_1\, \underline{\operatorname{grad}}\, u + k_2 u \underline{v}$
- reakció–diffúzió: $\underline{F} = \underline{F}_{diff} = -\,\alpha^2\, \underline{\operatorname{grad}}\, u$, de $f = f(u)$ és nem az eddigi $f = f(t,x)$ ha a kémia $\dot{u} = f(u,v)$, $\dot{v} = g(u,v)$, akkor $u'_t = \alpha^2 \Delta u + f(u,v)$, $v'_t = \beta^2 \Delta v + g(u,v)$
- chemotaxis–diffúzió: $\big($a szaporodni is képes baktérium (koncentrációja u) menekül egy kémiai folyamatban képződő méreg (koncentrációja c) elől$\big)$ a $c'_t = \alpha^2 \Delta c + f(c)$ méreg–egyenlethez csatolt $u'_t = \beta^2 \Delta u - \ell\, \operatorname{div}(u\, \underline{\operatorname{grad}}\, c) + g(c,u)$ baktérium–egyenlet mögött $\underline{F} = \underline{F}_{chtaxis-diff} = -\,\ell u\, \underline{\operatorname{grad}}\, c - \beta^2\, \underline{\operatorname{grad}}\, u$ és $\dot{u} = g(c,u)$ állnak

Mindezek a parciális differenciálegyenletek illetve rendszerek
a perem– és a kezdeti feltételekkel együtt értendők.

A Diffúzió 1D Neumann Feladatának Fizikája ($D=1,\ L=\pi$) Memo

Szorzat alakú tartományon (téglatest, körlemez, gömb etc.) a megoldás előállítható klasszikus ortogonális sorfejtésekkel. Diszkretizációs módszerek mindig rendelkezésre állnak.

Ha a feladatban $t\geq 0$ és $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ korlátos tartomány, akkor — amint az a maximum elv megfogalmazásához kell — $\Omega_T=(0,T)\times\Omega$ és $\partial_*\Omega_T=\big(\{0\}\times\overline{\Omega}\big)\cup\big((0,T]\times\partial\Omega\big)$.

MAGA A FELADAT – megoldás sorfejtéssel – diszkretizált megoldás	megmaradási elv	homogenizálódás	maximum elv
$u'_t=u''_{xx}$ & N BC & IC	$\int_0^\pi u(t,x)\,dx=\text{const}$		$\max_{(t,x)\in\overline{\Omega}_T}u(t,x)$ = (proven by Gauss) $\max_{(t,x)\in\partial_*\Omega_T}u(t,x)$
$\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^\infty c_n e^{-n^2t}\cos(nx)$		$u(t,x)\to\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(x)\,dx$ as $t\to\infty$	cannot be easily seen (proven by Pólya)
$\underline{u}_{k+1}=A_N\underline{u}_k$, $\underline{u}_0=\underline{g}$	A_N is a doubly stochastic matrix for $0<\mu=\frac{\tau}{h^2}\leq\frac{1}{2}$	Perron–Frobenius: $A_N^k\to\mathbb{1}\mathbb{1}^T$ as $k\to\infty$ $r=1$, $\underline{v}=\mathbb{1}$, $\underline{w}^T=\mathbb{1}^T$	an easy backward averaging argument

Perron–Frobenius Memo

Legyen $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ és $\exists\ k^*$, hogy $\mathbf{A}^{k^*} > \mathbf{0}$ (azaz $\mathbf{A}$ nemnegatív, primitív mátrix).

Ekkor $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n-1}| \leq \ldots \leq |\lambda_2| < \lambda_1 = r$ (azaz $0 < r$ domináns sajátérték),
$\mathbf{A}\mathbf{v} = r\,\mathbf{v}$, $\mathbf{w}^T\mathbf{A} = r\,\mathbf{w}^T$, domináns sajátvektor jobbról $\mathbf{v} > \mathbf{0}$, balról $\mathbf{w}^T > \mathbf{0}^T$, a $\mathbf{w}^T\mathbf{v} = 1$ normálással,

$$\frac{1}{r^k}\mathbf{A}^k \to \mathbf{v}\mathbf{w}^T \quad \text{ha} \quad k \to \infty\,.$$

Stabil Korfa Memo

Leslie mátrix $\mathbf{L} = \mathbf{L}_n = \mathbf{L}_4$ (ahol is $\min k^*(n) = n+2$, speciálisan $\min k^* = 6$).

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_k > 0 \ \text{ születési/birth }, \ s_k > 0 \ \text{ túlélési/survival ráták}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{r^k}\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} = \frac{1}{r^k}\mathbf{L}^k\mathbf{x}^0 \to (\mathbf{v}\mathbf{w}^T)\mathbf{x}^\mathbf{0} = (\mathbf{w}^T\mathbf{x}^\mathbf{0})\mathbf{v} \quad \text{ha} \quad k \to \infty\,.$$

Karakterisztikus polinom: $p_4(\lambda) = \lambda^4 - b_1 s_1 \lambda^2 - b_2 s_1 s_2 \lambda - b_3 s_1 s_2 s_3$.
Cserebogaras évjáratok (ahol is $b_1 = b_2 = 0$ és $b_3 s_1 s_2 s_3 = 1$): $p_4(\lambda) = \lambda^4 - 1$, de ekkor $\lambda_{1,2,3,4} = \{1, i, -1, -i\}$ (négy ciklikus sajátérték, a mátrix irreducibilis, de nem primitív).

1D Neumann Feladat Memo

$$u'_t = D\,u''_{xx} \quad , \quad u'_x(t,0)=u'_x(t,L)=0 \quad , \quad u(0,x)=g(x)\in[0,1) \quad , \quad t\geq 0\ ,\ 0\leq x\leq L$$

diffúzió–egyenlet , homogén Carl Neumann peremfeltétel , kezdeti feltétel — anyagkoncentráció változása, *homogenizálódása, kiegyenlítődése* zárt kémcsőben

$0\leq u(t,x)<1$ és $\int_0^L u(t,x)\,dx=\frac{1}{L}\int_0^L g(x)\,dx$ akár a kémia akár a matematika miatt

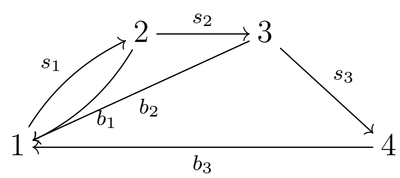
Lineáris skálázás, normálás, "dimenziótlanítás" $\Rightarrow$ $D=1,\ L=\pi$

Diszkretizáçió: $u_{ij}\approx u(i\tau,jh)$ ahol $\tau>0,\ \ h=\frac{L}{N},\ \ i=0,1,2,\ldots,\ \ j=0,1,\ldots,N$
ahol Neumann János szerint legyen érvényes a $\mu=D\,\frac{\tau}{h^2}\leq\frac{1}{2}$ stabilitási feltétel

A diszkretizáció az A_N Perron–Frobenius mátrixhoz vezet
a sarkokban a numerikus peremfeltétel érvényesül és $u_{0j}=g(jh),\ \ j=1,2,\ldots,N-1$

Átmenetgráf Memo

Legyen $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}\geq\mathbf{0}$ továbbra is nemnegatív mátrix.
Az általa meghatározott $\mathcal{G}=\mathcal{G}(\mathbf{A})$ átmenetgráf csúcsai és irányított élei :
$V(\mathcal{G})=\{1,2,\ldots,n\}$ illetve $(\{i\}\to\{j\})\in E(\mathcal{G})\ \Leftrightarrow\ a_{ji}>0$.
Az index–csere értelmes volta az $\mathbf{L}_4$ Leslie mátrix biológiai interpretációjából látszik :



Lemma. Legyen $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ 0–1 mátrix. Ekkor $\{\mathbf{A}^k\}_{i,j}$ a $\mathcal{G}(\mathbf{A})$ átmenetgráf j–edik csúcsából az i–edik csúcsába vezető k hosszúságú irányított utak száma.

Következmény. Általános $\mathbf{A}\geq\mathbf{0}$ esetén $\mathbf{A}^{k^*}>\mathbf{0}$ pontosan akkor teljesül, ha az átmenetgráf bármely csúcsából bármely csúcsába van k^* hosszúságú irányított út.

Világos, hogy ekkor az átmenetgráf mint irányított gráf erősen összefüggő. Mátrixokra átfogalmazva, primitív mátrix szükségképpen irreducibilis is.