A Fitzhugh–Nagumo (1) egyenletrendszer dinamikája:

Az idegroston végighaladó akciós potenciál Hodgkin–Huxley modellje (amely matematikailag egy lineáris parabolikus parciális egyenlet nemlineáris csatolása a kapuváltozókra felírt három közönséges differenciálegyenlethez) mindmáig túl bonyolult ahhoz, hogy alkalmazható legyen akárcsak néhány idegrostból álló hálózat leírására. A FitzHugh (amerikai neurofiziológus, 1961) és Nagumo (japán villamosmérnök, 1962) által egymástól függetlenül felírt egyszerűsített modell két egymáshoz csatolt közönséges differenciálegyenletből álló rendszer, amely szemléltetni és magyarázni képes a Hodgkin–Huxley modell tulajdonságai közül 1.) az ingerküszöb (helyesebb azt mondanunk, hogy a nem pontszerű, de mégis éles ingerküszöb) létezését, 2.) az akciós potenciál gyors, szinte robbanás–szerű kialakulását, valamint 3.) az idegrost regenerációjához (újabb inger "fogadására" való képessége visszanyeréséhez) szükséges pihenési/relaxációs időszakasz relatív hosszúságát. Legfontosabb előnye, hogy nagyobb méretű[1] idegrendszeri hálózatok vizsgálatára is alkalmas. A Fitzhugh–Nagumo egyenletrendszernek térváltozója nem lévén, utazó hullám sem létezhet benne.[2]

Most következik a FitzHugh–Nagumo egyenletrendszer egyik leggyakrabban használt, J. Cronin — bocsánat —, *Dame Jane Cronin: Mathematical Aspects of Hodgkin-Huxley Neural Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1987* könyvéből vett) változata:

$$\dot{x} = c\Big(y + x - \frac{1}{3}\,x^3 + I\Big) \quad , \quad \dot{y} = \frac{1}{c}\Big(a - x - by\Big)\,, \tag{1}$$

ahol $a, b, c > 0$ és $I \in \mathbb{R}$ konstansok, amelyekre $b < 1$ és $c \gg 1$ (és így $b < c$ és $b < c^2$).

[1] az igazán nagy méretű idegrendszeri hálózatokra "fire and integrate" típusú illetve sztochasztikus modelleket szokás használni

[2] Ha a v_{xx} egydimenziós diffúzió–operátort hozzáírjuk–hozzáadjuk a $\dot{v} = v - \frac{1}{3}\,v^3 - w + I$, $\dot{w} = \alpha + \beta v - \gamma w$ rendszer első egyenletének jobb oldalához, akkor reakció–diffúzió egyenletrendszert, *s abban utazó–hullám helyett utazó–pulzust kapunk*, amint az a Scholarpedia "FitzHugh-Nagumo model" ismertetésében gyönyörűen látszik. Végső soron az utazó–pulzus is utazó–hullám, éspedig olyan $v(t,x) = V(x - ct)$, $w(t,x) = W(x - ct)$ alakú két–koordinájú utazó hullám, amely a $\pm\infty$–ben ugyanazt a koordinátakénti konstans értéket veszi fel (deriváltjaik pedig egyaránt a nulla értéket), s amelynek megkerése az $u_t = u(1-u) + u_{xx}$ Fisher–egyenlet esetében tanult módszerek mindegyike alkalmas. A c hullámsebesség nem előre adott: az elvileg lehetséges sokféle hullámsebesség közül a Természet az erős stabilitási tulajdonságokkal rendelkezőt részesíti előnyben: ez az, ami ténylegesen meg szokott valósulni. Itt a v változó feszültség–jellegű és önmagára pozitív visszacsatolással van ráeresztve, míg a w relaxációs jellegű és negatív visszacsatolással hat önmagára.

A (1) egyenlet $I=0$, $a=b=0$ speciális esete megegyezik a Van der Pol egyenlet egyik Lienard féle alakjával:

$$\ddot{x}-\mu(1-x^2)\dot{x}+x=0 \quad \left(y=x-\frac{1}{3}\,x^3-\frac{1}{\mu}\,\dot{x}\text{ okán}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}=\mu\big(x-\frac{1}{3}\,x^3-y\big) \\ \dot{y}=\frac{1}{\mu}\,x\,. \end{cases}$$

A Van der Pol és Bonhoeffer[3] korábbi munkásságával való kapcsolat miatt FitzHugh saját egyenletrendszerét Bonhoeffer–Van der Pol oszcillátornak nevezte el, s ez az eredeti elnevezés Japánban ma is eleven.

Az idő lineáris átskálázása–átparaméterezése révén[4] — könnyen elérhetjük, hogy a (1) rendszer két egyenletének jobb oldalán a formulakezdő $\big(c,\frac{1}{c}\big)$ konstans–pár helyett a $\big(c^2,1\big)$ illetve az $\big(1,\frac{1}{c^2}\big)$ konstans–pár álljon:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}=c^2\big(y+\dots \\ \dot{y}=a-\dots \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x}=c\Big(y+x-\frac{1}{3}\,x^3+I\Big) \\ \dot{y}=\frac{1}{c}\Big(a-x-by\Big) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{x}=y+\dots \\ \dot{y}=\frac{1}{c^2}\big(a-\dots \end{array}\right\}.$$

Mivel $c\gg 1$ miatt $0<\varepsilon=\frac{1}{c^2}\ll 1$, a bal és a jobb oldali egyenletrendszerek egyaránt arra utalnak, hogy x a gyors, y pedig a lassú változó. A bal oldali egyenletrendszer általános felírása

$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon\dot{v}=f(v,w) \\ \dot{w}=g(v,w) \end{array}\right\}, \quad \text{az ún. szingulárisan perturbált közönséges differenciálegyenletek normálalakja,} \tag{2}$$

a jobb oldali egyenletrendszeré pedig

$$\left.\begin{array}{r} \dot{v}=f(v,w) \\ \dot{w}=\varepsilon g(v,w) \end{array}\right\}, \quad \text{ami egy speciális alakú reguláris perturbáció}\,. \tag{3}$$

A (2) differenciálegyenlet–rendszer $0<\varepsilon\ll 1$ paramétere nem a kis paraméterek szokásos $\dot{x}=f(x)+\varepsilon g(x)$ vagy $\dot{x}=f(\varepsilon,x)$ szerepét tölti be. Az $\varepsilon\to 0^+$ határátmenet a (2) egyenletrendszert egy eddig általunk nem ismert feladat–típusba viszi:

$$\left.\begin{array}{r} 0=f(v,w) \\ \dot{w}=g(v,w) \end{array}\right\}, \quad \text{az ún. algebro–differenciál avagy differenciál–algebrai egyenletek normálalakja.} \tag{4}$$

[3]Karl Friedrich Bonhoeffer német kémikus idősebb testvére volt Dietrich Bonhoeffer evangélikus lelkésznek, aki egyik legismertebb áldozata lett a Hitler elleni sikertelen 1944 július 20–ai merényletet követő bosszú–hadjáratnak.

[4]valóban, a $\tau=\vartheta t$, $X(\tau)=x(t)$, $Y(\tau)=y(t)$ (és így $X'(\tau)\,\vartheta=\dot{x}(t)$, $Y'(\tau)\,\vartheta=\dot{y})$ transzformáció az $\dot{x}=f(x,y)$, $\dot{y}=g(x,y)$ egyenletrendszert az $X'=\frac{1}{\vartheta}\,f(X,Y)$, $Y'=\frac{1}{\vartheta}\,g(X,Y)$ egyenletrendszerbe viszi, s most legyen $\vartheta=\frac{1}{c}$ illetve $\vartheta=c$

Világos, hogy a (4) feladat megoldása komoly nehézségekbe ütközik a $0 = f(v,w)$ algebrai kényszerfeltétel miatt. Hozzá képest a (3) egyenlet az $\varepsilon = 0$ határhelyzetben a roppant egyszerű, dimenzió–csökkentő

$$\left.\begin{array}{l} \dot{v} = f(v,w) \\ \dot{w} = 0 \end{array}\right\} \text{ alakot ölti, melynek trajektóriái a vízszintes, } w = \text{const. egyeneseken haladnak.} \tag{5}$$

Most a szokásos matematikai eszközeinket használva visszatérünk a (1) egyenletrendszer vizsgálatához.[5]

A nulla–izoklínák egyenlete

$$y = Q(x) = -\,x + \frac{1}{3}\,x^3 - I \qquad \text{illetve} \qquad y = L(x) = \frac{a-x}{b}\,.$$

Nagy szerencsénkre $Q'(x) = -1 + x^2 \geq -1$ és $L'(x) = -\,\frac{1}{b} < -\,1$. Tehát a paraméterek összes megengedett értékére az $y = Q(x)$ harmadfokú parabolának lokális maximuma van az $x = -1$, lokális minimuma az $x = 1$ koordinátánál. A deriváltakra kapott egyenlőtlenségek geometriai következménye, hogy az $y = L(x)$ egyenletű egyenes és az $y = Q(x)$ harmadfokú parabola egyetlen pontban metszik át egymást. Legyen ez a pont $P = (x_*, y_*)$, amely a (1) rendszer egyetlen egyensúlyi helyzete. Az L egyenes P ponttól balra és felfelé lévő félegyenesén a (1) által meghatározott vektormező vízszintesen jobbra, a komplementer félegyenesen vízszintesen balra mutat. A Q harmadfokú parabola pontjaiban a vektormező függőleges, a P ponttól jobbra lefelé, balra pedig felfelé mutat.

Most részletes *fázisportré–analízis következik az I paraméter függvényében*, amikor is a többi paramétert konstansnak választjuk. Az I növelése a P pontot jobbra tolja el (a függőlegesen lefelé mozgó) harmadfokú parabolán. Ezt a geometriailag nyilvánvaló eredményt analitikusan is könnyű levezetni: a

$$-\,x_*(I) + \frac{1}{3}\,x_*^3(I) - I = Q(x_*(I)) = y_*(I) = L(x_*(I)) = \frac{a - x_*(I)}{b}$$

egyenletet az I szerint deriválva

$$-\,x_*'(I) + \frac{1}{3}\,3x_*^2(I)x_*'(I) - 1 = \frac{-\,x_*'(I)}{b}\,,$$

[5]Látni fogjuk, hogy ezek az eszközök, hiszen (még a végtelen távoli pont esetén is) lokális jellegűek, mennyivel kevesebbet tudnak mint a globális analízis eszközei, amelyek közé a számítógép is besorolódik. Egy mérnök számára az igazán hatékony eszköz a számítógép: de azt is látni fogjuk, hogy a számítógépes eredmények helyes interpretálása végett a (2)–(5) kitérő sem volt teljesen felesleges.

majd ebből

$$x_*'(I)\Big(-1+\frac{1}{b}+x_*^2(I)\Big)=1, \qquad \text{s így} \quad 0<b<1 \quad \text{révén} \quad x_*'(I)>0 \quad \text{adódik} .$$

Vegyük észre, hogy a fenti levezetés az $x_* = x_*(I)$ implicit függvény létezését és egyértelműségét is igazolja.

A végtelen távoli pont taszító, amint azt a $V(x,y)=\frac{1}{2c}\,x^2+\frac{c}{2}\,y^2$ Liapunov függvény mutatja. Valóban, a rendszer szerinti derivált az

$$\frac{d}{dt}\,V(x(t),y(t))\big|_{t=0}=\big(x\dot{x}+y\dot{y}\big)\big|_{t=0}=x\Big(y+x-\frac{1}{3}\,x^3+I\Big)+y\Big(a-x-by\Big)=x^2-\frac{1}{3}\,x^4+Ix+ay-by^2<0$$

egyenlőtlenséghez vezet, amely minden elég nagy x és y értékére teljesül. (Szerencsére az xy vegyes tagok kiestek, s így csak az számít, hogy az x–ben és az y–ban domináns tagok előjele negatív.)

A következő lépés a $P=(x_*,y_*)$ pont körüli linearizálás és a periodikus pályák számbavétele. A P ponthoz tartozó Jacobi mátrixot könnyű meghatározni, és a P pont (mint egyensúlyi helyzet) típusának meghatározása sem nehéz: a nyom–determináns (T–D) diagramm módszere kényelmesen és közvetlenül alkalmazható. Valóban,

$$J(P)=\begin{pmatrix} c(1-x_*^2) & c \\ -1/c & -b/c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T=c(1-x_*^2)-\,b/c<0 \quad \text{pontosan akkor, ha} \quad x_*^2>1-\,b/c^2 \\ D=1-b(1-x_*^2)>0\,, \quad \text{amely szerencsére mindig teljesül} . \end{cases}$$

A P egyensúlyi helyzet stabilitásvizsgálatában tehát öt esetet kell megkülönböztetni, attól függően, hogy a P vízszintes koordinátája hol helyezkedik el a $\kappa_\pm=\pm\sqrt{1-\,b/c^2}\neq 0$ állandókhoz képest:

$$\begin{cases} x_*<\kappa_- & \Rightarrow \quad \text{a} \;\; P \;\; \text{attraktor (a pozitív időben aszimptotikusan stabil)} \\ x_*=\kappa_- & \Rightarrow \quad \text{a} \;\; P\text{–nél Hopf bifurkációval egy aszimptotikusan stabil periodikus pálya születi} \\ x_*\in(\kappa_-,\kappa_+) & \Rightarrow \quad \text{a} \;\; P \;\; \text{repellor (a negatív időben aszimptotikusan stabil)} \\ x_*=\kappa_+ & \Rightarrow \quad \text{a} \;\; P\text{–nél Hopf bifurkációval egy aszimptotikusan stabil periodikus pálya hal me} \\ x_*>\kappa_+ & \Rightarrow \quad \text{a} \;\; P \;\; \text{attraktor (a pozitív időben aszimptotikusan stabil.)} \end{cases}$$

Azt, hogy az $x_*=\kappa_-$ értéknél születő periodikus pályák családja ugyanaz a periodikus pályacsalád, mint amely az $x_*=\kappa_+$ értéknél meghal, azt nem tudhatjuk. Hopf tétele[6] csak azt mondja ki, hogy egy–egy periodikus (és az x_* értékétől folytonosan függő) görbecsalád értelmezve van a paraméter $x_*\in$

[6]Hopf bifurkációs tétele azt a folyamatot írja le — mintapélda a polárkoordinátarendszerben értelmezett $\dot{r}=r(\mu-r^2)$, $\dot{\varphi}=-1$ rendszer — amikor is a paraméter növelése révén egy egyensúlyi helyzet $\mu<0$ aszimptotikus stabilitása áttevődik egy abból fokozatosan kinövő Γ_μ, $\mu>0$ periodikus megoldás–család tagjaira. Esetünkben az ottani

$(\kappa_-, \kappa_- + \varepsilon) \cup (\kappa_+ - \varepsilon, \kappa_+)$ értékeire, ahol $0 < \varepsilon \ll 1$. De ebben a dologban helyesen tesszük, ha rábízzuk magunkat a számítógépre, különösen akkor, ha járatosak vagyunk a szabadon hozzáférhető és MATLAB–kompatibilis, a paraméter menti folytathatóság elvén alapuló MATCONT programcsomag használatában.

Mostantól kezdve tegyük fel, hogy az I, a, b paraméterek egy konkrét megválasztása révén a $P = (x_*, y_*)$ pontot úgy tudjuk rögzíteni, hogy $x_* \in (\kappa_-, \kappa_+)$ legyen, amikor is a P pont mint egyensúlyi helyet repellor (a negatív időben aszimptotikusan stabil). A c paraméter ettől még változtatható marad és változtatni is fogjuk. *Továbbra is feltesszük, hogy* $c \gg 1$.

A számítógép más, az eddigieknél fontosabb periodikus pályák létezését is ki tudja mutatni az (1) rendszerben. Ha egy trajektória kezdőpontját mindkét koordinátában viszonylag nagynak választjuk, akkor az a trajektória az óramutató járásának megfelelően körben forogva, egy szűkülő spirálisra emlékeztető módon rátekeredik–ráhúzódik egy periodikus pályára, amely az $y = Q(x) = -x + \frac{1}{3}x^3 - I$ függvénygörbe lokális maximum– és lokális minimum–pontját (azaz az $M^+ = (-1, Q(-1)) \in \mathbb{R}^2$ és az $M^- = (1, Q(1)) \in \mathbb{R}^2$ pontokat) egyaránt tartalmazza. Ha a c paramétert minden határon túl növeljük, akkor ez (a $c \gg 1$ paraméterrel indexelt) $\{\Gamma_c\}_{c \gg 1}$ periodikus pályacsalád egy szokatlan, általunk eddig még nem látott Γ_∞ alakzatra zsugorodik össze, amely négy részből áll:

a.) az M^+ pont és az $y = Q(x)$ függvénygörbe egy $J \neq M^+$ pontja közötti vízszintesen szakasz
b.) az $y = Q(x)$ függvénygörbe J pontból lefelé induló íve, egészen az M^-pontig
c.) az M^- pont és az $y = Q(x)$ függvénygörbe egy $B \neq M^-$ pontja közötti vízszintesen szakasz
d.) az $y = Q(x)$ függvénygörbe B pontból felfelé induló íve, egészen az M^+ pontig

---

μ bifurkációs paraméter szerepét az I paraméter játssza. Mivel azonban $x_*'(I) > 0$ [és mert $x_*'(I)$ az I korlátos halmazain el van vágva mind a 0–tól, mind a ∞–től], I helyett az x_* is tekinthető paraméternek. Hopf tételének alapvető feltételeit a D és a T tulajdonságai alapján könnyű ellenőrizni:

$$x_*^0 = \kappa_\pm \;\;\Leftrightarrow\;\; T = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-D} \quad \text{valamint} \quad \frac{d\,\mathrm{Re}\lambda_{1,2}}{dx_*}(x_*^0) = 2^{-1}\frac{dT}{dx_*}(x_*^0) = 2^{-1}\Big(-2c(\kappa_\pm)\Big),$$

ami pozitív szám a κ_- és negatív szám a κ_+ értékére. A geometria nyelvén mindez azt jelenti, hogy a két reménybeli bifurkációs pont mindegyikénél a $J(P)$ Jacobi mátrix $\lambda_{1,2}$ sajátértékei tiszta képzetes számok, amelyek az x_* bifurkációs paraméter növelésénel a $\mathbb{C}$ komplex számsík függőleges tengelyét $x_*^0 = \kappa_-$–nál balról jobbra, $x_*^0 = \kappa_+$–nál pedig jobbról balra, nem–nulla sebességgel metszik. Igazából még szükség volna a Hopf féle bifurkációs tétel legutolsó, egyetlen igazán rázós (de szerencsére majdnem mindig egy–valószínűséggel teljesülő) feltételének ellenőrzésére is, de ez utóbbit a mérnöki gyakorlat általában figyelmen kívül hagyja.

Az a.) és a c.) vízszintesen szakaszok a (5), esetünkben tehát az $\dot{x} = y - Q(x) \gtrless 0$, $\dot{y} = 0$ differenciálegyenlet–rendszer jobbra illetve balra haladó trajektóriái, a b.) és a d.) görbeívek pedig a (4), esetünkben tehát a $0 = y - Q(x)$, $\dot{y} = b\big(L(x) - y\big) \lessgtr 0$ algebro–differenciálegyenlet rendszer trajektóriái, amelyek az $y = Q(x)$ függvénygörbe egy–egy darabján lefelé illetve felfelé haladnak.

Mivel a $c \to \infty$ határérték–képzést nem elég finoman vettük figyelembe, nem tudtuk megindokolni (jóllehet a számítógép erőteljesen sejteti), hogy Γ_c periodikus megoldás az a.) és a c.) vízszintesen szakaszokhoz közeli részeinek befutási ideje a 0–hoz, a b.) és a d.) görbeívekhez közeli részeinek befutási ideje pedig a ∞–hez tart.

Minden elegendően nagy c paraméter esetén (azaz ha $c \gg 1$) a Γ_c periodikus pálya aszimptotikusan stabil és (mint periodikus pályára) az unicitás is teljesül rá a Γ_∞ alakzat egy környezetében. A Γ_c periodikus pálya neve *relaxációs oszcilláció*.[7] Menet közben a (1) egyenlet bevezetése előtti bekezdésben felemlített 1.), 2.), 3.) tulajdonságok is (a 3.) tulajdonság csak részben) igazolást nyertek.

[7] A relaxációs oszcillációk kialakulásában az $y = Q(x)$ és az $y = L(x)$ függvények alábbi tulajdonságai játszottak csak szerepet:

i.) a Q függvény grafikonja két végtelen, monoton növekvő ág között egy véges, monoton csökkenő ágat tartalmaz
ii.) a Q függvény lokális s szélsőértékei nem elfajultak, azaz $Q'(s) = 0$, $Q''(s) \neq 0$
iii.) minden más pontban $Q'(z) \neq 0$ és minden pontban $L'(z) < 0$
iv.) a Q és az L függvények grafikonja egymást egyetlen pontban, a Q csökkenő ágának egy belső P pontjában metszil

Mindez természetesen a (1) rendszer

$$\dot{x} = c\Big(y + Q(x)\Big) \quad , \quad \dot{y} = \frac{1}{c}\Big(L(x) - y\Big)$$

alakú általánosításaira érvényes, a c paraméter $c \gg 1$ értékei esetén.

A $\{\Gamma_c\}_{c \gg 1}$ periodikus pályacsalád a továbbra is értelmezhető Γ_∞ alakzatból globális bifurkációval keletkezik. Egy *globális bifurkáció* nem a megszokott lokális analízis része.

Excurzus: A PARAMÉTER MENTI FOLYTATHATÓSÁG ELVE, amelyet a MATCONT programcsomag kapcsán említettünk meg, az egyik legfontosabb az egész matematikai analízisben: keskeny és elvileg bizonytalan, de a gyakorlatban sokszor sikeres átmenetet képez a lokális és a globális, vagy legalábbis a nem–lokális analízis között. Többek között azt is jelenti, hogy egyensúlyi helyzetek vagy periodikus pályák egy, a (nevezzük így) $\mu \in \mathbb{R}$ paramétertől folytonosan függő családja sem nem születhet, sem nem halhat meg *"csak úgy"*, önmagában. Egy periodikus pályacsalád elszállhat a végtelenbe, beleütközhet és beleolvadhat egy már korábban is létező egyensúlyi helyzetbe (ez a Hopf bifurkáció egyik alesete, a Hopf halál), vagy megszűnhet egy másik periodikus pályacsaláddal együtt egy ütközésben, de leválhat róla egy újabb periodikus pályacsalád (ez a periodus–kettőző bifurkáció egyik alesete), sőt 3D–től fölfelé létrejöhet mellette egy invariáns tórusz–család is, és mindez a tipikus esetekben a megfelelő stabilitási és/vagy nyereg–osztályokon akár belül, akár azok között, de nem a teljes összevisszaságban.

A paraméter menti folytathatóság elvét legegyszerűbb formájában a $g(x) = 0$ algebrai egyenlet megoldásainak kiszámítására használhatjuk, ahol $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ síma függvény. Válasszunk egy olyan $g_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ síma függvényt, amelynek ismerjük néhány gyökét: legyen ezek egyike $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Definiáljuk a

$$G : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \qquad (\lambda, x) \to G(\lambda, x) = \big(1-\lambda\big) g_0(x) + \lambda\, g(x)$$

függvényt, és vegyük észre, hogy minden $x \in \mathbb{R}^2$ esetén $G(0,x) = g_0(x)$ és $G(1,x) = g(x)$. Kiindulva a g_0 függvény $x_0 \in \mathbb{R}^2$ gyökéből, a számítógép » *jó eséllyel* « meg tud határozni egy olyan paraméteres $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ görbét, amelyre $G(\lambda, \gamma(\lambda)) = 0$ minden $\lambda \in [0,1]$ paraméter esetén. Ha ez tényleg sikerül, akkor $\gamma(1)$ megoldása a $g(x) = 0$ egyenletnek. De mitól sikerülhet ez és miért van jó esélye a sikernek? Azért, mert az eredeti $g(x) = 0$ egyenletet beágyaztuk a $G(\lambda, x) = 0$ egyenletek egyparaméteres seregébe. Lépésről lépésre a λ paraméter csak kicsit változik, így mindig közeli egyenlet–párokat kell megoldanunk, amelyre kényelmes lokális módszerek vannak: azaz a γ görbe értelmezési tartományát mindig egy kicsivel, $[0,\kappa]$–ról $[0,\kappa+\varepsilon]$–ra tudjuk növelni. Ez pontosan akkor problematikus, ha éppen beleakadunk egy bifurkációba. A bifurkáçió jelentheti azt, hogy onnantól kezdve nem egyetlen görbe megy tovább, hanem mondjuk — és ez a helyzet vasvilla bifurkáçió esetén — három, s így a $g(x) = 0$ egyenlet három különböző, $\gamma_1(1)$, $\gamma_2(1)$, $\gamma_3(1)$ megoldásához jutunk. De az is megtörténhet, s nyereg–csomó bifurkációnál ténylegesen meg is történik, hogy nem tudunk egy közbülső $0 < \lambda_0 < 1$ paraméter fölé menni: az addig előrehaladó görbe szépen visszafordul (és ha egy másik nyereg-csomó bifurkáció nem fordítja megint a növekvő λ–k irányába), akkor ahova végül is befut, az nem a $g(x) = 0$ egyenlet egyik megoldása lesz, hanem amiből kiindultunk, a $g_0(x) = 0$ egyenlet megoldása. Aki mindezeket le tudja rajzolni a 3D két párhuzamos és persze 2D síkja között (az első síkon az $\dot{x} = g_0(x)$, a másodikon az $\dot{x} = g(x)$ differenciálegyenlet egyensúlyi helyzeteivel), az érti jól. És kicsit se legyen szomorú senki, ha sem az első, sem a második próbálkozásra nem sikerül. A tipikus az, hogy egy végleges, valóban jó ábrát is csak fokozatos javítások, finomítások révén kaphatunk.