A legegyszerűbb SIR MODELL, *s a járványterjedési modellek fő szempontjai*

A SIR MODELL *a folytonos időben:*
S = susceptible, fertőzhető, I = infected, fertőzött, R = recovered, gyógyult

$$\dot{S} = -rSI \quad , \quad \dot{I} = rSI - I \quad , \quad \dot{R} = I \quad , \quad S + I + R = 1\,. \tag{1}$$

Mivel a három egyenlet összege

$$\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = \frac{d}{dt}\big(S + I + R\big) = 0$$

és így $S+I+R = M = \text{const}$, az általánosság megszorítása nélkül feltehettük, hogy $M = 1$, ami csak a tömeg mérőszámának megválasztásán múlik. A tényleges modell természetesen

$$\dot{S} = -\pi SI \quad , \quad \dot{I} = \pi SI - \rho I \quad , \quad \dot{R} = \rho I\,, \tag{2}$$

ahol mind a populáció $S + I + R = M = \text{const}$ össztömegét, mind a(z egységnyi időre vett) ρ felgyógyulási rátát (előbbit az össztömeg, utóbbit az idő átskálázásával) már előzetesen 1–nek választottuk. Igy egyetlen paraméter maradt, $M = 1$ esetén az $r = \frac{\pi}{\rho}$ (a kétszeri átskálázásban az $r = \frac{\pi}{\rho}M$) fertőzési/megbetegedési ráta. A továbbiakban az (1) modellt vizsgáljuk.

Mivel az első egyenlet jobb oldala $Sf(S, I, R)$, második egyenlete pedig $Ig(S, I, R)$ alakú, így a kétdimenziós $S = 0$ és $I = 0$ síkok egyaránt invariánsak. Az $I = 0$ sík csupa egyensúlyi helyzetből áll, és ezeken kívül más egyensúlyi helyzet nem létezik. A harmadik egyenlet jobb oldala azonban — a Lotka–Volterra modellekkel ellentétben — nem $Rh(S, I, R)$ szerkezetű: így a kétdimenziós $R = 0$ sík nem invariáns, de a trajektóriák $\dot{R} = I \geq 0$ miatt a biológiailag egyedül értelmes $\{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 \mid S, I, R \geq 0\}$ nemnegatív ortánst a növekvő időben nem hagyhatják el, sőt az $S \geq 0$, $I > 0$, $R = 0$ pontokban oda kívülről, az $R < 0$ térrészből lépnek be. A megoldásokat legjobb az $\mathbb{R}^3$ térben elhelyezkedő, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ csúcspontok által meghatározott szabályos $\mathcal{H}$ háromszöglemezen szemléltetni. A $t \geq 0$ fázisportrét ez a térbeli háromszög hordozza, amely fentiek szerint a nemnegatív időre nézve invariáns. Az egyensúlyi helyzetek az $(1, 0, 0)$ és a $(0, 0, 1)$ csúcspontokat összekötő oldal $I = 0$ és $R + S = 1$, $0 \leq R, S \leq 1$ pontjai.

A MATEMATIKAI TÁRGYALÁS: és ábrák az $r \lesseqgtr 1$ esetszétválasztáshoz !!

$$\frac{dS}{dR} = -rS \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{S} = -rdR \quad \Rightarrow \quad \ln(S) = -rR + c \quad \Rightarrow \quad S = ke^{-rR}\,.$$

Ismerjük tehát a megoldásgörbék vetületeit az $R-S$ síkon (amelyből csak az $R, S \geq 0$, $I=0$, $R+S \leq 1$ háromszöglemez számít): exponenciális lefutás, ahol $k \geq 0$ paraméter. A kérdéses $\mathcal{L}$ háromszöglemez határát, annak átfogójában, $r \leq 1$ esetén a $k<1$ paraméterű exponenciális görbék egy-egy pontban metszik. Visszavetítve ezt a geometriát a $\mathcal{H}$ háromszögre, azt látjuk, hogy a $P_\varepsilon = (1-\varepsilon, \varepsilon, 0)$ ponton átmenő trajektória $r \leq 1$ esetén az $(1,0,0)$ ponttól nem távolodik el túlságosan: a járvány elmarad. Ha azonban $r>1$, akkor a P_ε ponton átmenő trajektóriát — legyen az $\varepsilon > 0$ bármilyen kicsi is — a $k=1$ paraméterű exponenciális görbe (amelyik az $\mathcal{L}$ háromszöglemezbe az $(1,0,0)$ ponton át belépve onnan az $(S^*, 0, R^*)$ ponton át távozik) arra kényszeríti, hogy $\lim_{t\to\infty} S(t) > S^*$, $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$ és $\lim_{t\to\infty} R(t) < R^*$ legyen. Ez bizony járvány a javából, amely azonban anélkül szűnik meg, hogy minden "egyed" megbetegedne.

Ami érdekel minket, az a járvány teljes lefolyása. Az egyenletekből — az egyensúlyi helyzeteket leszámítva $\dot{S} < 0$, $I > 0$, $\dot{R} > 0$ — ugyanaz látszik, amit a józan ész sugall: a még fertőzhetők S "száma" szigorúan monoton fogy, a már felgyógyultak R száma pedig szigorúan monoton növekszik. Ami a fertőzöttek számát illeti, a középső $\dot{I} = (rS-1)I$ egyenletből (S szigorú csökkenése miatt) azt kapjuk, hogy a $t \to I(t)$, $t \geq 0$ függvénynek legfeljebb egyetlen időpillanatban — a járvány tetőpontján — lehet vízszintes érintője és ettől kezdve (vagy ha nincs ilyen időpillanat, akkor a $t_0 = 0$ időponttól kezdve) a fertőzöttek I száma szigorúan monoton fogy és $t \to \infty$ mellett exponenciálisan csökkenve a 0–hoz tart. (Olyan betegséget modelleztünk, amelyben a már felgyógyultak immunissá válnak[1]. Ha korábbról még senkinek nincs immunitása, akkor a logikus kezdeti feltételek $S(0) = 1-\varepsilon$, $I(0) = \varepsilon$, $R(0) = 0$. $\big($Az $\varepsilon \to 0$ határhelyzetben az $\mathcal{L}$ háromszöglemezen a $k=1$ paraméterű $S = e^{-rR}$ exponenciális görbét kapjuk vissza. Természetesen csak akkor, ha $r > 1$. A járvány $I^* = 0$ elmúlta így az $S(t) \to S^*$, $I(t) \to I^* = 0$, $R(t) \to R^*$ határhelyzetnek felel meg[2].$\big)\big)$

[1] azoknak a betegségeknek egy szokásos modellje, amelyeket egymás után többször is meg lehet kapni, a (legegyszerűbb) SIS modell: $\dot{S} = -rSI + \sigma I$, $\dot{I} = rSI - \sigma I$ — itt $S + I = \text{const}$, de az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $I + S = 1$ és $\sigma = 1$. A járványban ekkor nem halhat meg senki, de a (1) modellben R jelentése igazából $R =$ removed, kivett.

[2] itt $S^* = e^{-rR^*}$ és $S^* + I^* + R^* = 1$ miatt $1 - R^* = e^{-rR^*}$,

$$\text{azaz } R^* \text{ az } S = 1 - R \text{ és az } S = e^{-rR} \text{ görbék metszéspontja},$$

pontosabban a metszéspont első koordinátája a $(0, 1]$ intervallumban. Mivel $S = e^{-rR}$ konvex görbe, az $S = 1-R$ egyenest legfeljebb két pontban metszheti. Az első metszéspont (valamennyi $r > 0$ esetén) az $R = 0$, $S = 1$ pont, a második, (R^*, S^*) metszéspont azonban csak $r > 1$ esetén létezik.

A KETTŐS KÖVETKEZTETÉS[3]: fázisportrék a $\mathcal{H}$ háromszöglemezen !!

(a) $r \leq 1$ esetén a járvány nem tud elindulni, az $(1,0,0)$ járványmentes egyensúlyi helyzet stabil.

(b) $r > 1$ esetén a járvány az $(1,0,0)$ egyensúlyi helyzetből nekiszabadul, de van egy küszöb: a populáció $1 - S^* > 0$ része nem fertőződik meg.

Az (1) modellnek (Kermack–McKendrick, 1927) rengeteg általánosítása van[4].

A SIR MODELL *a diszkrét időben:*
S = susceptible, fertőzhető, I = infected, fertőzött, R = recovered, gyógyult

$$S_{t+1} = S_t - \pi S_t I_t \quad , \quad I_{t+1} = \pi S_t I_t + (1-\rho) I_t \quad , \quad R_{t+1} = R_t + \rho I_t \, . \qquad (3)$$

[3]az (a) következtetés látszódik az $\dot{I} = (rS-1)I$, $S \leq 1$, $r \leq 1 \Rightarrow \dot{I} \leq 0$ érvelésből, de a (b) következtetés, a járványküszöb pontos nagysága, és egyáltalán, a járványküszöb létezése nem magától értetődő eredmény: ez (is) a SIR modell konkrét matematikai alakjának, a benne szereplő képleteknek a következménye. Sok tapasztalat szól amellett, hogy a SIR modell ebből a szempontból is jó közelítését adja a valóságnak. Nem szokott mindenki minden járványban megbetegedni. Nagyon érdemes egy pillantást vetni a Wikipedia EPIDEMIC MODEL, BLACK DEATH, PESTIS szócikkeire (utóbbi kettőben a középkort sok szempontból lezáró, az össz–európai népesség harmadát elpusztító 1348–as pestisjárvány térképeivel, valamint a járvány képzőművészeti ábrázolásaival).

[4]Már az I = infective, R = removed (with immunity) szóhasználat is másfajta interpretációkat tesz lehetővé, a matematika változatlanul hagyása mellett. Ezenkívül figyelembe lehet venni a betegség lappangási idejét, a nem és az életkor szerinti különbözőségeket, születéseket és halálokat, szezonális hatásokat, a térbeli–földrajzi terjedést, sőt az emberi beavatkozásokat (távolságtartás, karanténba helyezés, oltásokgyógyszerezés) is: a folytonos idejű determinisztikus modelleket késleltetett, közönséges, integrál és parciális egyenletek írják le. Mostanában nagy keletje van a nagyméretű hálózatokon értelmezett olyan sztochasztikus modelleknek, amelyek a hagyományos SIR modell "bármely két egyed találkozása egyformán valószínű" implicit előfeltevésének tagadásából indulnak ki. A hálózat/gráf csúcsai az egyedeknek, állandó vagy sztochasztikusan változó élei pedig az egyedek találkozásainak felelnek meg, minden egyes egészséges–fertőző találkozásból csak bizonyos, egyedi, véletlen valószínűséggel lesz új megbetegedés, a lappangásnak és a gyógyulásnak egyedfüggő ideje van, az egyedek nem feltétlenül immunizálódnak etc. etc. — a véletlenek bizonyos eloszlások szerint valósulnak meg.

A populációdinamikai, járványterjedési (valamint a kémiai reakciók kinematikáját leíró) modellek a matematika és a számítástechnika alkalmazásainak leghálásabb területei közé tartoznak. A közönséges differenciálegyenletek–alapmodellek roppant egyszerűek, megértésükhöz az elemi matematikai analízis ismeretei tökéletesen elegendőek, jól mutatják annak a biológiai interpretációkban is megjelenő erejét, kiválóan alkalmasak tanulásra–tapasztalatszerzésre. Az óvatosság mégis helyénvaló: a valóság sokkal bonyolultabb. Jobban körülhatárolt, kevésbé általános, matematikailag is keményebb modellekre van szükség, amikor a matematika abban segít, hogy a konkrétról tudjunk meg többet, kvantitatíve és kvalitatíve egyaránt. Ami az igazán nehéz, az a változtatható paraméterek kezelése, a korlátozó rendelkezések bevezetésének és feloldásának végigvitele.

Formálisan a folytonos idejű (2) dinamika $h = 1$ lépésközzel történő explicit Euler módszer szerinti diszkretizáltjáról van szó. Magától értetődik, hogy a biomassza össztömegére vonatkozó $\dot{S} + \dot{I} + \dot{R} = \frac{d}{dt}\big(S + I + R\big) = 0$ megmaradási tételt most külön kell igazolni. Valóban, a három egyenlet összeadásával

$$S_{t+1} + I_{t+1} + R_{t+1} = S_t + R_t + I_t \quad , \quad t = 0, 1, 2, \dots \, ,$$

ahol az össztömeg választása az általánosság megszorítása nélkül $M = 1$. A (3) modell igazsága mellett közvetlenül, a folytonos idejű (2) modellre való hivatkozás nélkül is lehet érvelni. Az SI szorzat jelenlétét ugyanaz indokolja, mint a kvadratikus xy tag szerepeltetését a klasszikus Lotka–Volterra rendszerben. A diszkrét időt azonban nem lehet tetszőleges paraméterrel átskálázni, tehát a $\rho = 1$ választás most nem lehetséges (amennyiben az explicit Euler módszer lépésközeként a $h = 1$ értékhez ragaszkodunk. A $\rho = 1$ választás a (3) modellben egyébként azt jelentené, hogy az aktuálisan betegek egy időegységgel később már mind fel is gyógyultak.)

A (3) modell trajektóriáit ugyancsak az idő paraméterezi, de most nem folytonos görbéket, hanem diszkrét pontsorozatokat kapunk. A korábbi $\mathcal{H} = \{(S, I, R) \in \mathbb{R}^3 \mid S + I + R = 1 \, , \, S, I, R \geq 0\}$ háromszöglemez $(1, 0, 0)$ és a $(0, 0, 1)$ csúcspontjait összekötő $I = 0$ és $R + S = 1$, $0 \leq R, S \leq 1$ oldal minden pontja a diszkrét dinamika fixpontja, és az $I = 0$ és $R + S = 1$ pontokon kívül más fixpontok nincsenek. A $\mathcal{H}$ háromszöglemez a nem–negatív időre most nem feltétlenül invariáns — hiszen a diszkrét trajektóriák elvben átugorhatnák az $S = 0$ és $I = 0$ síkokat — $S_t + I_t + R_t = 1$ okán más módon nem juthatnak ki a $\mathcal{H}$ háromszögből. *Adott* $(S_0, I_0, R_0) \in \mathcal{H}$, $I_0 > 0$ *kezdeti értékek mellett* a $\pi > 0$ és a $\rho > 0$ paramétereket úgy kell megválasztani, hogy ez ne következzék be. Azonnal látszik, hogy ehhez a $0 < \pi \leq 1$, $0 < \rho \leq 1$ természetes feltételek (jóllehet nem feltétlenül szükségesek, de mindig) elegendőek, amikor is R_t monoton nő, S_t pedig monoton csökken, I_t változása pedig $\pi S_t + 1 - \rho$ előjelétől függ. A monotonitás és a korlátosság miatt így $S_t \to S_\infty$, $R_t \to R_\infty$ valamint $I_t \to I_\infty$ (ez $S_t + I_t + R_t = 1$, $t = 0, 1, 2, \dots$ következménye), ahol a $\mathcal{H}$ háromszöglemez zárt halmaz voltát is használva $(S_\infty, I_\infty, R_\infty) \in \mathcal{H}$. A diszkrét dinamika folytonossága miatt $(S_\infty, I_\infty, R_\infty) \in \mathcal{H}$ fixpontja a dinamikának, tehát $I_\infty = 0$. Azt is látjuk, hogy az $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$ sorozat elegendően nagy indextől kezdve már szigorúan monoton csökken és legfeljebb egy maximális értéke lehet, ahogyan azt a folytonos idejű (1) dinamikánál is megmutattuk.

A folytonos idejű korosztályos, kontakt–mátrixos SIR MODELL*:*

Folytonos idejű korosztályos, kontakt–mátrixos SIR modell alatt az alábbi $j = 1, 2, \ldots, K$ differenciálegyenlet–rendszert értjük (amely tehát $3K$ egyenletből áll):

$$\left.\begin{array}{l} \dot{S}_j(t) = -\pi S_j(t) \sum_{k=1}^{K} c_{k,j} I_k(t)/N_k \\ \dot{I}_j(t) = \pi S_j(t) \sum_{k=1}^{K} c_{k,j} I_k(t)/N_k - \rho I_j(t) \\ \dot{R}_j(t) = \rho I_j(t) \end{array}\right\} .$$

Az S, I, R betűk jelentését már nem szükséges újból megadni. A mögöttük álló alsó indexek azt jelzik, hogy a teljes populációt K korosztályra bontottuk, ahol a $k = 1$ indexű a legfiatalabb, etc., a $k = K$ indexű a legidősebb korosztály. A k–adik korosztályban N_k, $k = 1, 2, \ldots, K$ az egyedek száma.

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a dinamika érdekes része olyan, relatíve rövid idő alatt játszódik le, hogy az egyes korosztályok között nincsen átmenet, azok $S_j + I_j + R_j = N_j$, $j = 1, 2, \ldots, K$ egyedszáma tehát konstansnak vehető.

Minden egyes fertőzött–fertőzhető kontaktusnál — függetlenül az érintett korosztályoktól — a megbetegedési ráta π. A fertőzöttek gyógyulási rátája pedig ρ, minden korosztályban ugyanaz.

A $c_{k,j}$ nem–negatív konstans — a C kontaktus–mátrix k–adik sorának j–edik eleme — azt mondja meg, hogy egy, a k–adik korosztályba tartozó egyednek egy nap alatt átlagosan hány kontaktusa van a j–edik korosztályba tartozó egyedekkel. A két korosztály egyedei közötti kontaktusok kétféleképpen is összeszámolhatjuk, ezért $N_k c_{k,j} = N_j c_{j,k}$, $k, j = 1, 2, \ldots, K$.

A járványmodelleket arra használjuk, hogy segítségükkel adott járvány várható lefolyását előre jelezhessük. A $C = C_{norm}$ mátrix a betegség megjelenése előtti normális állapot teljes populációjának kontaktusaira vonatkozik. Kontaktus alatt két egyed olyan közeli találkozását értjük, amikor a fertőzést okozó baktérium vagy vírus egyáltalán átadható volna.

Ami a koronavírust illeti, a korlátozó rendelkezések szigorúak és már akkor életbe lépnek, amikor alig–alig van tényleges megbetegedés. A korlátozó rendelkezések — a kontaktusok számát csökkentendő — a C_{norm} mátrixot egy C_{korl} mátrixra változtatják. Így a korlátozó rendelkezések várható hatása jól prognosztizálható $\big($legalábbis egy ideig, a járvány felfutó szakaszában és persze csak akkor, ha a meghirdetett korlátozásokat a lakosság magára nézve kötelezőnek tekinti (önként vagy állami kényszerítések hatására)$\big)$.

Félévközi házi feladat: A.) Három korosztályt különböztetünk meg, fiatalokat, középkorúakat és időseket, akik egy adott ország lakosságának rendre negyedét, felét és negyedét teszik ki. A betegség felbukkanása előtt a kontaktus–mátrix

$$C = C_{norm} = \begin{pmatrix} 40 & 14 & 6 \\ 7 & 21 & 4 \\ 6 & 8 & 14 \end{pmatrix} . \quad (N_k c_{k,j} = N_j c_{j,k},\ k, j = 1, 2, 3 \text{ rendben .})$$

A $t \to S_j(t)$, $t \to I_j(t)$, $t \to R_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ a görbék megrajzolása által határozza meg a járvány menetét! A kiindulási feltétel az, hogy a felnőtt lakosság egy ezrelékében már jelen van a járvány, de másutt még nincsen és nem is volt. A két járvány–paraméter[5] legyen $\pi = 0.0046875$ és $\rho = 0.06$.

B.) Most a szabad lefolyású járvány erejét szeretnénk korlátozó rendelkezésekkel csökkenteni, s ezáltal a járványt el–laposítani.

Fogalmazza meg, mi a szokásos korlátozó rendelkezések hatása a $C = C_{korl}$ mátrix egyes elemeire! Kísérletezzen ki olyan $C = C_{korl}$ mátrixokat, amelyek a járványt elviselhetővé teszik! Az elviselhetőség elsődleges kritériumának vegye a $t \to 0.0001 I_1(t) + 0.001 I_2(t) + 0.05 I_3(t)$ függvény maximumának adott korlát — az egészségügyi ellátó–rendszer teherbírása — alá történő szorítását! Helyes–e a $C = C_{korl}$ mátrix összes elemét nullának választani? Milyen konkrét számnak feleltetné meg az *egészségügyi ellátó–rendszer teherbírása* indikátort, ha a gazdaság teherbírására is ügyelnie kell? Ezek még egy olyan játék–feladatban is nagy–erőst elgondolkodtató kérdések, mint a mostani. Rajzolja meg a $t \to S_j(t)$, $t \to I_j(t)$, $t \to R_j(t)$, $j = 1, 2, 3$ a görbéket abban az esetben, amelyet a járvány szempontjából a leginkább elviselhetőnek tart! **Vége.**

Mind *a valóságos helyzet mérhetősége–mérése* mind *a korlátozó rendelkezések feloldásának véghezvitele* ... ezekhez a kérdésekhez képest valóban gyermekded játék–feladattal van/volt dolgunk.

TANULJANAK STATISZTIKÁT!!!!
Olyan statisztikát, amely viszonylag jól alkalmazható
bizonytalan, egymástól esetenként strukturálisan függő adatokra!
A NYERS ADAT!!!!

[5] Úgy saccolom, hogy ekkor masszív járvány alakul ki — ha tévedek, akkor kérem a megadott járvány–paraméterek megfelelő módosítását ... MOLNÁR ZSÓFIA *numerikus kísérletei* — köszönet értük!!! — *alapján* a π korábbi értékét már módosítottam is!

Véletlen gráfokról dióhéjban: A véletlen gráfok három leggyakrabban tárgyalt típusa

- Erdős–Rényi gráfok (szokásos a Bernoulli gráfok elnevezés is)
- Strogatz–Watts gráfok (szokásos a kisvilág — smallworld — gráfok elnevezés is)
- Barabási–Albert gráfok (szokásos a skálafüggetlen — scalefree — gráfok elnevezés is)

Először a skálafüggetlenség gráfelméleten kívüli jelentését vizsgáljuk meg.

Skálafüggetlenség: A legszűkebb, kizárólag *matematikusok által használt definíció*: egy $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ folytonosan deriválható függvény skálafüggetlen, ha van olyan $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy

$$f(cx)=g(c)f(x)\quad \forall\, c,x>0\,. \tag{4}$$

A (4) azonosság *függvényegyenlet*[6]: olyan algebrai összefüggés, amely a változók minden megengedett értékeire teljesül, és amelyben az ismeretlen(ek) egy (vagy több) függvény.

Az (4) függvényegyenlet megoldásai a hatványfüggvények. Valóban, ha $f(x_0)=0$ valamely $x_0>0$ értékre, akkor a $c>0$ változtatásával $f(x)\equiv 0$ adódik. Tehát a folytonosság miatt az összes többi esetben $f(x)>0$ vagy $f(x)<0$ minden $x>0$ esetén. Az algebrai azonosságról egy differenciálegyenletre áttérve, szellemes de teljesen elemi lépések után $f(x)=k\,x^r$ adódik, ahol k és $r=\frac{f'(1)}{f(1)}$ valós paraméterek:

$$\frac{f(cx)}{f(x)}=g(c)\ \Rightarrow\ \frac{f'(cx)\,c\,f(x)-f(cx)\,f'(x)}{f^2(x)}=0\ \Rightarrow\ f'(c)\,c\,f(1)-f(c)\,f'(1)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{f'(c)\,c}{f(c)}=\frac{f'(1)}{f(1)}\ \Rightarrow\ \int\frac{f'(c)}{f(c)}\,dc=\int\frac{r}{c}\,dc\ \Rightarrow\ \ln(f)=r\,\ln(c)+\mathcal{C}\ \Rightarrow\ f(c)=k\,c^r.$$

[6] A leghíresebb a Cauchy féle $f(x+y)=f(x)+f(y)\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$ függvényegyenlet, amelynek összes folytonos megoldása $f(x)=kx$ alakú, ahol a $k\in\mathbb{R}$ paraméter. Az $f(1)=1$ normálás mellett a Cauchy féle függvényegyenlet egyetlen folytonos megoldása $f(x)=x$ (nem–folytonos megoldások is vannak bőséggel, de ezek egyike sem lesz (Lebesgue értelemben sem) mérhető függvény). Az elemi függvények szokásos azonosságainak illetve azonosságlistáinak mindegyike felfogható függvényegyenletként illetve függvényegyenlet–rendszerként is, amelynek — alkalmas regularitási/símasági és normálási feltételek esetén — egyetlen megoldása van, maga a kérdéses elemi függvény illetve függvénycsalád.

A c változó helyébe rendre x–et és cx–et írva, a (4) azonosság alapján $g(c) = c^r$ adódik.[7]

A *hétköznapi szóhasználatban a* SKÁLAFÜGGETLENSÉG egy folytonos eloszlás f sűrűségfüggvényére utalva azt jelenti, hogy az $x \to \infty$ aszimptotikában $f(x) \approx a\,\frac{1}{x^\gamma}$, ahol $a > 0$ és $\gamma > 1$ állandók. (Látni fogjuk, ez a definíció a $P(\xi = k) \approx a\,\frac{1}{k^\gamma}$ formula révén diszkrét eloszlásokra is kiterjeszthető.) A skálafüggetlenség csak az eloszlás aszimptotikájára vonatkozik: a sűrűségfüggvény aszimptotikája — a "power law" szabályt követve — legyen olyan, mint az $\frac{a}{x^\gamma}$ hatványfüggvényé. Az $y = \frac{a}{x^\gamma}$ függvénykapcsolat szokásos ábrája az $X = \log(x)$, $Y = \log(y)$ új változókban az $Y = -\gamma X + \log(a)$ egyenes. A hatványfüggvény negatív kitevője tehát iránytangensként is értelmezhető.

A skálafüggetlen eloszlások prototípusa a *standard Cauchy eloszlás*, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \quad , \quad x \to f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \,.$$

A várható érték a szokásos értelemben nem létezik, de az $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ integrál Cauchy féle főértéke 0. A szórás létezése még ilyen gyengített értelemben sem menthető, a szórás nem definiált (ha valaki nagyon akarja, végtelenül nagy). A standard Cauchy eloszlásból affin helyettesítésekkel kapjuk a Cauchy eloszlások három–paraméteres családját.

A *kétparaméteres Pareto eloszlások* is skálafüggetlenek. Az $x_m > 0$ és $\alpha > 0$ paraméterű Pareto eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f_{x_m,\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha x_m^\alpha \, \frac{1}{x^{\alpha+1}} & \text{ha} \quad x \geq x_m \\ 0 & \text{ha} \quad x \leq x_m \,. \end{cases}$$

A várható érték és a szórásnégyzet az $\alpha > 1$ illetve az $\alpha > 2$ esetekben lesz csak véges:

$$E(\xi_{x_m,\alpha}) = \frac{\alpha x_m}{\alpha - 1} \qquad \text{és} \qquad D^2(\xi_{x_m,\alpha}) = \frac{\alpha x_m^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \,.$$

A Pareto eloszlás klasszikus interpretációja a jövedelmek eloszlása egy gazdaságban, ahol $x_m > 0$ a minimálbér és $\alpha > 1$ egy, az adott gazdaságra jellemző állandó. Pareto száz évvel ezelőtti nevezetes, híres–hírhedt

[7] A skálafüggetlen elnevezés a lineáris $X = cx$, $Y = dy$ átskálázás olyan $y = f(x) \Leftrightarrow Y = F(X)$ lehetőségére utal, amikor $F \equiv f$ marad. Minden $c > 0$ esetén van olyan $d = g(c) > 0$, hogy $y = f(x) \Leftrightarrow Y = f(X)$. Ez pontosan azt jelenti, hogy a $g(c)f(x) = f(cx)$ formula azonosság az $x > 0$ (és a $c > 0$) valamennyi értékére: az átskálázás mit sem változtat az f függvényen.

80–20 szabálya (mely szerint az összjövedelem 80 százaléka jut a lakosság leggazdagabb 20 százalékának) az $\alpha = \frac{\ln(5)}{\ln(4)} = 1.161\ldots$ értéknek felel meg.[8]

A skálafüggetlenség fogalma az elmúlt 20 évben két szempont miatt vált megkerülhetetlenül fontossá. Az egyik az, hogy a tapasztalat szerint az úgynevezett szociális hálózatok/gráfok nagy része — ilyen az internet és a twitter is (de a facebook nem) — skálafüggetlennek tekinthető, a csúcsok fokszámainak aszimptotikus $P(\deg(v) = k) \approx a\,\frac{1}{k^\gamma}$ eloszlásával, $2 < \gamma \leq 3$ kitevő mellett. Létezik néhány nagyon magas fokszámú, ritka, de az adott gráf/hálózat egészében kiemelt szerepet játszó csúcs, amelyeket a küllős kerékagy angol megfelelőjével *hub*–nak hívunk. Barabási–Albert László és Albert Réka kutatásai úttörők voltak ezen a területen. A másik ok a *ritka jelenségek* alapvető fontosságának felismerése.[9]

Erdős–Rényi gráfok: Adva van n csúcspont és egy $0 < p < 1$ szám. Az n csúcspont között lehetséges $\binom{n}{2}$ él mindegyikét p valószínűséggel behúzzuk. Az így kapott $\mathcal{G}(n,p)$ gráf csúcsainak fokszámeloszlása a

$$P(\deg(v) = k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}\ , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

binomiális eloszlás, amely nagy n–re jól közelíthető a $\mathcal{N}(\mu,\sigma) = \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ normális eloszlással. Az $np = \lambda > 0$, $n \to \infty$ határátmenetben a

$$P(\deg(v) = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ , \quad k = 0, 1, \ldots$$

[8]A jövedelem és a vagyon megoszlását sok más módon is szokás modellezni, többek között a lognormális eloszlással. (Jóllehet az ilyen sommás megállapítások mindig erősen vitathatók, egyes becslések szerint a Föld jelenlegi felnőtt lakosságának 69 százaléka az, amely az összvagyon 3 százalékát birtokolja, a legszegényebb 50 százaléknak pedig pontosan annyi vagyona van, mint a leggazdagabb 62 személynek.)

[9]A 2008–as gazdasági világválságot a pénzügyi matematika nem jelezte előre — a rossz nyelvek szerint nem kevés pénzügyi matematikus sejtette azt, ami végül is bekövetkezett, de a saját jól felfogott érdekében a "hallgatni arany" csendben maradást okosabbnak látta — olyasmi történt, aminek a korábbi sztochasztikus modellek szerint elhanyagolhatóan kicsi volt a valószínűsége. A nagyon kicsiny valószínűségű, de óriási hatásokat okozó jelenségekkel külön tudományág foglalkozik azóta, a *ritka jelenségek* tudománya. A Fukushimai Atomerőmű balesete is egyike volt a tipikus ritka jelenségeknek. A földrengés azonnal elszakította az elektromos távvezetékeket, de magában az erőműben nem okozott komoly károkat. De a tervezők nem gondoltak arra, hogy egy kivételesen erős cunami tönkreteheti az atomreaktor hűtési rendszerének mindkét (egymástól és a szokásos külső áramellátástól egyaránt független) tartalék áramfejlesztő egységének generátorait. Elég lett volna öt méterrel magasabbra helyezni őket, és akkor semmi baj nem történik. Szerencsére a reaktortartály — nem úgy, mint az ukrajnai Csernobilban, ahol a katasztrófát súlyos emberi felelőtlenség okozta — nem olvadt ki. A koronavírus járvány is ritka jelenség.

Poisson eloszlás a határérték.

Az Erdős–Rényi gráfokra jellemzőek *a határértékképzés kritikus konstansai*[10]. Ezek a kritikus konstansok a gráf bizonyos vagy–vagy tulajdonságaival függenek össze, amelyek az egyes esetekben aszimptotikusan egy valószínűséggel teljesülnek. Hogy csak a legegyszerűbb példákat vegyük,

$$\begin{array}{lll} \lim_{n\to\infty} \frac{np}{\ln(n)} < 1 & \Rightarrow & \mathcal{G}(n,p) \text{ nem összefüggő} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{np}{\ln(n)} > 1 & \Rightarrow & \mathcal{G}(n,p) \text{ összefüggő} \end{array}$$

és

$$\begin{array}{lll} \lim_{n\to\infty} np < 1 & \Rightarrow & \mathcal{G}(n,p) \text{ maximális komponensének nagyságrendje } \mathrm{const}\cdot\ln(n) \\ \lim_{n\to\infty} np > 1 & \Rightarrow & \mathcal{G}(n,p)\text{–ben pontosan egy óriás–komponens van, } \mathrm{const}\cdot n \text{ nagyságrenddel}\,. \end{array}$$

Strogatz–Watts gráfok[11]: a Watts–Strogatz konstrukció az n csúcsú d–reguláris körgráfból indul ki, amelynek $\frac{nd}{2}$ számú éle van. (Itt $2 \leq d < n$ szükségképpen páros szám: a d–reguláris körgráfot a hagyományos körgráfból kiindulva úgy kapjuk meg, hogy minden egyes csúcsot a tőle jobbra és balra $\leq \frac{d}{2}$ hosszúságú úttal elérhető többi csúccsal is közvetlen éllel kötjük össze. A gyakorlatban szokásos paraméter–választás $1 \ll \ln(n) \ll d \ll n$.) Körbemenve a $V_1, V_2, \ldots, V_n$ csúcsokon, a V_i csúcstól "hátrafelé/balra induló" $\frac{d}{2}$ él mindegyikét $0 \leq \beta \leq 1$ valószínűséggel kicseréljük egy akkor–éppen–nem–élre, amelynek egyik végpontja a V_i csúcs marad (az akkor–éppen–nem–élek közül az egyenletes eloszlás szerint válogatva). Így az eredeti d–reguláris körgráf minden egyes élére pontosan egyszer kerül sor, és a konstrukció mindvégig kizárja többszörös vagy hurokélek létrejöttét. A $\beta = 0$ esetben az eredeti d–reguláris körgráf változatlan marad, a $\beta = 1$ esetben pedig — jóllehet minden csúcs fokszáma legalább $\frac{nd}{2}$ marad — lényegében egy $\mathcal{G}(n,p)$ Erdős–Rényi gráfot kapunk, ahol (hiszen az élek száma nem változik) $p = \frac{nd}{2}/\binom{n}{2}$. A β interpolációs paraméter szokásos választása egyébként $0 < \beta \ll 1$.

[10] A határértékképzés kritikus konstansai gyakori szerephez jutnak bizonyos fizikai jelenségek — legyen ez most a fentről lefelé történő átszivárgás egy porózus közegen — sztochasztikus modellezésénel (más szóval a statisztikus fizikában): Tekintsük a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rácsgráfot, majd egymástól függetlenül, azonos $0 < p < 1$ valószínűséggel töröljük annak minden egyes élét. A kérdés az, van–e az így meghatározott síkgráf komplemeterhalmazában olyan folytonos görbe, amely a "végtelen magasságot a végtelen mélységgel" köti össze, abban az értelemben, hogy sem az északi, sem a déli irányban nem korlátos. A válasz a következő: ha $p > \frac{1}{2}$, akkor egy valószínűséggel létezik ilyen görbe, ha viszont $p < \frac{1}{2}$, akkor egy valószínűséggel nem létezik.

[11] ez a "kisvilág" (rövid utak, magas klaszterezettség) véletlen gráfok konstrukciójának klasszikus példája: "nagyvilág" gráfra a rácsgráfok a legjobb példa — természetesen egy rácsgráf soha nem lehet véletlen, és struktúrája szerint egy celluláris automata cellarendszerével azonosítható, a rajta definiált dinamika azonban nagyon is lehet sztochasztikus

Barabási–Albert gráfok: a Barabási–Albert konstrukció kiindulópontja bármely n_0 csúcspontú $\mathcal{G}_{n_0}$ (szokás szerint összefüggő) gráf lehet, amelyhez lépésenként mindig egy új csúcspontot veszünk hozzá. Az új csúcspontot és a már korábban meglévő csúcspontokat rendre $0 < m \leq n_0$ számú éllel kötjük össze, a párhuzamos és a hurokéleket most is kizárva. Az új élek behúzása azonban nem egymástól független véletlenek szerint történik, hanem preferenciákat, a régi csúcspontok tudatos súlyozását követi. Az $n_0 + i + 1$–ik $(i = 0, 1, \ldots)$ új csúcspontnak a j–edik $(j = 1, 2, \ldots, n_0 + i)$ csúcsponttal való összekötése annál valószínűbb, minél nagyobb a j–edik csúcspont aktuális fokszáma. A Barabási–Albert preferenciaszabály szerint

$$(n_0{+}i{+}1, j) \in E(\mathcal{G}_{n_0+i+1}) \ \ \text{valószínűsége egyenesen arányos} \ \ \frac{\deg(j)}{\sum_{1 \leq k \leq n_0+i} \deg(k)} \text{–val.}$$

Matematikailag bizonyított eredmény, hogy az $i \to \infty$ határátmenetben az egyre növekvő gráf aszimptotikus fokszámeloszlása a

$$P(\deg(v) = k) \approx \frac{\text{const}(\mathcal{G}_{n_0}, m)}{k^3} \ , \qquad k \gg n_0 \tag{5}$$

szabályt követi. Ez a valószínűség jóval nagyobb, mint az Erdős–Rényi gráfokkal kapcsolatban is tárgyalt Poisson eloszlás esetében, ahol is a nagyon nagy fokszámú csúcspontok valószínűsége exponenciálisan kicsiny. Ez utóbbi megállapítás a Strogatz–Watts gráfokra is érvényes. A Barabási–Albert konstrukció és preferenciaszabály — amelynek több évtizeddel korábban is voltak előzményei — arra ad példát, hogy *egy ritka esemény* bekövetkezésének valószínűsége a vágyottnál vagy a rettegettnél sokkal–sokkal nagyobb is lehet.

Sokan mondják, hogy az emberek közötti kapcsolatok valóságos gráfjai mintegy közbensők a Strogatz–Watts és a Barabási–Albert gráfok között. Az Erdős–Rényi gráfok inkább matematikai konstrukciók, nagyon gazdag belső elmélettel. Elég arra gondolnunk, hogy ott az egyes élek egymástól teljesen független, azonos eloszlású bináris (létezik vagy sem) valószínűségű változók.

Két adott *gráf* (lett légyen irányított vagy irányítatlan) szerkezetének egymáshoz közeli voltát a legfontosabb *szerkezeti indikátorok/paraméterek* összehasonlítása révén állapíthatjuk meg. A szerkezeti paraméterek matematikailag pontosan definiált mennyiségek (ami nem azt jelenti, hogy meghatározásuk esetenként ne lehetne NP–teljes feladat), de maga a “a szerkezet”, annak “robosztussága”, valamint két gráf szerkezetének “közelsége” erősen intuitív fogalom–alkotások (egyre szaporodó serege, egymással gyakorta polemizáló szempontrendszerekkel). Ez nagyon eleven kutatási terület, különösen nagyméretű (és nem is mindig pontosan ismert) gráfok elemzése és a számítógépes adatgyűjtés szempontjából. A legnehezebb kérdések egyike, hogy az élettudományokban felmerült (és jól–rosszul megtalált) gráfok szerkezete milyen előnyökkel jár az evolúció szempontjából. Itt fontos megjegyeznünk, hogy a gén regulációs, fehérje interakciós gráfok, csakúgy mint a sejt–anyagcsere hálózatok jelentős részének fokszámeloszlása a Barabási–Albert gráfok kapcsán megismert (5) szabály (3 helyett $2 < \gamma < 3$ a kitevőben) variánsait követi.

A legtöbbet vizsgált, legfontosabb gráfparaméterek, szerkezeti indikátorok az alábbiak:

- a csúcspontok átlagos fokszáma,
- a csúcspontok (aszimptotikus) fokszámeloszlása,
- a klaszterezettség egymással rokon típusainak[12] mértéke,
- a két csúcspont közötti átlagos úthossz[13]

A szerkezeti indikátorok közé szokás sorolni

- a gráfhoz rendelt mátrix(ok), például az adjacencia vagy a bolyongási mátrix spektrumát

[12] Adott — irányítatlan, párhuzamos és hurokélek nélküli — gráf klaszterezettségének legegyszerűbb típusa a *háromszögek számának a cseresznyék számához viszonyított aránya*, amelyet lokálisan (a $\mathcal{G}$ gráf i–edik csúcspontjára [amennyiben $d_i \geq 2$] a $\#\{(j,k) \in E(\mathcal{G}) \mid j,k \in \mathcal{N}_i\} \cdot \frac{1}{d_i(d_i-1)}$ képlettel) is és globálisan (egyszerre az egész gráfra) is lehet definiálni. (Hogy mi a háromszög, az magától értetődik: egy három csúcsponttal bíró teljes részgráf. A cseresznye pedig egy majdnem–háromszög részgráf (három csúcsponttal, és két éllel). A klaszterezettség fenti lokális definíciójában az adott csúcsponthoz csak azok a cseresznyék tartoznak, amelyekben ez a csúcspont a kettő fokszámú.) Világos, hogy egy háromszög három cseresznyéből áll. A számos rokon fogalomalkotás egyike: *egy gráf adott* ℓ csúcspontja (például $\{i\} \cup \mathcal{N}_i$, ahol $\ell = d_i + 1$) által *kifeszített részgráfjának klaszterezettsége* az adott részgráf éleinek száma osztva $\binom{\ell}{2}$–vel, ami az ℓ csúcspontú teljes gráf éleinek a száma. — Súlyozott rácsgráfok klaszterezése valamint színes vagy szürkeárnyalatos képek szegmentálása egymással rokon feladatok.

[13] A "kisvilág gráf" elnevezést a kifejezés legáltalánosabb jelentése szerint azokra a gráfokra szokás használni, amelyekben ez az átlagos úthossz nagyon kicsiny — az ilyen gráfok talán leggyakrabban emlegetett példája a ma élő emberek közötti személyes ismeretség gráfja, ahol az átlagos úthossz hat vagy hét körül lehet. (Ezt a kicsiny átlagos úthosszt alapvetően az teszi lehetővé, hogy vannak emberek, akiknek számos ismerőse van még az egymástól távoli országokban, földrészeken is.) Érdemes megemlíteni, hogy az ismeretségi gráf klaszterezettsége magas szintű. Ez a két tulajdonság az emberi társadalom globális és lokális jellegének egyenkénti és együttes fontosságára utal.

is[14]. Gráfok spektrális (és szimmetria–)tulajdonságainak vizsgálata az algebrai gráfelmélethez tartozik.

[14]A gráfok szerkezete villamosmérnöki kísérletek számára is hozzáférhető. A gráfot építsük meg elektromos hálózatként és legyen minden él ellenállása 1 Ohm. Ezután kapcsoljunk 100 Volt egyenfeszültség(–különbség)et a hálózat két csomópontjára, és nézzük meg, mennyit esik a feszültség az egyes élek mentén. Intuitíve világos, hogy azok az élek, amelyeken a feszültségesések a legnagyobbak, más szerepet játszanak a két csomópont közti vágásokban, mint azok az élek, amelyeken a feszültségesés nagyságrendekkel kisebb. — Adott gráfon értelmezett bolyongások szimulációs vizsgálata is a gráf vágásairól, illetve erősebben összefüggő részeiről — ezek azok a részgráfok, amelyekből a bolyongás csak nehezen akar kivezetni — nyújt felvilágosítást. A fent ismertetett szerkezeti indikátoroknál nehezebbek azok, amelyeket egy gráf vágásaival kapcsolatban szokás definiálni.

Előljáróban idézzük fel Mendel eredményeit egyszerű, táblázatos formában!

AA	**Aa**	génpárok kombinálódása
aA	**aa**	

p^2	pq	kísérő valószínűségek
pq	q^2	

A táblázat a második generációra vonatkozik és a híres $p = q = \frac{1}{2}$ esetben azt mutatja, hogy a domináns gén a genotípusban $1 : 1$, a fenotípusban $3 : 1$ arányban van jelen. Az általános esetben $p, q > 0$, $p + q = 1$.

Most azt vizsgáljuk meg, mi történik a távoli időben, ha generációról generációra az **A** gén relatív gyakorisága minden egyes gén–kombinációban p helyett $(1 + s)p$, míg az **a** gén relatív gyakorisága ennek megfelelően $1 - (1 + s)p = q - sp$. Matematikusként ekkor mondjuk, hogy az **A** gén *kedvező*, és a mögöttes mutációs–környezeti etc. folyamatokat a biológiára bízzuk.

Mendel táblázata szerint a p változása tehát az első és nulladik generáció között

$$\begin{aligned} &p_1 - p_0 = (1 + s)^2 p^2 + 2(1 + s)p(q - sp) - p = \\ &p^2 + 2pq - p + 2s(p^2 + pq - p^2) + s^2(p^2 - 2p^2) = 2spq - s^2p^2 \; . \end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy s^2 elhanyagolhatóan kicsiny s–hez képest, a $p_1 - p_0 = 2spq$, a t–edik generációban pedig a

$$p_{t+1} - p_t = 2sp_t(1 - p_t) \; , \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

közelítést kapjuk. Ez egy rekurzív összefüggés, amelyet úgy is értelmezhetünk, mint a

$$\dot{p} = 2sp(1 - p)$$

közönséges differenciálegyenlet $h = 1$ lépésközhöz tartozó explicit Euler módszeres diszkretizációját. Az idő szerinti lineáris skálázhatóság miatt nem jelenti az általánosság megszorítását, ha az s értékét 0.5–nek vesszük. Az eddigi pontszerű modellt az egydimenziós x térváltozóra a

$$\dot{p} = p(1 - p) + p_{xx} \tag{6}$$

diffúziós egyenletként terjeszthetjük ki, ahol a diffúziós együtthatóra a $D = 1$ választás is lehetséges. A (6) egyenletet elsőként Fisher vezette le, akitől az utazó hullámok módszere is származik. Ő ismerte fel (6) $p(t, x) = \varphi(x - ct)$ alakú megoldásainak fontosságát, és ő is vizsgálta meg őket elsőként. Itt $c >$

0 a hullámsebesség, amely a $\varphi\mathbb{R} \to [0,1]$ (hiszen φ továbbra is valószínűség) egyváltozós valós függvénnyel együtt ismeretlene a

$$-c\varphi' = \varphi(1-\varphi) + \varphi'' \tag{7}$$

közönséges differenciálegyenletnek, ahol a vessző a $z = x - ct$ új változó szerinti deriválást jelenti.

Térben és időben időjárási frontbetörés jellegű, hullám típusú megoldást kerestünk, a próbafüggvények módszerére emlékeztető ötlettel. A próbálkozás sikeres volta abban nyilvánul meg, hogy a feladat óriásit egyszerűsödött, parciális egyenletből közönséges egyenletté vált. De ami ennél összehasonlíthatatlanul fontosabb, az az, hogy a természet gyakran produkál utazó hullámokat, amelyek közül általában az erős stabilitási tulajdonságokkal rendelkezők valósulnak meg. A másodrendű (7) egyenlethez speciális peremfeltételek tartoznak, amelyeket könnyebb a vele ekvivalens, két elsőrendű egyenletből álló

$$\varphi' = \psi \quad , \quad \psi' = -\varphi(1-\varphi) - c\psi \tag{8}$$

síkbeli közönséges differenciálegyenlet–rendszerre megfogalmazni. A peremfeltételek a feladat biológiai és valószínűségszámítási interpretációjából adódóan az újonnan definiált z belső (idő)változóban a következők

$$\varphi(-\infty) = 1 \quad , \quad \varphi(\infty) = 0 \quad , \quad \psi(-\infty) = 0 \quad , \quad \psi(\infty) = 0$$

(hiszen az egyenes minden pontjában az **A** gén valamikor nagyon régen egyáltalán nem volt jelen, viszont a távoli jövőben teljesen ki fogja szorítani az **a** gént). A (8) rendszer olyan trajektóriáját keressük tehát, amely heteroklinikus összeköttetést képez a $Q = \binom{1}{0}$ és a $P = \binom{1}{0}$ egyensúlyi helyzetek között. Ez a trajektória a (8) saját belső idejében a Q ponttól indul és a P ponthoz érkezik.

A fenti megfontolások, nem egyszer heurisztikus közelítések jogos volta melletti fő érv, hogy a (8) rendszernek pontosan két egyensúlyi helyzete van, nevezetesen a Q és a P.

ITT ES MOST A KOZVETLENUL AZ ELOADAS IDOPONTJA ELOTT ELKULDENDO E-MAIL OLVASANDO, VALAMINT AZ ANNAK CSATOLMANYAKENT ELKULDOTT ABRAK NEZENDOK MEG

A Lotka–Volterra SI¬R modell

Ha a SIR rendszer harmadik változójával nem törődünk és r helyett τ–t írunk, akkor az

$$\dot{S} = -\tau SI \quad , \quad \dot{I} = \tau SI - I \quad , \quad \text{ahol} \quad S, I \geq 0 \tag{9}$$

(csak házi használatra jelöljük így) SI¬R modellhez jutunk. Az SI¬R modell 2D Lotka–Volterra rendszer, amelyikben a fertőzhetők S és a fertőzöttek I mérőszáma a biomassza tömege, $\tau > 0$ pedig a fertőzési ráta. Az egyensúlyi helyzetek $P(S_0) = \binom{S_0}{0}$, ahol $S_0 \geq 0$ paraméter. A $P(S_0)$ egyensúlyi helyzetben a Jacobi mátrix

$$J^{S_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau S_0 \\ 0 & \tau S_0 - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{a sajátvektorok} \quad \mathbf{s}_1^{S_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \mathbf{s}_2^{S_0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - \frac{1}{\tau S_0} \end{pmatrix},$$

rendre $\lambda_1^{S_0} = 0$ és $\lambda_2^{S_0} = \tau S_0 - 1$ sajátértékekkel.

A járvány biztosan el tud indulni olyan egyensúlyi helyzetekből, amelyekben van taszító sajátérték, tehát azokból a $P(S_0)$ egyensúlyi helyzetekből, ahol $\lambda_2^{S_0} = \tau S_0 - 1 > 0$. Ez ugyanaz, mint amit Leslie a túlnépesedésről megállapított: a túlnépesedéshez egy lineáris, diszkrét idejű dinamikában elegendő, ha az origó mint egyensúlyi helyzet legalább egy trajektóriát kilök magából, azaz ha az $\mathbf{L}$ Leslie mátrix legnagyobb sajátértéke taszító, képlettel: $r > 1$. Az elsőként tárgyalt SIR modellben is ugyanez a helyzet. Az ottani szabályos $\mathcal{H}$ háromszöglemez fertőzésmentes, $(1, 0, 0)$ egyensúlyi helyzetéből akkor indul el biztosan a járvány, ha az ottani (természetesen a $\mathcal{H}$ háromszöglemezhez tartozó) két sajátérték nagyobbika pozitív. Ez a két sajátérték[15] $\lambda_1 = 0$ és $\lambda_2 = r - 1$. **Ugye van ereje a matematikának?** Amiről manapság annyit beszélnek, a járvány R_0 reprodukciós száma, amit 1 alá kell vinni, bizony–bizony — a diszkrét idejű dinamikus, időtől explicit módon nem függő modellekben — R_0 az endogén egyensúlyi helyzet legnagyobb sajátértéke.

Nem nehéz meghatároznunk az (9) rendszer trajektóriáit. A vízszintes S féltengely csupa egyensúlyi helyzetből áll, a függőleges I féltengely egyetlen, az origóba lefelé tartó trajektória, az ezektől különböző összes trajektória pedig egy–egy konkáv, jobbfelől balra haladó korlátos $\binom{S(t)}{I(t)}$, $-\infty < t < \infty$

[15] Ki tudjuk őket számolni a (1) rendszer Jacobi mátrixából? (Háromszor hármas felső–háromszög mátrixot kapunk, 0-$r-1$-1 diagonálissal. És miért tartottuk ezt idáig titokban? Mert a fázisportré, a járvány lefolyása érdekelt minket.)

ív, amelyek mindegyike a vízszintes S féltengely két, egymást kölcsönösen meghatározó pontját köti össze. A $P^- = \binom{S(-\infty)}{0}$ indítási egyensúlyi helyzet az (S_*, ∞) félegyenesen, a $P^+ = \binom{S(\infty)}{0}$ érkezési egyensúlyi helyzet pedig a $(0, S_*)$ szakaszon helyezkedik el, ahol $S_* = \frac{1}{\tau}$. A járvány kialakulásának feltétele tehát $S(0) = S_0 > S_* = \frac{1}{\tau}$ (és $0 < I(0) = I_0 = \varepsilon \ll 1$). Mindez egyszerű következménye a

$$\frac{dI}{dS} = -\,\frac{\tau S - 1}{\tau S} \quad \Rightarrow \quad \int 1\, dI = \int \left(-1 + \frac{1}{\tau S} \right) dS$$

$$\Rightarrow \quad I + \mathcal{C}_I = -S + \frac{1}{\tau}\,\ln(S) + \mathcal{C}_S \quad \Rightarrow \quad I = \mathcal{C} - S + \frac{1}{\tau}\,\ln(S)$$

számolásnak, ahol az $I = I(S)$, $\dot{S} < 0$ implicit függvényvizsgálat szerint $I'(S) = -1 + \frac{1}{\tau S}$ és $I''(S) = -\frac{1}{\tau S^2} < 0$ (ez utóbbi formula maga a konkavitás, az előbbi formula pedig az $S_* = \frac{1}{\tau}$ pontot mint az $I = I(S)$ függvény maximum–helyét definiálja. Vegyük észre azt is, hogy $\lambda_2^{S_0}$ az $\mathbf{s}_2^{S_0}$ második koordinátájával együtt pontosan akkor lesz pozitív, amikor $S_0 > S_*$.) A járvány kialakulásának szükséges és elégséges feltétele szavakkal kifejezve az, hogy a megfertőzhető biomassza ne legyen túl kicsiny.

Utazó hullám az (9) 1D diffúziós SI¬R modellben

A járvány 1D terjedését a fertőzhetők és a fertőzöttek egyenes menti diffúziójával, azaz az

$$\dot{S} = -\tau S I + S_{xx} \;\;,\;\; \dot{I} = \tau S I - I + I_{xx} \;\;, \quad \text{ahol} \;\; S, I \geq 0 \qquad (10)$$

alakú parabolikus parciális differenciálegyenlet–rendszerrel modellezzük. Mindkét diffúziós együtthatót 1–nek választjuk (ami egy átskálázás erejéig a diffúziós együtthatók egyenlőségét jelenti csupán). Speciális megoldást, utazó hullámot keresünk az $S(t,x) = \varphi(x - ct)$, $I(t,x) = \eta(x - ct)$ alakban, ahol $c > 0$ a hullámsebesség, amely a φ és az η egyváltozós valós függvényekkel együtt ismeretlene a

$$-c\varphi' = -\tau\varphi\eta + \varphi'' \;\;,\;\; -c\eta' = \tau\varphi\eta - \eta + \eta''$$

közönséges differenciálegyenlet–rendszernek, ahol a vessző a $z = x - ct$ új változó szerinti deriválást jelenti. Áttérve a 4D

$$\begin{aligned} \varphi' &= \psi & \qquad \eta' &= \zeta \\ \psi' &= \tau\varphi\eta - c\psi & \qquad \zeta' &= \eta - \tau\varphi\eta - c\zeta \end{aligned} \qquad (11)$$

normálalakra, a peremfeltételek az újonnan definiált z belső (idő)változóban

$$\varphi(-\infty) = \varphi_0^- \quad , \quad \varphi(\infty) = \varphi_0^+ \quad , \quad \psi(\pm\infty) = 0 \quad , \quad \eta(\pm\infty) = 0 \quad , \quad \zeta(\pm\infty) = 0$$

(hiszen az egyenes minden pontjában valamikor nagyon régen egyáltalán nem volt betegség és a távoli jövőben szintén nem lesz). Az utazó hullámnak tehát a (11) rendszerben olyan megoldás felel meg, amely két, egymástól és a c hullámsebességtől is függő egyensúlyi helyzetet köt össze. A későbbi jelöléseket elővételezve, a $P^- = P(\varphi_0^-)$ és a $P^+ = P(\varphi_0^+)$ pontokat. Az egyensúlyi helyzetek mindegyike $P(\varphi_0) = (\varphi_0, 0, 0, 0)^T$ alakú,

$$J^{\varphi_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \tau\eta & -c & \tau\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tau\eta & 0 & 1-\tau\varphi & -c \end{pmatrix} \Bigg|_{\varphi=\varphi_0, \eta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c & \tau\varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\tau\varphi_0 & -c \end{pmatrix}$$

Jacobi mátrix–szal, ahol $\varphi_0 \geq 0$ a paraméter. Így a sajátértékek

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = -c \quad , \quad \lambda_{3,4} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4 - 4\tau\varphi_0}}{2} \, .$$

Az első két sajátérték (rendre $\mathbf{s}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ és $\mathbf{s}_2 = (-1, c, 0, 0)^T$ sajátvektorokkal) a J mátrix bal felső, a másik kettő a J mátrix jobb alsó minormátrixához tartozik. Most a jobb alsó minormátrix stabilitásvizsgálata következik. Teljesen elemi módon — vagy a T–D nyom–determináns diagramm révén $\big($ahol $T = -c < 0$ és $D = \tau\varphi_0 - 1 \gtreqless 0\big)$, a stabilitás kritikus eseteivel nem törődve — azonnal látszik, hogy

$$\lambda_3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau\varphi_0 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_0 < \varphi_* = 1/\tau \, ,$$

$$\mathrm{Re}(\lambda_{3,4}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau\varphi_0 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_0 > \varphi_* \, .$$

Így a négydimenziós (11) rendszer P^- egyensúlyi helyzete (amelyiknek kell legyen pozitív sajátértéke) a $\varphi_0^- < \varphi_*$, P^+ egyensúlyi helyzete (amelyiknek jó ha nincs pozitív sajátértéke) pedig a $\varphi_0^+ > \varphi_*$ egyenlőtlenségnek tesz eleget.

A feladat biológiája szerint $\varphi \geq 0$ és $\eta \geq 0$. Ez utóbbi egyenlőtlenség kizárja azt, hogy (11) megoldásai a $(\varphi_0^+, 0, 0, 0)$ pont bármely kis környezetében — az η változóban exponenciálisan lecsengő szinuszoid hullámzással — oda–vissza átspirálozzanak az $\eta = 0$ síkon. Márpedig ezt tennék, ha a $\lambda_{3,4}$ sajátértékek valódi komplex konjugált párt alkotnának. Ebből $D \leq \frac{1}{4} T^2$ szerint a c hullámsebességre a $c \geq 2\sqrt{\tau\varphi_0^+ - 1}$ követelmény adódik.

Most egy szusszanásnyi időre megállunk.

Mindezideig annyi történt, hogy a P^-, P^+ pontok elhelyezkedésére valamint a c hullámsebességre sikerült néhány szükséges feltételt megállapítanunk.

A P^- és a P^+ pontokat összekötő trajektóriáról — ha van ilyen trajektória egyáltalán — kizárólag nemlokális megállapításokat tehetünk. A következő tételt numerikus evidenciaként kell elfogadnunk.[16]

A véletlen gráfos részt átfésültem. Korábban is jó volt, de most már egészen meg vagyok vele elégedve. Olvasmányos, akar a nagymértékben átírt LOTKA–VOLTERRA fejezet. Ez utóbbi középső bekezdése villámcsapásként ér mindnyájunkat. A két utazó hullámos fejezet, ameddig legépeltem őket, szintén jól érthető.

ITT ES MOST A KOZVETLENUL AZ ELOADAS IDOPONTJA ELOTT ELKULDENDO E-MAIL OLVASANDO, VALAMINT AZ ANNAK CSATOLMANYAKENT ELKULDOTT ABRAK NEZENDOK MEG

[16] A matematikai bizonyítás nehéz. Egy leendő mérnök azonban a szimulációs tapasztalatokat — ha rámutató érvekkel is meg tudja támogatni őket — tényként kezelheti.

A heurisztika onnan indul, hogy az $S_* = \varphi_* = 1/\tau$ egybeesés aligha véletlen. A 0 kétszeres sajátértéke mind a J^{S_*}, mind a J^{φ_*} mátrixnak, ráadásul a 0 sajátértékhez mindkét esetben csak egyetlen lineárisan független sajátvektor tartozik, $\mathbf{s}_1 = \binom{1}{0}$ illetve $\mathbf{s}_1 = (1,0,0,0)^T$, amelyeket bátran azonosíthatunk egymással. Fontos észrevennünk azt is, hogy a $\lambda_2^{S_0}$ és a $\lambda_3(\varphi_0)$ sajátértékek a paraméter kritikus $S_* = \varphi_*$ értékénél egyaránt előjelet váltanak. A J^{φ_*} mátrixnak a $-c$ szintén kétszeres sajátértéke, amelyhez ismét csak egyetlen lineárisan független sajátvektor tartozik. Ha $\varphi_0 \neq \varphi_*$ közel van a kritikus φ_* értékhez, akkor a J^{φ_0} mátrixnak két negatív sajátértéke van, mindketten közel a $-c$ értékhez (egyikük éppen maga a $-c$), egymástól lineárisan független $\mathbf{s}_2(\varphi_0)$ és $\mathbf{s}_4(\varphi_0)$ sajátvektorokkal. A lineáris algebra/analízis azt is tanítja, hogy a J^{φ_*} mátrix $-c$ sajátértékéhez tartozó Jordan blokk bázisvektorai által kifeszített altér nagyon közel van az $\mathbf{s}_2(\varphi_0)$ és a $\mathbf{s}_4(\varphi_0)$ által kifeszített altérhez, amelyen a linearizált rendszer aszimptotikusan, sőt exponenciálisan stabil — természetesen csak akkor ha $\varphi_0 \neq \varphi_*$ továbbra is közel van a kritikus φ_* értékhez.

Így kézenfekvő arra gondolnunk, hogy a 4D (11) rendszer azonosítható a 2D (9) rendszerrel, ha ez utóbbit egy exponenciálisan stabil lineáris 2D rendszerrel — mondjuk a $\psi' = -c\psi$, $\zeta' = -c\zeta$ rendszerrel — szorozzuk be. Természetesen a szorzás ferdén (nem pedig koordinátánként), ráadásul csavarodva értendő: a φ_0 paraméter függvényében az $\mathbf{s}_4(\varphi_0)$ sajátvektor is, az exponenciálisan stabil 2D sokasággal együtt, csavarodik. A (11) rendszer centrális sokasága szintén csavarodik, és egy az egyben megfeleltethető a (9) 2D fázisportréján ülő dinamikának.

A fenti érvelés, legalábbis lokálisan, a kritikus $P(S_*)$, $P(\varphi_*)$ egyensúlyi helyzetek környékén, pontossá tehető.