gyakorló feladatok a ZH előtti hét előtt

1.) Az $\dot{x} = x(1 - 2x - y)$, $\dot{y} = y(3 - 2y - x)$ ökoszisztéma $Q = (0, \frac{3}{2})$ egyensúlyi helyzete a pozitív ortánsra (magyarul: az első síknegyed belsejére) nézve globálisan stabil. Igazolja ezt a kijelentést!

2.) *Folytatás* Az előző feladat paraméterértékei mellett az első faj sorsa a biztos kihalás. Vizsgálja meg, hogy az első faj egyenletében szereplő paraméterek egyikének értékét megváltoztatva, más szóval az A.) $\dot{x} = bx(1 - 2x) - xy$, $\dot{y} = y(3 - 2y - x)$ rendszerben a b, a B.) $\dot{x} = x(1 - \frac{x}{K} - y)$, $\dot{y} = y(3 - 2y - x)$ rendszerben a K, a C.) $\dot{x} = x(1 - 2x - \gamma y)$, $\dot{y} = y(3 - 2y - x)$ rendszerben a γ paraméter mely értékei mellett kerülheti el az első faj a kihalást — esetszétválasztások, fázisportrék![1]

3.) *Folytatás* D.) A $\dot{x} = x(1 - \frac{x}{K} - \gamma y)$, $\dot{y} = y(3 - 2y - x)$ rendszerben a K és a γ paraméterek mely értékei mellett "kényszerítheti ki" az első faj a második faj teljes kipusztulását? (Nem mintha ezt a második faj “szó nélkül tűrné” ... mindezt az evolúciós játékelmélet tudja jobban modellezni.)

4.) A.) Eldönthető–e az (E) $\dot{x} = y - x^3$, $\dot{y} = -x + 2x^2y - 2y^3$ egyenletrendszer origójának stabilitása linearizálással? B.) És a $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ függvény segítségével[2]? C.) Globálisan aszimptotikusan stabil–e az origó?

5.) A lehető legteljesebb fázisportrékat kérem: A.) $\dot{x} = -y - xy$, $\dot{y} = x + x^2$ B.) $\dot{x} = x^2 - y - 1$, $\dot{y} = xy - 2y$ C.) $\dot{x} = x^2 - y - 1$, $\dot{y} = xy$ D.) $\dot{x} = -xy$, $\dot{y} = x^2 - y - 1 + \mu(y - y^3)$, ahol $\mu = 1 \pm \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \ll 1$.

6.) A.) Az $a \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékeire lesz az (E) $\dot{x} = -ax + y$, $\dot{y} = (2 - 6a)x - 5y$ differenciálegyenlet origója aszimptotikusan stabil? B.) Keressen ezekre az a értékekre olyan $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ alakú Ljapunov függvényt, amelyre $\dot{V}_{(E)}(x, y) = -x^2 - y^2 < 0$ ha $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$!

7.) Keressen az $\dot{x} = -xy^4$, $\dot{y} = x^6 y$ egyenlethez $V(x, y) = \alpha x^c + \beta y^d$ alakú Ljapunov függvényt (itt $\dot{V}_{(E)}(x, y) \leq 0$ is elég), ahol $\alpha, \beta, c, d \in \mathbb{R}$! Mi következik ebből az origó stabilitására?

8.) Ábrázolja a fázisportrékat[3]! A.) $\dot{x} = -x + y \cdot \ln(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = -y + x \cdot \ln(x^2 + y^2)$ B.) $\dot{x} = -y + x^3 + xy^2$, $\dot{y} = x + x^2y + y^3$

---

[1] Tény: ha van nemtriviális periodikus megoldás, akkor centrumpont is van, és a periodikus megoldások ezt a centrumpontot körülölelve kitöltik a pozitív ortáns belsejét.

[2] A V függvény (E) differenciálegyenlet szerinti deriváltját Ljapunov híres $\dot{V}_{(E)}(x, y) = (\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)))|_{t=0}$ képlete definiálja. Igaz, hogy $\dot{V}_{(E)}(x) = \langle \underline{grad} V(x), f(x) \rangle$ — mik itt a jelölések? Mi itt a differenciálegyenlet? Honnan hová képeznek az egyes függvények?

[3] Polárkoordinátarendszerben már könnyű lesz: áttérés az $x(t) = r(t)\cos(\varphi(t))$, $y(t) = r(t)\sin(\varphi(t))$ formulák t szerinti deriválása majd $\dot{r}(t)$ és $\dot{\varphi}(t)$ kifejezése révén

9.) a.) Az a paraméter mely értékeire lesz az origó a.) az $\dot{x} = Cx$ rendszernek aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzete? Mikor lesz az origó a b.) $\dot{x} = Dx$ valamint a c.) $\dot{x} = Fx$ rendszernek aszimptotikusan stabil, stabil, instabil egyensúlyi helyzete? Csak a b.) és a c.) esetben: Mely paraméterértékekre lesz az origó fókusz, nyereg, csomó? Lehet más is?

10.) Oldja meg az $\dot{x} = -3x + y$, $\dot{y} = -3x + y$ és az $\dot{x} = -3x + y + \cos(t)$, $\dot{y} = -3x + y$ rendszereket az $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ kezdetiérték–feltétel esetén! Változott–e/változhat–e az inhomogenitás miatt a kapott megoldás a stabilitás szempontjából?

11.) Ábrázolja az $\dot{x} = -x + 3y$, $\dot{y} = -3x - y + \cos(t)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ kezdetiérték–probléma megoldását olyan módon, hogy az ábrából a kérdéses megoldás stabilitási tulajdonságai is kiolvashatók legyenek.

$$C = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 - 28 \\ -a^2 & 3a \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & a \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} -2 & a \\ a+1 & -3 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

12.) Rajzolja meg az a.) $\dot{x} = Gx$ illetve b.) az $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ és az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 0$ differenciálegyenletek fázisportréját!

13.) Az egyensúlyi helyzetek körüli dinamika ábrázolása után rajzolja meg az a.) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x(1 - x) - y$ valamint a b.) $\dot{x} = x^2 - 1$, $\dot{y} = xy$ differenciálegyenletek (amennyire csak tudja) teljes fázisportréját!

14.) Adjon meg olyan origó középpontú körlemezt, amelyik biztosan része az (E) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x - y(1 - x^2)$ differenciálegyenlet–rendszer egyensúlyi helyzete stabilitási tartományának![4]

15.) Tegyük fel, hogy (alkalmas $M, \omega > 0$ konstansokkal) $\|a^{At}\| \leq Me^{-\omega t}$ minden $t \geq 0$ esetén. Határozzon meg olyan $K > 0$ számot, hogy tetszőleges, a $\|B\| \leq K$ egyenlőtlenségnek eleget tevő B mátrix esetén az origó aszimptotikusan stabil egyensúlyi helyzete az (E) $\dot{x} = (A + B)x$ differenciálegyenletnek?[5] Itt A és B azonos rendű négyzetes mátrixok.

[4]Útmutatás: tekintse az a.) $V(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + xy + y^2$ valamint a b.) $W(x, y) = x^2 + y^2$ függvényeket! Pozitív definit–e a V kvadratikus alak? Mondhatjuk–e, hogy a V szintvonalai Matrjosa–babákra emlékeztetnek? Igaz, hogy $\dot{V}_{(E)}(x, y) = -x^2 - y^2$? Mi köze van a W szintvonalainak a linearizált rendszer megoldásaihoz?

[5]Útmutatás: tekintse a $\dot{V}_{(E)}$ deriváltat, ahol V a $P = -\int_0^\infty e^{A^T s} e^{As}\, ds$ pozitív definit mátrix segítségével definiált, és az $A^T P + PA = -I$ egyenletnek eleget tevő $V(x) = x^T P x$ Ljapunov függvény! (Ehhez felső becslést kell adnia a P mátrix normájára. (Zárójel a zárójelben: igaz, hogy $Ae^{As} = e^{As}A$? Hogyan kell használni ezt az azonosságot a P mátrix pozitív definit voltának bizonyítására? És az is igaz, hogy $e^{A^T s} e^{As} = e^{(A^T + A)s}$?))

16.) Határozza meg az általános megoldást, rajzolja fel a fázisportrét:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & p & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; , \; p \in \mathbb{R}$$

Van–e a fenti példák között elfajult eset? (Milyen értelemben elfajult?)

17.) Vázolja az $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin(x) - by$ gravitációs inga/hajóhinta lokális dinamikáját az $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ alsó egyensúlyi helyzet körül a $b \geq 0$ közegellenállási együttható A.) $b = 0$ B.) $0 < b < 2$ C.) $2 < b$ D.) $b \to \infty$ eseteiben!

18.) Ismeretes, hogy instabil $\Leftrightarrow$ "nem stabil". a.) Fogalmazza meg egyensúlyi helyzet instabilitásának definícióját az ε és a δ segítségével! b.) Ugyanez a feladat az aszimptotikus stabilitás fogalmának tagadására. (Ez inkább logika, mint differenciálegyenletek: de azért rajzolja is le!)

19.) Tekintse a következő periodikus megoldásokat: a.) az $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = r + 1$ rendszer $r = 1$ megoldását és b.) az $\dot{x} = -2x + y + 2\cos(t)$, $\dot{y} = -x - 2y - 2\sin(t)$ rendszer $x = \cos(t)$, $y = -\sin(t)$ megoldását! (Hogyan vezetné le, hogy $x = \cos(t)$, $y = -\sin(t)$ valóban az inhomogén rendszer egy partikuláris megoldása? Próbafüggvénnyel? A konstans variációs formulával? A két elsőrendű egyenletből álló rendszer egyetlen másodrendű egyenletre való visszavezetésével?) Hogyan célszerű ennek a két példának a fényében periodikus megoldások stabilitását és aszimptotikus stabilitását definiálni?

20.) Határozza meg az e^{At} mátrixot, ha A rendre az alábbi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (itt és most a sorfejtéses módszerrel!)}$$

21.) Tekintse az a.) $\dot{x} = \mu - x^2$ differenciálegyenletet, ahol $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter. Mik az egyensúlyi helyzetek, és mi a helyzet azok stabilitásával? Rajzolja fel a megfelelő fázisportrékat is! Ugyanez a feladat a b.) $\dot{x} = \mu x - x^2$ illetve a c.) $\dot{x} = \mu x - x^3$ egyenlet–családokra. d.) Fel tudja rajzolni a $\dot{r} = \mu r - r^3$, $\dot{\varphi} = -1$ Hopf bifurkáció szokásos $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$ eseteit is?

22.) Milyen ökoszisztémát modellez az $\dot{x} = x(1 - x + y)$, $\dot{y} = y(1 - y + \frac{1}{3}x)$ rendszer? Adjon meg három szimbióta valamint két ragadozó plusz egy növényevő típusú Lotka–Volterra rendszereket! Vannak ez utóbbinak alesetei? Tudná ábrázolni is, amiket elgondolt?