PERRON–FROBENIUS TÉTEL: Legyen $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ nemnegatív, primitív mátrix. (*Azaz ha az átmenetgráf összefüggő és körei hosszának* LNKO*–ja egy. Konvenció:* $(\{i\} \to \{j\}) \in E(\mathcal{G}) \Leftrightarrow a_{ji} > 0$.) Ekkor $\lambda_1 = r > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Az $r > 0$ domináns sajátértékhez tartozó domináns sajátvektor jobbról $\mathbf{v} > \mathbf{0}$, balról $\mathbf{w}^T > \mathbf{0}^T$, a $\mathbf{w}^T\mathbf{v} = 1$ normálással. Továbbá

$$\frac{1}{r^k}\mathbf{A}^k \to \mathbf{v}\mathbf{w}^T \text{ ha } k \to \infty \quad \text{és a konvergencia rendje lényegében } \frac{1}{r^k}\left|\lambda_2\right|^k .$$

PÉLDA 1. – FIBONACCI

$$\begin{pmatrix} i_{n+1} \\ o_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{F}\begin{pmatrix} i_n \\ o_n \end{pmatrix}, \quad \text{ahol } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} i_0 \\ o_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} i_k \\ o_k \end{pmatrix} = \mathbf{F}^k\begin{pmatrix} i_0 \\ o_0 \end{pmatrix} \text{ és } f_k = i_k + o_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}\right), \text{ ahol } \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

PÉLDA 2. – LESLIE – STABIL KORFA *négy korosztály esetén*

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{r^k}\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ x_4^k \end{pmatrix} = \frac{1}{r^k}\mathbf{x}^k = (\mathbf{v}\mathbf{w}^T)\mathbf{x}^{\mathbf{0}} = (\mathbf{w}^T\mathbf{x}^{\mathbf{0}})\mathbf{v} \text{ ha } k \to \infty.$$

A karakterisztikus polinom $p_4(\lambda) = \lambda^4 - b_1 s_1 \lambda^2 - b_2 s_1 s_2 \lambda - b_3 s_1 s_2 s_3$. Evidens, hogy $1 < r \Leftrightarrow 1 < R$ (egyedenkénti utódok száma), ahol $p_4(1) = 1 - R$.

PÉLDA 3. – AMIKOR KEVESEBB IGAZ: *a cserebogarak négy korosztálya* Itt $b_1 = b_2 = 0$, $b_3 = s_1 = s_2 = s_3 = 1$, $p_4(\lambda) = \lambda^4 - 1$.

PÉLDA 4. – NEUMANN JÁNOS – AZ $u'_t = Du''_{xx}$ ($t \geq 0$, $0 \leq x \leq L$) DIFFÚZIÓ–EGYENLET: *numerikus megoldás az (N)* $u'_x(t,0) = u'_x(t,L) = 0$ *(Carl Neumann) valamint a (P)* $u(t,0) = u(t,L)$ & $u'_x(t,0) = u'_x(t,L)$ *(periodikus) peremfeltétel és az* $u(0,x) = g(x)$ *kezdeti feltétel esetén.*[1]

Numerikus $u(i\tau, jh) \approx u_{ij}$ megoldás a $\frac{\partial}{\partial t}$ τ lépésközű explicit Euler és a $\frac{\partial^2}{\partial^2 x}$ $h = \frac{L}{N}$ lépésközű (másodrendű) centrális közelítésével, amikor is a feladat

[1] Az (N) és a (P) feladatokat a $\frac{d}{dt}\int_0^L u(t,x)\,dx = \int_0^L u'_t(t,x)\,dx = \int_0^L u''_{xx}(t,x)\,dx = u'_x(t,L) - u'_x(t,0) = 0$ megmaradási tétel kapcsolja össze.

– bevezetve a $0 < \mu = D\frac{\tau}{h^2} < \frac{1}{2}$ paramétert — az

$$\mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} 1-\mu & \mu & 0 & \dots & & & 0 \\ \mu & 1-2\mu & \mu & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \mu & 1-2\mu & \mu & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & \mu & 1-2\mu & \mu \\ 0 & & & \dots & 0 & \mu & 1-\mu \end{pmatrix}$$

illetve az

$$\mathbf{A}_P = \begin{pmatrix} 1-2\mu & \mu & 0 & & & & \mu \\ \mu & 1-2\mu & \mu & 0 & & & 0 \\ 0 & \mu & 1-2\mu & \mu & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & \mu & 1-2\mu & \mu \\ \mu & & & \dots & 0 & \mu & 1-2\mu \end{pmatrix}$$

$(N-1)\times(N-1)$ méretű szimmetrikus mátrixok hatványozására egyszerűsödik. Mindkét esetben[2] $r = 1$ és $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{N-1}}\mathrm{col}(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Példa 5. – Markov átmenetmátrix[3]: $P(\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i) = \pi_{ij}$ *egér háromosztatú, a kettes és a hármas cella között kétkapus labirintusban*

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_k^T = \mathbf{p}_0^T \mathbf{P}^k = \mathbf{p}_0^T(\mathbf{v}\mathbf{w}^T) = \frac{1}{8}(2, 3, 3)$$

mert $r = 1$, $\mathbf{v} = \mathrm{col}(1, 1, 1)$ és $\mathbf{w}^T = \frac{1}{8}(2, 3, 3)$ (bármely $\mathbf{p}_0^T$ kezdeti eloszlásra).

---

[2] a numerikus peremfeltételek rendre (N) $u_{i0} = u_{i1}$ & $u_{iN} = u_{i,N-1}$ illetve (P) $u_{i0} = u_{i,N-1}$, $u_{i1} = u_{i,N}$ (i=1,2,...), a numerikus kezdeti feltételek pedig $u_{0j} = g(jh)$ (j=1,2,...,N-1). — Figyeljük meg, hogy a numerikusan is igazak: 1.) *anyagmegmaradás* 2.) *nemnegativitás (a numerikus "maximum–elv" is triviálitás)* 3.) *aszimptotikus homogenizálódás.* Ugye lenyűgözően szép?

[3] sor–sztochasztikus konvenció, ahol az átmenetgráfban $(\{i\} \to \{j\}) \in E(\mathcal{G}) \Leftrightarrow \pi_{ij} > 0$