

Analízis 3 vizsgajegyzet

Erdélyi Áron, Feczko Botond

2019.01.09.

Tartalomjegyzék

1. Tétel	4
1.1. Vektormező	4
1.2. Derivált és mérőszámai: divergencia és rotáció	4
1.2.1. Nabla operátor	4
1.2.2. Differenciálhatóság	4
1.2.2.1. Tulajdonságok	4
1.2.3. Divergencia	5
1.2.4. Rotáció	5
1.2.4.1. Kiszámítása	5
1.2.5. Fizikai és szemléletes jelentés	5
1.3. Alapösszefüggések, deriválási szabályok	5
1.4. Vonalintegrál: definíció és kiszámítás	5
1.4.1. Skalármező vonalintegrálja	5
1.4.2. Vektormező vonalintegrálja	6
1.4.3. Speciális eset $\mathbb{R}^2$ -ben	6
2. Tétel	7
2.1. Egyszerű sokaságok $\mathbb{R}^n$ -ben	7
2.1.1. Paraméteres megadás	7
2.1.2. Implicit megadás	7
2.1.3. Példák	7
2.1.3.1. Egydimenziós sokaság a síkon	7
2.1.3.2. 2-dimenziós sokaság a térben	7
2.1.3.3. Egységgör	8
2.2. Vonal $\mathbb{R}^n$ -ben	8
2.3. Felület $\mathbb{R}^3$ -ban	8
2.4. Sokaság határa	8
2.4.1. Lezárás	8
2.4.2. Határ	8
2.5. Felületi integrál $\mathbb{R}^3$ -ban	8
2.5.1. Skalármező felületi integrálja	8
2.5.2. Vektormező felületi integrálja	9
2.6. Fluxus	9
2.6.1. Fizikai jelentése	9
2.7. Gauss-Osztrogradskij tétel	9
3. Tétel	11
3.1. Stokes tétel $\mathbb{R}^3$ -ban	11
3.2. Cirkuláció	11
3.2.1. Szemléletes jelentés	11
3.3. Sokaság, általános eset	11
3.4. Parametrikus megadás: térkép és atlasz	11
3.5. Tangens tér és normál tér - parametrikus és implicit megadású sokaság esetén	11
3.5.1. Implicit megadás esetén	11
3.5.2. Paraméteres megadás esetén	12
4. Tétel	13
4.1. Elemi k -formák $\mathbb{R}^n$ -ben	13
4.2. k -formák $\mathbb{R}^n$ -ben	13
4.3. Külső szorzat	13
4.3.1. Alaptulajdonságai	13
4.4. Differenciál k -formák	14
4.5. Külső deriválás	14
4.6. Poincaré lemma	14

5. Tétel	15
5.1. Differenciálformák $\mathbb{R}^3$ -ban	15
5.1.1. Külső deriválás és vektormező deriváltak közti kapcsolat	15
5.2. Integrálás sokaságon	15
5.2.1. Speciális esetek	15
6. Tétel	17
6.1. Green tétel	17
6.1.1. Területszámítás	17
6.2. Általános Stokes tétel	17
6.2.1. Speciális esetek	17
7. Tétel	19
7.1. Variációszámítás: fizikai példák	19
7.1.1. Bernoulli-feladat / Brachisztokron probléma	19
7.1.2. Forgástest felszín minimalizálás	19
7.1.3. Geodetikus görbék	19
7.2. Feladat matematikai modellje	19
7.3. Optimum létezésének szükséges feltétele	20
7.3.1. Euler-Lagrange egyenlet	20
7.4. Speciális esetek	20
7.5. Brachisztokron feladat megoldása	21
8. Tétel	22
8.1. Variációszámítási alapeladat	22
8.1.1. Optimum létezésének szükséges feltétele	22
8.1.2. Euler-Lagrange egyenlet	22
8.2. Speciális esetek: $F(x, u, u')$ hiányos változókkal	22
8.3. Forgástest felszín minimalizálása	22
8.4. Mechanikai alkalmazás	23
8.4.1. Hamilton elv	23
8.4.2. Energiamegmaradás törvénye	23
8.5. Feltétel melletti optimalizálás	24
8.5.1. Euler-Lagrange egyenlet	24
9. Tétel	25
9.1. Több függvény együttes stacionaritása	25
9.1.1. Optimum létezésének szükséges feltétele	25
9.1.2. Energiafüggvény	25
9.1.3. Geodetikus görbék általános felületen	25
9.1.3.1. Geodetikus görbék egységgyömbön	26
10. Tétel	28
10.1. Többváltozós függvény, mint ismeretlen	28
10.1.1. Optimum létezésének szükséges feltétele	28
10.1.2. Speciális eset: Kétváltozós függvény	28
10.1.2.1. Optimum létezésének szükséges feltétele	28
10.1.2.2. Minimális felszín (Plateau-feladat)	28
10.1.2.3. Húr mozgásának egyenlete	29
11. Tétel	30
11.1. PDE típusai, alapkérdések	30
11.1.1. Alapkérdések	30
11.1.2. Lineáris PDE-k	30
11.1.3. Nemlineáris PDE-k	30
11.2. Transzport egyenlet	30
11.2.1. Homogén eset	31
11.2.1.1. Gyenge megoldás, szakadás terjedése időben	31
11.2.2. Inhomogén eset 0 kezdeti feltétellel	31

11.2.3. Inhomogén eset	31
11.3. Laplace egyenlet $\mathbb{R}^3$ -beli tartományban	32
11.3.1. Fizikai háttér	32
12. Tétel	33
12.1. Laplace-egyenlet	33
12.1.1. Peremfeltételek típusai	33
12.1.2. Megoldás az egységnyezeten, Dirichlet-feltétellel	33
12.1.2.1. Első eset	33
12.1.2.2. Második eset	34
12.1.2.3. Harmadik eset	36
12.1.2.4. Negyedik eset	37
12.1.2.5. Általános eset	38
12.1.3. Laplace egyenlet polárkoordinátákban	39
12.1.3.1. Megoldás egységkörön, Dirichlet-feltétellel	39
12.1.3.2. Poisson mag	40
13. Tétel	41
13.1. Hővezetés egyenlete	41
13.1.1. Hővezetés véges rúdban	41
13.1.1.1. Peremfeltétel és kezdeti feltétel	41
13.1.2. Véges rúd hőenergiája	42
13.1.2.1. Gauss: Maximumelv	43
13.1.3. Hővezetési egyenlet időben megfordítva	43
13.1.4. Inhomogén hővezetési egyenlet megoldása	44
14. Tétel	45
14.1. Hővezetés egyenlete	45
14.1.1. Hővezetés végtelen rúdban	45
14.1.1.1. Megoldás a Fourier-transzformáció segítségével	45
14.1.1.2. Speciális kezdeti feltételek	46

1. Tétel

1.1. Vektormező

Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ típusú (többszörös vektorértékű) függvényeket **vektormezőnek** nevezzük. Ezek felírhatók 'koordinátafüggvények függvényrendszere'-ként:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix},$$

ahol $f_1, \dots, f_m$ $\mathbb{R}^n$ -ből $\mathbb{R}$ -be képező függvények. Egy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vagy $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vektormező könnyen elképzelhető úgy, hogy a tér/sík minden pontjához egy vektort rendel, amely az ábrázoláson az adott pontból indul ki. Ennek fizikai értelme például a tér/sík egyes pontjaiban ható erő.

1.2. Derivált és mérőszámai: divergencia és rotáció

1.2.1. Nabla operátor

A ∇ (**nabla**) operátor alatt a három dimenzióban a $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ formális vektort értjük. Ez az operátor egy differenciálható háromváltozós valós függvényhez annak gradiensét rendeli hozzá. Tehát ha $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor

$$\nabla f = \text{grad } f.$$

1.2.2. Differenciálhatóság

Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektormező derivált-mátrixa:

$$DF(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{x}) \\ \nabla f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vektormező **differenciálható** az $\mathbf{x} \in D_F$ pontban, ha $\exists \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, amire

$$\lim_{\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\|F(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}) - \mathbf{A} \Delta \mathbf{x}\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} = 0$$

Ekkor $DF(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$.

1.2.2.1. Tulajdonságok

- Linearitás és homogenitás

$$D(F + G) = DF + DG$$

$$D(cF) = c(DF)$$

$F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenciálhatók és $c \in \mathbb{R}$.

- Kompozíció differenciálása

$$D(G \circ F)(a) = DG(F(a)) \cdot DF(a)$$

Feltettük, hogy az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$ pedig az $F(a) \in \mathbb{R}^m$ pontban differenciálhatóak.

- Inverz deriváltja

$$DF^{-1}(F(a)) = (DF(a))^{-1}$$

Feltettük, hogy az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható az $a \in \text{int} D_F$ helyen, és a derivált-mátrix nem szinguláris.

- Szorzási szabály

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

1.2.3. Divergencia

Legyen $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Ekkor a vektormező **divergenciáját** így definiáljuk:

$$\operatorname{div}(F) = \langle \nabla, F \rangle := \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

1.2.4. Rotáció

A fenti F vektormező **rotációja**

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

A rotáció egy másik jelölése: $\operatorname{curl}(F)$.

1.2.4.1. Kiszámítása

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

1.2.5. Fizikai és szemléletes jelentés

- A divergencia egy számszerű mértéke annak, hogy a vektormező egy adott pontból mennyire "szóródik szét". Ha egy F vektormezőre $\langle \nabla, F \rangle \equiv 0$, akkor a vektormező **divergencia-mentes**.
- A rotációvektor fizikai értelmezése: hossza az erőter örvénylésének sebessége, és iránya merőleges az örvénylésre.
- Bár a rotáció egy háromdimenziós vektor, $\nabla \times F = (0, 0, 0)$ helyett röviden azt írjuk, hogy $\nabla \times F = 0$. Ha egy vektormező rotációja 0, akkor a vektormező **örvénymentes**.

1.3. Alapösszefüggések, deriválási szabályok

1.

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

2.

$$D(fF) = fDF + F\nabla f$$

3.

$$\langle \nabla, fF \rangle = \langle F, \nabla f \rangle + f\langle \nabla, F \rangle$$

4.

$$\nabla \times (fF) = \nabla f \times F + f \cdot \nabla \times F$$

5.

$$\langle \nabla, F \times G \rangle = \langle G, \nabla \times F \rangle - \langle F, \nabla \times G \rangle$$

1.4. Vonalintegrál: definíció és kiszámítás

1.4.1. Skalármező vonalintegrálja

Adott $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ sima görbe, melynek egy lehetséges paraméterezése $\Gamma = \{\gamma(t) | t \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^n$. Az $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos valós függvény vonalintegrálja a Γ görbe mentén:

$$\int_{\Gamma} f \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt.$$

Skalármező vonalintegráljának lehetséges fizikai interpretációja a *tömeg*. A fenti érték független a görbe paraméterezésétől.

1.4.2. Vektormező vonalintegrálja

Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektormező vonalintegrálja a Γ görbe mentén:

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) \, d\underline{r} = \int_{\Gamma} \langle F, d\underline{l} \rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt.$$

Vektormező vonalintegráljának lehetséges fizikai interpretációja a *munka*, melyet az erőterben az adott görbe mentén haladva végzünk.

1.4.3. Speciális eset $\mathbb{R}^2$ -ben

Adott $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező vonalintegrálja a $\Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \mid t \in [a, b] \right\} \subset \mathbb{R}^2$ görbe mentén:

$$\int_{\Gamma} f(x, y) \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt.$$

2. Tétel

2.1. Egyszerű sokaságok $\mathbb{R}^n$ -ben

Egy $\mathbb{R}^n$ -beli M halmaz k -dimenziós sokaság, ha lokálisan olyan, mintha k dimenziós volna. Például egy síkbeli vagy térbeli görbe esetén minden pont halmazbeli környezete "olyan, mint" egy egydimenziós intervallum. Ez lesz egydimenziós (egy paraméterű) sokaság. Másik példa egy térbeli felület, amelyben minden pont lokális környezete körlappal azonosítható. Ez lesz egy kétdimenziós (két paraméterű) sokaság. Láthatjuk, hogy a sokaság dimenziója megegyezik a paraméterezéskor használt paraméterek számával.

2.1.1. Paraméteres megadás

Adott $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, ha $\forall p \in M$ -hez $\exists U$ környezet és $\exists F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés, és $\exists V \in \mathbb{R}^k$ nyílt gömb, hogy $F(V) = U \cap M$ és DF teljes rangú, tehát a leképezés bijektív.

2.1.2. Implicit megadás

Adott $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, ha $\exists \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{n-k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ független, differenciálható függvények, hogy M a ϱ_i függvények nulltereinek metszete, azaz

$$M = \bigcap_{i=1}^{n-k} \{\varrho_i = 0\}$$

és

$$D = \begin{pmatrix} \nabla \varrho_1 \\ \nabla \varrho_2 \\ \vdots \\ \nabla \varrho_{n-k} \end{pmatrix}$$

teljes rangú.

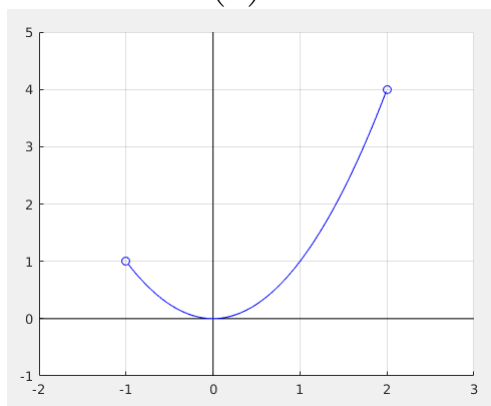
2.1.3. Példák

2.1.3.1. Egydimenziós sokaság a síkon

$n = 2$ és $k = 1$

$F : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(t) = (t, t^2)$, $V = (-1, 2)$.

A Jacobi mátrix $\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ valóban teljes rangú minden t esetén.

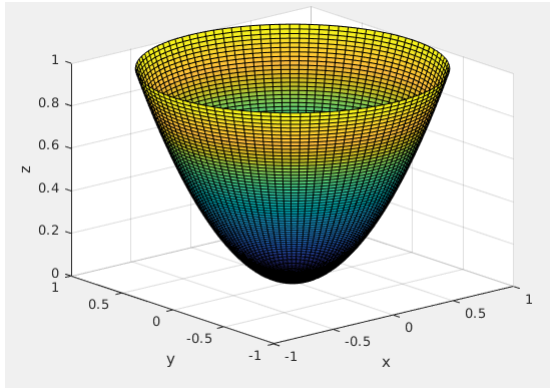


2.1.3.2. 2-dimenziós sokaság a térben

$n = 3$, $k = 2$

$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$, $V = \{x^2 + y^2 < 1\}$.

A Jacobi mátrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$ mindig teljes rangú.



2.1.3.3. Egységgör

Az egységgör egydimenziós sokaság $\mathbb{R}^2$ -ben

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varrho_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

2.2. Vonal $\mathbb{R}^n$ -ben

$$\text{A } \Gamma = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \mid t \in [a, b] \right\} \subset \mathbb{R}^n \text{ görbét } \mathbf{vonalnak} \text{ nevezzük.}$$

2.3. Felület $\mathbb{R}^3$ -ban

Adott egy $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány és egy $s : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvény:

$$s(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix},$$

ahol $(u, v) \in D$.

A **felület** s értékkészlete

$$S = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mid (u, v) \in D\}.$$

Sima felületről beszélünk, ha $s : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható.

2.4. Sokaság határa

2.4.1. Lezárás

Adott $M \subset \mathbb{R}^n$ sokaság lezárása

$$\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x_n) \subset M, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x\}.$$

2.4.2. Határ

Adott $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság határa $\partial M = \overline{M} \setminus M \subset \mathbb{R}^n$ $k - 1$ dimenziós sokaság.

2.5. Felületi integrál $\mathbb{R}^3$ -ban

2.5.1. Skalármező felületi integrálja

Adott $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ skalármező felületi integrálja az $S = \{s(u, v) \mid (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$ felület mentén

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(s(u, v)) \|s'_u \times s'_v\| \, d(u, v) = \iint_D f(s(u, v)) \left\| \frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \right\| \, d(u, v)$$

2.5.2. Vektormező felületi integrálja

Adott $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező felületi integrálja az $S = \{s(u, v) | (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$ felület mentén

$$\iint_S \langle F, d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle F, \mathbf{n} \rangle dS = \iint_D \langle F, \mathbf{n} \rangle \|s'_u \times s'_v\| d(u, v) = \iint_D \langle F(s(u, v)), s'_u \times s'_v \rangle d(u, v).$$

2.6. Fluxus

Adott egy $S \subset \mathbb{R}^3$ sima felület, ennek minden pontjában $\mathbf{n}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ egységnyi hosszú normálvektor. Egy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező felületi integrálját:

$$\iint_S \langle F, d\mathbf{S} \rangle = \iint_S \langle F, \mathbf{n} \rangle dS$$

a vektormező a felületre vett **fluxusának** nevezzük.

2.6.1. Fizikai jelentése

A fluxus általában egy adott S felületen átáramló anyag vagy energia mennyiségét jelenti vagy egy erőternek a felületen való áthatolását jellemzi.

2.7. Gauss-Osztrogradszkij tétel

Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ egy korlátos térrész, és ∂M a térrészt határoló (zárt) felület. Ekkor bármely $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezőre:

$$\iiint_M \operatorname{div}(F) d(x, y, z) = \iiint_M \langle \nabla, F \rangle dV = \oiint_{\partial M} \langle F, d\mathbf{S} \rangle$$

Bizonyítás

Legyen $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$. Ekkor azt fogjuk belátni, hogy

$$\iiint_M \langle \nabla, F \rangle dV = \iiint_M \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dV = \iint_{\partial M} (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3) dS$$

Ezt tagonként nézzük, tehát

$$\begin{aligned} \iiint_M \frac{\partial f_1}{\partial x} dV &= \iint_{\partial M} f_1 n_1 dS \\ \iiint_M \frac{\partial f_2}{\partial y} dV &= \iint_{\partial M} f_2 n_2 dS \\ \iiint_M \frac{\partial f_3}{\partial z} dV &= \iint_{\partial M} f_3 n_3 dS \end{aligned}$$

Lássuk be például a harmadik egyenlőséget. Legyen

$$\partial M = \partial M_{top} \cup \partial M_{side} \cup \partial M_{bottom},$$

tehát tegyük fel, hogy ∂M felírható normáltartományként.

1.

$$\partial M_{top} = \{s_{top} = (u, v, t(u, v)) | (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2\} \quad n_3 > 0$$

Tudjuk, hogy

$$\mathbf{n} = \frac{s'_{top_u} \times s'_{top_v}}{\|s'_{top_u} \times s'_{top_v}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + t_u'^2 + t_v'^2}} \begin{pmatrix} -t'_u \\ -t'_v \\ 1 \end{pmatrix} \implies n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + t_u'^2 + t_v'^2}}.$$

Ekkor

$$\iint_{\partial M_{top}} f_3 n_3 \, dS = \iint_D f_3(u, v, t) \cdot n_3(u, v, t) \sqrt{1 + t_u'^2 + t_v'^2} \, d(u, v) = \iint_D f_3(u, v, t) \, d(u, v).$$

2.

$$\partial M_{side} = \{s_{side} = (u, v, s) | (u, v) \in \partial D, s \in [b(u, v), t(u, v)]\} \quad n_3 = 0$$

3.

$$\partial M_{bottom} = \{s_{bottom} = (u, v, b(u, v)) | (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^3\} \quad n_3 < 3$$

Tudjuk, hogy

$$\mathbf{n} = \frac{s'_{bottom_u} \times s'_{bottom_v}}{\|s'_{bottom_u} \times s'_{bottom_v}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + b_u'^2 + b_v'^2}} \begin{pmatrix} b_u' \\ b_v' \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow n_3 = -\frac{1}{\sqrt{1 + b_u'^2 + b_v'^2}}.$$

Ekkor

$$\iint_{\partial M_{bottom}} f_3 n_3 \, dS = \iint_D f_3(u, v, b) \cdot n_3(u, v, b) \sqrt{1 + b_u'^2 + b_v'^2} \, d(u, v) = - \iint_D f_3(u, v, b) \, d(u, v).$$

Tehát

$$\begin{aligned} \iint_{\partial M} f_3 n_3 \, dS &= \iint_D (f_3(u, v, t(u, v)) - f_3(u, v, b(u, v))) \, d(u, v) = \\ &= \iint_D (f_3(x, y, t(x, y)) - f_3(x, y, b(x, y))) \, d(x, y) = \iint_D \int_{b(x, y)}^{t(x, y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} \, dz \, d(x, y) = \iiint_M \frac{\partial f_3}{\partial z} \, d(x, y, z). \end{aligned}$$

3. Tétel

3.1. Stokes tétel $\mathbb{R}^3$ -ban

Adott egy $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező és egy $M \subset \mathbb{R}^3$ sima felület, amelyet ∂M sima, zárt görbe határol. Legyen a görbe paraméterezése $\partial M = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^3 | t \in [a, b]\}$.

Ekkor

$$\iint_M \operatorname{rot}(F) \, d\mathbf{S} = \iint_M \nabla \times F \, d\mathbf{S} = \oint_{\partial M} F(\underline{r}) \, d\underline{r} = \oint_{\partial M} \langle F, d\mathbf{l} \rangle.$$

(Átfogalmazva:) A felület egységnyi normálvektorait jelölje $\mathbf{n}$, és a görbe pontjaihoz húzott egységnyi hosszú érintővektorokat jelölje T .

Ekkor

$$\iint_M \operatorname{rot}(F) \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_M \nabla \times F \, d\mathbf{S} = \oint_{\partial M} F \cdot T \, ds.$$

3.2. Cirkuláció

Az $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormező vonalintegrálját a Γ zárt görbe mentén a vektormező **cirkulációjának** hívjuk.

3.2.1. Szemléletes jelentés

A **cirkuláció** a vektormezőben egy zárt görbére vett vonalintegrál értéke.

Zárt görbe esetén a vonalintegrál jelentése a vektormező "forgása" a görbe mentén.

Egy vektormező **cirkulációja** pozitív és negatív is lehet, Γ irányításától függően.

3.3. Sokaság, általános eset

Az $M \subset \mathbb{R}^n$ részhalmaz k -dimenziós differenciálható sokaság ($k \leq n$), ha $\forall p \in M$ -nek megadható olyan U környezete, hogy

- $\exists F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés, melynek DF Jacobi mátrixa teljes rangú,
- és $\exists V \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz, hogy $F(V) = U \cap M$, és ez a hozzárendelés egy-egyértelmű.

3.4. Parametrikus megadás: térkép és atlasz

Adott $M \subset \mathbb{R}^n$ k dimenziós sokaság, ha $\exists(U_\alpha)$ nyílt lefedése, és $\forall U_\alpha$ -hoz $\exists \phi_\alpha : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, bijektív leképezés és $V_\alpha \in \mathbb{R}^k$ nyílt gömb, melyre $\phi_\alpha(V_\alpha) = U_\alpha$ és U_α, U_β diszjunkt halmazokra $\phi_\alpha^{-1}(\phi_\beta) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ differenciálható, bijektív leképezés.

Ekkor (U_α, ϕ_α) **lokális térkép**, illetve $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ **atlasz**.

3.5. Tangens tér és normál tér - parametrikus és implicit megadású sokaság esetén

$$N_p \times T_p = \mathbb{R}^n$$

3.5.1. Implicit megadás esetén

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k -dimenziós sokaság, melyet impliciten adtunk meg. Ekkor a $p \in M$ ponthoz tartozó N_p **normáltérnek** a ϱ_i függvények gradiensei által az adott pontban kifeszített vektorteret nevezzük.

$$N_p = \operatorname{span}\langle \nabla \varrho_i(p) \rangle$$

Ezért $\dim N_p = n - k$.

A $p \in M$ ponthoz tartozó **tangenstér** (vagy érintőtér) a normáltér ortogonális (merőleges) kiegészítője:

$$T_p = \{v | v \perp N_p\}$$

$\dim T_p = k$.

3.5.2. Paraméteres megadás esetén

Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k -dimenziós sokaság, melyet paraméteresen adtunk meg.
Ekkor

$$M = \left\{ \gamma(\underline{t}) = \begin{pmatrix} x_1(\underline{t}) \\ x_2(\underline{t}) \\ \vdots \\ x_n(\underline{t}) \end{pmatrix} \mid \underline{t} \in \mathbb{R}^k \right\}$$

A p ponthoz tartozó **tangenstér**:

$$T_p = \text{span}\langle \gamma'_{t_i}(p) \rangle$$

A $p \in M$ ponthoz tartozó **normáltér** a tangenstér ortogonális kiegészítője:

$$N_p = \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \perp T_p \}$$

4. Tétel

4.1. Elemi k -formák $\mathbb{R}^n$ -ben

1. Elemi 1-formáknak nevezzük a $dx_1, dx_2, \dots, dx_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeket, melyekre $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ esetén $dx_i(\mathbf{v}) = v_i$.
2. Elemi 2-formáknak nevezzük az elemi 1-formák ékszorzatát, tehát

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$dx_i \wedge dx_j(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_i & w_i \\ v_j & w_j \end{vmatrix}$$

3. Elemi k -formáknak nevezzük az elemi 1-formák ismételt ékszorzatát az I szigorúan monoton növekvő indexhalmaz szerint. Tehát legyen I szigorúan monoton növekvő indexhalmaz, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.
Ekkor az elemi k -forma

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} : (\mathbb{R}^n)^k = \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$dx_I(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{i_1} \\ \mathbf{A}_{i_2} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{i_k} \end{vmatrix}$$

ahol $\mathbf{A}_{i_j}$ az $\mathbf{A} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mátrix i_j -edik sorvektora.

4.2. k -formák $\mathbb{R}^n$ -ben

1. 1-formának nevezzük egy $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineáris leképezést. Ekkor az 1-formák elemi 1-formák lineáris kombinációi, tehát

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i \implies \omega(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n a_i dx_i(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n a_i v_i$$

2. k -formának nevezzük egy $\omega : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}$ multilineáris leképezést. Az n dimenziós k -formák vektorteret alkotnak, ez a $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$.

4.3. Külső szorzat

$\tau \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ és $\lambda \in \bigwedge^l(\mathbb{R}^n)$ **külső szorzata** (vagy **ékszorzata**)
 $\tau \wedge \lambda : \mathbb{R}^{n \times (k+l)} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tau \wedge \lambda \in \bigwedge^{k+l}(\mathbb{R}^n) \quad \tau \wedge \lambda(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+l}) = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \tau(\mathbf{v}_{\sigma_1}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_k}) \cdot \lambda(\mathbf{v}_{\sigma_{k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_{k+l}})$$

$|\sigma|$ a permutáció inverziószáma.

4.3.1. Alaptulajdonságai

1. Antikommutatív

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$$

2. Általános eset

$$\tau \wedge \lambda = (-1)^{k \cdot l} \lambda \wedge \tau$$

3. Asszociatív

$$\omega \wedge (\lambda \wedge \tau) = (\omega \wedge \lambda) \wedge \tau$$

4. Disztributív

$$\omega \wedge (\lambda + \tau) = \omega \wedge \lambda + \omega \wedge \tau$$

4.4. Differenciál k -formák

1. Differenciál 0-formának nevezzük egy $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható skalármezőt.
2. Differenciál 1-formának nevezzük egy $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$$

ahol $\forall f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

3. Differenciál k -formának nevezzük egy $\omega : \mathbb{R}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$\omega = \sum_{I=1}^n f_I dx_I$$

ahol I indexhalmaz és f_I differenciálható függvények.

4.5. Külső deriválás

1. Ha f egy differenciál 0-forma, akkor külső deriváltja differenciál 1-forma:

$$df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

2. Ha $\omega = f dx_1$ egyetlen tagból álló differenciál k -forma, külső deriváltja $d\omega$ egy differenciál $(k+1)$ -forma, melyre

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1$$

3. Ha ω differenciál k -forma, akkor külső deriváltja:

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I = \sum_I \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I$$

Általános esetben ha $\omega = \sum_i \omega_i$, akkor $d\omega = \sum_i d\omega_i$.

4.6. Poincaré lemma

Adott ω differenciálformára $d^2\omega = d(d\omega) = 0$.

5. Tétel

5.1. Differenciálformák $\mathbb{R}^3$ -ban

$\mathbb{R}^3$ -ban a formák használatára néhány konvenciót vezetünk be, amelyekkel összefüggést teremtünk a formák *absztrakt* világa, valamint a skalár- és vektormezőkről korábban tanultak között. Az elemi 1-formákat jelölje dx , dy és dz .

1. T_0 egy 0-formához skalármezőt rendel.

$$\omega = f(x, y, z) \implies T_0(\omega) = f(x, y, z)$$

2. T_1 egy 1-formához vektormezőt rendel.

$$\omega = f dx + g dy + h dz \implies T_1(\omega) = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

3. T_2 egy 2-formához szintén vektormezőt rendel.

$$\omega = f dx dy + g dx dz + h dy dz \implies T_2(\omega) = \begin{pmatrix} h \\ -g \\ f \end{pmatrix}$$

4. T_3 egy 3-formához skalármezőt rendel.

$$\omega = f(x, y, z) dx dy dz \implies T_3(\omega) = f$$

Ezek a hozzárendelések lehetővé teszik, hogy a korábban definiált vektoroperátorokat visszavezzük a formák deriválására.

5.1.1. Külső deriválás és vektormező deriváltak közti kapcsolat

1. Ha $\omega \in \bigwedge^0$, $\omega = f$, akkor

$$T_1(d\omega) = \text{grad} T_0(\omega) = \nabla T_0(\omega)$$

2. Ha $\omega \in \bigwedge^1$, $\omega = f dx + g dy + h dz$, akkor

$$T_2(d\omega) = \text{rot} T_1(\omega) = \nabla \times T_1(\omega)$$

3. Ha $\omega \in \bigwedge^2$, $\omega = h dx dy - g dx dz + f dy dz$, akkor

$$T_3(d\omega) = \text{div} T_2 = \langle \nabla, T_2(\omega) \rangle$$

5.2. Integrálás sokaságon

Adott $M \subset \mathbb{R}^n$ paraméteres megadású k -dimenziós sokaság és $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ differenciál k -forma. A paraméteres megadásban $\phi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés, ahol $D\phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ teljes rangú mátrix, illetve $V \subset \mathbb{R}^k$ olyan nyílt gömb, hogy $\phi(V) = M$. Ekkor

$$\int_M \omega = \int_V \omega(D\phi) dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_k.$$

5.2.1. Speciális esetek

1. Legyen $n = 2$ és $k = 1$, tehát M görbe, és $\omega_1 = f(x, y) dx$, $\omega_2 = g(x, y) dy$. Ekkor

$$M = \left\{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \middle| t \in [a, b] \right\}$$

$$\int_M \omega_1 = \int_M f(x, y) \, dx = \int_a^b f(\gamma(t)) \, dx \, (D\gamma) \, dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{x}(t) \, dt$$

és

$$\int_M \omega_2 = \int_M g(x, y) \, dy = \int_a^b g(\gamma(t)) \, dy \, (D\gamma) \, dt = \int_a^b g(\gamma(t)) \dot{y}(t) \, dt$$

$$\text{mert } D(\gamma) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

2. Legyen $n = k = 3$, tehát M térrész és ∂M zárt felület, illetve $\omega = h \, dx \, dy - g \, dx \, dz + f \, dy \, dz$ és

$$d\omega = \langle \nabla, F \rangle \, d(x, y, z), \text{ ahol } F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}. \text{ Ekkor}$$

$$\int_M d\omega = \iiint_M \langle \nabla, F \rangle \, d(x, y, z) = \int_{\partial M} \omega = \oint_{\partial M} \langle F, d\mathbf{S} \rangle.$$

6. Tétel

6.1. Green tétel

Adott $P, Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenciálható függvények. Ekkor

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y) = \oint_{\partial D} (P dx + Q dy).$$

6.1.1. Területszámítás

Legyen $P(x, y) = -y$ és $Q(x, y) = 0$. Ekkor

$$A(D) = \iint_D d(x, y) = \oint_{\partial D} -y dx.$$

Legyen továbbá $P(x, y) = 0$ és $Q(x, y) = x$. Ekkor

$$A(D) = \iint_D d(x, y) = \oint_{\partial D} x dy.$$

Tehát

$$A(D) = \oint_{\partial D} -y dx = \oint_{\partial D} x dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} (x dy - y dx).$$

6.2. Általános Stokes tétel

Adott $\omega \in \bigwedge^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ differenciál $(k-1)$ -forma és M k -dimenziós irányítható sokaság. Ekkor $d\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ differenciál k -forma és ∂M $(k-1)$ -dimenziós irányítható sokaság. Tegyük fel, hogy M és ∂M irányítása azonos.

Ekkor

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

6.2.1. Speciális esetek

1. legyen $n = k = 1$, tehát $M = (a, b)$ intervallum és $\partial M = \{b, a\}$, illetve $\omega = f(x)$ és $d\omega = f'(x) dx$. Ekkor

$$\int_M d\omega = \int_a^b f'(x) dx = \int_{\partial M} \omega = \int_{\{b, a\}} f = f(b) - f(a).$$

Ezzel beláttuk a Newton-Leibniz formulát.

2. Legyen $n = k = 3$, tehát M térrész és ∂M zárt felület, illetve $\omega = h dx dy - g dx dz + f dy dz$ és $d\omega = \langle \nabla, F \rangle d(x, y, z)$, ahol $F = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$. Ekkor

$$\int_M d\omega = \iiint_M \langle \nabla, F \rangle d(x, y, z) = \int_{\partial M} \omega = \oint_{\partial M} \langle F, d\mathbf{S} \rangle.$$

Ezzel beláttuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt.

3. Legyen $n = 3$ és $k = 2$, tehát M felület és ∂M zárt görbe, illetve $\omega = f dx + g dy + h dz$ és $d\omega = \langle \nabla \times F, d\mathbf{S} \rangle$. Ekkor

$$\int_M d\omega = \iint_M \langle \nabla \times F, d\mathbf{S} \rangle = \int_{\partial M} \omega = \oint_{\partial M} \langle F, d\mathbf{l} \rangle.$$

Ezzel beláttuk a klasszikus Stokes-tételt.

4. Legyen $n = k = 2$, tehát M síkbeli tartomány és ∂M zárt görbe, illetve $\omega = f \, dx + g \, dy$ és $d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \, dy$. Ekkor

$$\int_M d\omega = \iint_M \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) d(x, y) = \int_{\partial M} \omega = \oint_{\partial M} (f \, dy + g \, dx).$$

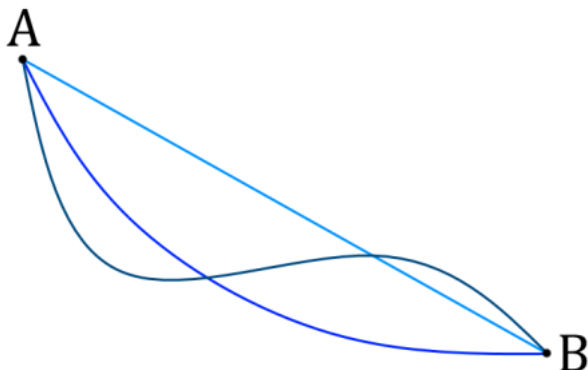
Ezzel beláttuk a Green-tételt.

7. Tétel

7.1. Variációszámítás: fizikai példák

7.1.1. Bernoulli-feladat / Brachisztokron probléma

Adott két pont a síkon: A és B , ahol az A pont magasabban van, mint B . Az A pontból elengedünk egy pontszerű testet egy görbe alakú drótpálya mentén. Állandó nagyságú, lefelé irányuló gravitációt és nulla surlódást feltételezve melyik az a görbe, amelyen a test a legrövidebb idő alatt ér le B -be?



7.1.2. Forgástest felszín minimalizálás

Adott két pont a síkon $A(a, y_0)$ és $B(b, y_1)$, mindkettő az x tengely felett van, azaz $y_0 > 0$ és $y_1 > 0$. Ezeket a pontokat összekötjük egy sima görbével, melyet valamilyen $y = f(x)$ függvény gráfja ad meg. A görbét forgassuk meg az x tengely körül. Az így keletkezett forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Feladat: Milyen f függvény esetén lesz a felszín a legkisebb, feltéve, hogy a görbe két végpontja rögzített: $f(a) = y_0$ és $f(b) = y_1$?

7.1.3. Geodetikus görbék

Adott egy felület $\mathbb{R}^3$ -ban, és rajta két pont, p és q . A két pontot összekötő, a felületen haladó Γ görbék közül melyik a legrövidebb?

Ha a Γ görbe paraméterezése $\{x(t), y(t), z(t) | t \in [a, b]\}$, akkor a feladat:

$$s(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \rightarrow \min.$$

7.2. Feladat matematikai modellje

Adott a síkon két pont (x_0, y_0) és (x_1, y_1) , ahol $x_0 < x_1$.

A **megengedhető függvények** halmazát $\mathcal{C}$ jelöli:

$$\mathcal{C} = \{\phi : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ kétszer folytonosan differenciálható, } \phi(x_0) = y_0, \phi(x_1) = y_1\}.$$

Adott továbbá $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionál

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x)) dx.$$

A feladat az, hogy megkeressük azon $u \in \mathcal{C}$ függvény(ek)e(t), mely(ek)re a funkcionál minimális (maximális). Azt mondjuk, hogy ekkor az u az I funkcionál **stacionárius függvénye**.

Ekkor a **variációszámítás alapfeladata**:

$$\min_{\phi \in \mathcal{C}} I(\phi) = ?$$

7.3. Optimum létezésének szükséges feltétele

Tegyük fel, hogy valamely $u = u(x) \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja I -t. Ekkor az u függvény kielégíti az alábbi összefüggést:

$$L[u] := F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0.$$

7.3.1. Euler-Lagrange egyenlet

$$L[u] = F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = F'_u - F''_{u'x} - u' F''_{u'u} - u'' F''_{u'u'} = 0$$

Bizonyítás

Adott

$$\mathcal{C}_0 = \{\eta : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \eta \text{ kétszer folytonosan differenciálható, } \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\}$$

perturbációk halmaza.

Ekkor tudjuk, hogy $\forall u \in \mathcal{C}, \eta \in \mathcal{C}_0$ esetén $(u + \eta) \in \mathcal{C}$. Legyen

$$G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon\eta).$$

Mivel $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, így meghatározhatjuk a szélsőértéket deriválással, hiszen feltéve, hogy u minimalizálja I -t,

$$\forall y \in \mathcal{C} : I(u) \leq I(y) \implies \forall \varepsilon : G(0) \leq G(\varepsilon) \implies G'(0) = 0.$$

Tudjuk, hogy

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x)) dx.$$

Innen

$$\begin{aligned} G'(\varepsilon) &= \int_{x_0}^{x_1} (F'_u \eta + F'_{u'} \eta') dx = \int_{x_0}^{x_1} F'_u \eta dx + \int_{x_0}^{x_1} F'_{u'} \eta' dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F'_u \eta dx + F'_{u'} \eta \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F'_{u'} \eta dx = \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} \right) \eta dx = 0. \end{aligned}$$

Feltételezhetjük, hogy az $\eta \in \mathcal{C}_0$ perturbáció nem nulla, így kapjuk is a bizonyítandót.

7.4. Speciális esetek

Adott

$$I(u) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u(x), u'(x)) dx$$

funkcionál.

1. Tegyük fel, hogy $F = F(x, u)$. Ekkor $F'_{u'} = 0$, amiből

$$L[u] = F'_u = 0.$$

2. Tegyük fel, hogy $F = F(x, u')$. Ekkor $F'_u = 0$, amiből

$$L[u] = -\frac{d}{dx} F'_{u'} = 0 \implies F'_{u'} = c \implies F = cu'.$$

3. Tegyük fel, hogy $F = F(u, u')$. Ekkor definiáljuk a következő **energiafüggvényt**:

$$E(x) := F(u(x), u'(x)) - u'(x) F'_{u'}(u(x), u'(x)) = F - u' F'_{u'}$$

Ekkor

$$E' = u' F'_u + u'' F'_{u'} - u'' F'_{u'} - u' (u' F''_{u'u} + u'' F''_{u'u'}) = u' L[u] = 0 \implies E = c.$$

7.5. Brachisztokron feladat megoldása

Adott $A(x_0, y_0)$ és $B(x_1, y_1)$ pontok, ahol $x_0 < x_1$ és $y_0 > y_1$. Az őket összekötő görbe: $y : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer differenciálható és $y(x_0) = y_0$, valamint $y(x_1) = y_1$. Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) pontban a test sebessége v_0 , így

$$E_0 = E_p + E_k = mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

tehát adott a kezdeti energia. Ehhez hasonlóan adott pontban a test v sebessége mellett

$$E = E_p + E_k = mgy + \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{E_0}{mg} - y}.$$

Ekkor a Γ görbén a gurulás ideje

$$T = \int_{\Gamma} \frac{dl}{v} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g} \sqrt{\frac{E_0}{mg} - y}} dx.$$

Legyen $u = \frac{E_0}{mg} - y$, amiből a minimalizálandó funkcionál:

$$I(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+u'^2(x)}}{\sqrt{u(x)}} dx \rightarrow \min.$$

Felírva az energiafüggvényt

$$E = \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{u}} - u' \frac{u'}{\sqrt{u(1+u'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{u(1+u'^2)}} = c_1$$

amiből

$$u' = \sqrt{\frac{1}{uc_1^2} - 1}.$$

Ez egy szeparábilis differenciálegyenlet, megoldása

$$\int \sqrt{\frac{c_1^2 u}{1 - c_1^2 u}} du = \int dx$$

Legyen $\tau := c_1^2 u$, amiből $du = \frac{1}{c_1^2} d\tau$. Folytatva:

$$\frac{1}{c_1^2} \int \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}} d\tau = x - c_2$$

Újabb helyettesítésként legyen $\sin^2 \phi := \tau$, ekkor $d\tau = 2 \sin \phi \cos \phi d\phi$. Tehát

$$\int \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}} d\tau = \int \frac{\sqrt{\sin^2 \phi}}{\sqrt{1-\sin^2 \phi}} 2 \sin \phi \cos \phi d\phi = \int 2 \sin^2 \phi d\phi = \int (1 - \cos(2\phi)) d\phi = \phi - \frac{1}{2} \sin(2\phi).$$

Helyettesítsünk vissza, és legyen $\theta = 2\phi$.

$$x - c_2 = \frac{1}{2c_1^2} (\theta - \sin \theta).$$

Végül

$$u = \frac{1}{c_1^2} \tau = \frac{1}{c_1^2} \sin^2 \phi = \frac{1}{2c_1^2} (1 - \cos \theta) \implies y - y_0 = \frac{1}{2c_1^2} (1 - \cos \theta).$$

Ez egy ciklois-darab paraméteres leírása.

A kezdeti feltételekből meg lehet határozni a paramétereket.

8. Tétel

8.1. Variációszámítási alapeladat

Adott továbbá $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionál

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x)) dx.$$

A feladat az, hogy megkeressük azon $u \in \mathcal{C}$ függvény(ek)e, mely(ek)re a funkcionál minimális (maximális). Azt mondjuk, hogy ekkor az u az I funkcionál **stacionárius függvénye**.

Ekkor a **variációszámítás alapeladata**:

$$\min_{\phi \in \mathcal{C}} I(\phi) = ?$$

8.1.1. Optimum létezésének szükséges feltétele

Tegyük fel, hogy valamely $u = u(x) \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja I -t. Ekkor az u függvény kielégíti az alábbi összefüggést:

$$L[u] := F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0.$$

8.1.2. Euler-Lagrange egyenlet

$$L[u] = F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = F'_u - F''_{u'x} - u' F''_{u'u} - u'' F''_{u'u'} = 0$$

8.2. Speciális esetek: $F(x, u, u')$ hiányos változókkal

Adott

$$I(u) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u(x), u'(x)) dx$$

funkcionál.

1. Tegyük fel, hogy $F = F(x, u)$. Ekkor $F'_{u'} = 0$, amiből

$$L[u] = F'_u = 0.$$

2. Tegyük fel, hogy $F = F(x, u')$. Ekkor $F'_u = 0$, amiből

$$L[u] = -\frac{d}{dx} F'_{u'} = 0 \implies F'_{u'} = c \implies F = cu'.$$

3. Tegyük fel, hogy $F = F(u, u')$. Ekkor definiáljuk a következő **energiafüggvényt**:

$$E(x) := F(u(x), u'(x)) - u'(x) F'_{u'}(u(x), u'(x)) = F - u' F'_{u'}$$

Ekkor

$$E' = u' F'_u + u'' F'_{u'} - u'' F'_{u'} - u' (u' F''_{u'u} + u'' F''_{u'u'}) = u' L[u] = 0 \implies E = c.$$

8.3. Forgástest felszín minimalizálása

Adott két pont a síkon $A(a, y_0)$ és $B(b, y_1)$, mindkettő az x tengely felett van, azaz $y_0 > 0$ és $y_1 > 0$. Ezeket a pontokat összekötjük egy sima görbével, melyet valamilyen $y = f(x)$ függvény gráfja ad meg. A görbét forgassuk meg az x tengely körül. Az így keletkezett forgástest felszíne:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Feladat: Milyen f függvény esetén lesz a felszín a legkisebb, feltéve, hogy a görbe két végpontja rögzített: $f(a) = y_0$ és $f(b) = y_1$?

Ebben az esetben legyen $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, kétszer folytonosan differenciálható függvény és a minimalizálandó funkcionál

$$I(u) = \int_a^b u(x) \sqrt{1 + u'^2(x)} \, dx.$$

$F = u \cdot \sqrt{1 + u'^2} = F(u, u')$, tehát F nem függ x -től. Használjuk az energiafüggvényt:

$$E = F - u' F_{u'} = u \cdot \sqrt{1 + u'^2} - u' \frac{u' u}{\sqrt{1 + u'^2}} = \frac{u}{\sqrt{1 + u'^2}} (1 + u'^2 - u'^2) = \frac{u}{\sqrt{1 + u'^2}} = c$$

Innen

$$\frac{u^2}{c^2} = 1 + u'^2 \implies u' = \sqrt{\frac{u^2}{c^2} - 1}$$

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\left(\frac{u}{c}\right)^2 - 1} \implies \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{c}\right)^2 - 1}} du = \int dx$$

Tudjuk, hogy $\operatorname{arch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, ezért $\operatorname{arch}'\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{c}\right)^2 - 1}} \cdot \frac{1}{c}$.

$$c \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{u}{c}\right)^2 - 1}} \cdot \frac{1}{c} du = \int dx$$

$$c \cdot \operatorname{arch}\left(\frac{u}{c}\right) = x + d \implies \operatorname{arch}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{x + d}{c}$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{u}{c} = \operatorname{ch}\left(\frac{x + d}{c}\right) \implies u(x) = c \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x + d}{c}\right)$$

A c és d konstansok értékeit a kezdeti feltételekből lehet kiszámolni.

8.4. Mechanikai alkalmazás

Egy rendszer Lagrange függvénye

$$L = T - V$$

ahol T a kinetikus energia és V a potenciális energia.

8.4.1. Hamilton elv

Ekkor a **Hamilton elv** alapján t_0 időpillanatban lévő kiindulási állapotból a t_1 időpillanatban lévő végállapot között a mozgás olyan, hogy minimalizálja az

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (T - V) \, dt$$

funkcionált.

8.4.2. Energiamegmaradás törvénye

Erre a rendszerre felírva az **energiafüggvényt** kapjuk, hogy

$$E = -T - V = c$$

tehát a rendszer összenergiája konstans.

8.5. Feltétel melletti optimalizálás

Adottak $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ pontok és

$$\mathcal{C} = \{\phi : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ kétszer folytonosan differenciálható, } \phi(x_0) = y_0, \phi(x_1) = y_1\}$$

megengedhető függvények.

Adott továbbá az $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionál

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x)) \, dx.$$

Ezenfelül adott a $J : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionál

$$J(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, \phi(x), \phi'(x)) \, dx.$$

A feladat az, hogy megkeressük azon $u \in \mathcal{C}$ függvény(ek)e)t, mely(ek)re az I funkcionál minimális (maximális) a $J = 0$ feltétel mellett.

8.5.1. Euler-Lagrange egyenlet

Tegyük fel, hogy valamely $u = u(x) \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja a funkcionált az extra feltétel teljesülése mellett. Ekkor van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ konstans, melyre az u függvény kielégíti az alábbi összefüggést:

$$F^* = F - \lambda G$$

$$L[u] := \frac{\partial F^*}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial u'} = F^{*'}_u - \frac{d}{dx} F^{*'}_{u'} = 0$$

9. Tétel

9.1. Több függvény együttes stacionaritása

Adott

$\mathcal{C} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall \phi_i \text{ kétszer folytonosan differenciálható, } \forall \phi_i(x_0) = y_{0_i}, \phi_i(x_1) = y_{1_i}\}.$

Továbbá adott $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcionál

$$I(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x), \phi_1'(x), \dots, \phi_n'(x)) dx.$$

A feladat, hogy megkeressük azon függvényeket, melyekre a funkcionál minimális.

9.1.1. Optimum létezésének szükséges feltétele

Tegyük fel, hogy valamely $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja I -t. Ekkor u koordinátafüggvényei kielégítik az alábbi **Euler-Lagrange egyenleteket**:

$$L_k[u] = F'_{u_k} - \frac{d}{dx} F'_{u'_k} = 0$$

9.1.2. Energiafüggvény

Tegyük fel, hogy F nem függ x -től. Ekkor minden stacionárius megoldáshoz van olyan c konstans, hogy a megfelelően definiált **energiafüggvénye** konstans:

$$E := F(u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n) - \sum_{k=1}^n u'_k F'_{u'_k}(u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n) = c.$$

9.1.3. Geodetikus görbék általános felületen

Adott $S \subset \mathbb{R}^3$ felület

$$S = \left\{ s(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \mid (u, v) \in D \right\}$$

ahol $D \subset \mathbb{R}^2$, illetve adottak $P_1 = (u_1, v_1), P_2 = (u_2, v_2) \in S$ pontok. A célunk, hogy kiszámoljuk azt a

$$\Gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [t_1, t_2]\} \subset S$$

minimális hosszúságú görbét, melyre $\gamma(t_1) = P_1$ és $\gamma(t_2) = P_2$.

Mivel $\Gamma \subset S$, legyen a görbe paraméterezése

$$\gamma(t) \underset{\substack{u=u(t) \\ v=v(t)}}{=} s(u(t), v(t)) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix}.$$

Tudjuk, hogy a Γ görbe hossza

$$S(\Gamma) = \int_{\Gamma} dl = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

ahol a láncszabály miatt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt} x(u(t), v(t)) = \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} \\ \dot{y} &= \frac{d}{dt} y(u(t), v(t)) = \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} \\ \dot{z} &= \frac{d}{dt} z(u(t), v(t)) = \frac{\partial z}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial z}{\partial v} \dot{v}. \end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial y}{\partial v} \dot{v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial z}{\partial v} \dot{v} \right)^2 = \\ &= \underbrace{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \right)}_P \dot{u}^2 + 2 \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right)}_Q \dot{u} \dot{v} + \\ &\quad + \underbrace{\left(\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \right)}_R \dot{v}^2 = \dot{u}^2 P + \dot{u} \dot{v} Q + \dot{v}^2 R.\end{aligned}$$

Ekkor v -t felírhatjuk u függvényében, olyan $v(u)$ függvényt keresve, melyre $v(u_1) = v_1$ és $v(u_2) = v_2$.

$$\dot{u}^2 P + \dot{u} \dot{v} Q + \dot{v}^2 R \stackrel{\substack{v=v(u) \\ \dot{v}=v'(u)}}{=} \dot{u}^2 P + \dot{u}^2 v' Q + \dot{u}^2 v'^2 R = \dot{u}^2 (P + v' Q + v'^2 R).$$

Visszahelyettesítve

$$\begin{aligned}S(\Gamma) &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{u}^2 (P + v' Q + v'^2 R)} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{P + v' Q + v'^2 R} \dot{u} dt \stackrel{\dot{u} dt = du}{=} \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{P + v' Q + v'^2 R} du.\end{aligned}$$

Tehát a minimalizálandó funkcionál

$$I(v) = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{P + v' Q + v'^2 R} du = \int_{u_1}^{u_2} F(u, v, v') du.$$

Hasonlóan felírhatjuk u -t v függvényében, ekkor a funkcionál

$$I(u) = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{u'^2 P + u' Q + R} dv = \int_{v_1}^{v_2} F(v, u, u') dv.$$

9.1.3.1. Geodetikus görbék egységgömbön

Legyen az egységgömb paraméterezése

$$s(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

illetve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(\theta(t), \phi(t)) \\ y(\theta(t), \phi(t)) \\ z(\theta(t), \phi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \phi(t) \cos \theta(t) \\ \sin \phi(t) \sin \theta(t) \\ \cos \phi(t) \end{pmatrix}$$

amiből

$$\begin{aligned}P &= \sin^2 \phi(t) \sin^2 \theta(t) + \sin^2 \phi(t) \cos^2 \theta(t) = \sin^2 \phi(t) \\ Q &= -2 \sin \phi(t) \cos \phi(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) + 2 \sin \phi(t) \cos \phi(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) = 0 \\ R &= \cos^2 \phi(t) \cos^2 \theta(t) + \cos^2 \phi(t) \sin^2 \theta(t) + \sin^2 \phi(t) = 1.\end{aligned}$$

Tehát a minimalizálandó funkcionál

$$I(\theta) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi} d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} F(\phi, \theta, \theta') d\phi.$$

Felírva az Euler-Lagrange egyenletet

$$\begin{aligned}L[\theta] &= \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{d}{d\phi} \frac{\partial F}{\partial \theta'} = \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi} - \frac{d}{d\phi} \frac{\partial}{\partial \theta'} \sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi} = \\ &= -\frac{d}{d\phi} \frac{\theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi}} = 0 \implies \frac{\theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + \theta'^2 \sin^2 \phi}} = c_1.\end{aligned}$$

Kifejezve θ' -t

$$\theta' = \frac{c_1}{\sqrt{\sin^4 \phi - c_1^2 \sin^2 \phi}}$$

amiből

$$\begin{aligned} \theta &= c_1 \int \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^4 \phi - c_1^2 \sin^2 \phi}} = c_1 \int \frac{d\phi}{\sin^2 \phi \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{\sin^2 \phi}}} = \\ &= c_1 \int \frac{d\phi}{\sin^2 \phi \sqrt{1 - c_1^2 - c_1^2 \operatorname{ctg}^2 \phi}} \stackrel{\substack{\tau = \operatorname{ctg} \phi \\ d\tau = -\frac{1}{\sin^2 \phi} d\phi}}{=} -c_1 \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - c_1^2 - c_1^2 \tau^2}} = \\ &= - \int \frac{\frac{c_1}{\sqrt{1 - c_1^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c_1 \tau}{\sqrt{1 - c_1^2}}\right)^2}} d\tau = \arccos \frac{c_1 \tau}{\sqrt{1 - c_1^2}} + c_2 = \arccos \frac{c_1 \operatorname{ctg} \phi}{\sqrt{1 - c_1^2}} + c_2. \end{aligned}$$

Tehát

$$\cos(\theta - c_2) = \cos \theta \cos c_2 + \sin \theta \sin c_2 = \frac{c_1 \operatorname{ctg} \phi}{\sqrt{1 - c_1^2}}$$

amiből

$$\sin \phi \cos \theta \cos c_2 + \sin \phi \sin \theta \sin c_2 - \frac{c_1 \cos \phi}{\sqrt{1 - c_1^2}} = 0.$$

Ekkor

$$x \cos c_2 + y \sin c_2 - \frac{zc_1}{\sqrt{1 - c_1^2}} = 0.$$

Azt látjuk, hogy a két pontot összekötő minimális hosszúságú felületi görbe egy olyan síkon fekszik, amely átmegy a két ponton és a kör középpontján (hiszen az origó kielégíti a fenti egyenletet), tehát a két ponton átmenő főkör a megoldás.

10. Tétel

10.1. Többváltozós függvény, mint ismeretlen

Adott $S \subset \mathbb{R}^n$ összefüggő tartomány, és ennek határán egy rögzített $u_0 : \partial S \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ folytonos függvény. A megengedett függvények halmaza:

$$\mathcal{C} = \{\phi : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{ kétszer folytonosan differenciálható és } \phi(x_1, \dots, x_n) = u_0(x_1, \dots, x_n), \text{ ha } (x_1, \dots, x_n) \in \partial S\}.$$

Ezek közül keressük azt, mely minimalizálja az I funkcionált:

$$I(\phi) = \int_S F(x_1, \dots, x_n, \phi(x_1, \dots, x_n), \phi'_{x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi'_{x_n}(x_1, \dots, x_n)) d(x_1, \dots, x_n).$$

$F : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény.

10.1.1. Optimum létezésének szükséges feltétele

Tegyük fel, hogy valamely $u \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja az I funkcionált. Ekkor az u függvény kielégíti az alábbi **Euler parciális differenciálegyenletet**:

$$L[u] = F'_u - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} F'_{u'_{x_i}} = 0.$$

10.1.2. Speciális eset: Kétváltozós függvény

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő tartomány, és ennek határán egy rögzített $u_0 : \partial S \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. A megengedett függvények halmaza:

$$\mathcal{C} = \{\phi : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{ kétszer folytonosan differenciálható és } \phi(x, y) = u_0(x, y), \text{ ha } (x, y) \in \partial S\}.$$

Ezek közül keressük azt, mely minimalizálja az I funkcionált:

$$I(\phi) = \iint_S F(x, y, \phi(x, y), \phi'_x(x, y), \phi'_y(x, y)) d(x, y).$$

$F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvény.

10.1.2.1. Optimum létezésének szükséges feltétele

Tegyük fel, hogy valamely $u \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja az I funkcionált. Ekkor az u függvény kielégíti az alábbi **Euler parciális differenciálegyenletet**:

$$L[u] = F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{u'_y} = 0.$$

10.1.2.2. Minimális felszín (Plateau-feladat)

Keressük azt az u kétváltozós függvényt, melynek a felülete minimális az adott peremfeltételek mellett. A funkcionál

$$I(u) = \iint_S dS = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} d(x, y).$$

Az Euler-Lagrange egyenletet felírva

$$\begin{aligned} L[u] &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} = \\ &= -\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}}}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = 0 \end{aligned}$$

amiből

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Feltéve, hogy $\frac{\partial u}{\partial x}$ és $\frac{\partial u}{\partial y}$ kicsik, azt kapjuk, hogy $\Delta u = 0$, tehát a Laplace-egyenletet kapjuk.

10.1.2.3. Húr mozgásának egyenlete

Az l hosszúságú m tömegű húr rezgőmozgást végez. Ekkor a mozgási energiája

$$T(t) = \frac{m}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx$$

illetve helyzeti energiája

$$V(t) = \tau \int_0^l \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) dx.$$

Tegyük fel, hogy $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|$ kicsi, és közelítsük $U(t)$ -t az integrandus Taylor-polinomjával, miszerint

$$V(t) \approx \tau \int_0^l \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 1 \right) dx = \frac{\tau}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Ekkor a **Hamilton-elv** alapján a $[t_1, t_2]$ intervallumban a húr mozgása minimalizálja az

$$I(u) = \int_{t_1}^{t_2} (T(t) - V(t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left(\frac{m}{2l} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) dx dt = \iint_{[0,l] \times [t_1,t_2]} F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) d(x, t)$$

funkcionált. Felírva az Euler-Lagrange egyenletet

$$L[u] = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial u}{\partial t}} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{m}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\tau l}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Tehát a megoldást a hullámeqyenlet megoldásából kapjuk.

11. Tétel

11.1. PDE típusai, alapkérdések

A parciális differenciálegyenlet egy olya összefüggés, ahol az ismeretlen egy többváltozós függvény. Az egyenletben szerepelhet maga a függvény, deriváltjai: a függvény gradiense, Hesse-mátrixa, magasabbrendű parciális deriváltjai is.

Az ismeretlen függvény koordinátái között van egy kiválasztott - ez a t -, ami az **idő** fizikai mennyiségének felel meg, a többi pedig - x_k - a **hely** koordinátáit adják meg. Ebben az esetben az ismeretlen függvényt $u(x_1, \dots, x_n, t)$ jelöli.

11.1.1. Alapkérdések

- Megoldható-e a PDE?
- Ha igen, létezik-e egyértelmű megoldás? Jelenleg nem áll rendelkezésünkre olyan általános elmélet, melynek segítségével az összes PDE-t meg tudnánk oldani, sőt, úgy sejtjük, hogy ilyen elmélet nem is létezik.
- Stabil-e a megoldás? Stabil megoldásról akkor beszélünk, ha az folytonosan függ a PDE paramétereitől és a kezdeti feltételektől.

A PDE-ket két nagy csoportba oszthatjuk: lineárisra és nemlineárisra.

11.1.2. Lineáris PDE-k

- Transzport egyenlet

$$u'_t + b \cdot u'_x = 0$$

- Laplace-egyenlet (u nem függ az időtől)

$$\Delta u = 0$$

- Helmholtz-egyenlet

$$\Delta u = -\lambda u$$

Itt a λ -t is keressük, egyben sajátérték probléma is.

- Hővezetés egyenlete (u függ az időtől is)

$$u'_t = \Delta u$$

- Schrödinger egyenlet

$$i \cdot u'_t = -\Delta u$$

- Hullámeqyenlet

$$u''_{tt} = \Delta u$$

11.1.3. Nemlineáris PDE-k

-

$$|\text{grad } u| = |\nabla u| = 1$$

- Minimális felület

$$\text{div} \left(\frac{\text{grad } u}{\sqrt{1 + |\text{grad } u|^2}} \right) = \left\langle \nabla, \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right\rangle = 0$$

11.2. Transzport egyenlet

Adott $u(x, t)$ kétváltozós függvény. Ekkor a transzport egyenlet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$$

és a kezdeti feltétel $u(x, 0) = g(x)$.

11.2.1. Homogén eset

Adott $u(x, t)$ kétváltozós függvény. A homogén transzport egyenlet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad u(x, 0) = g(x).$$

Ekkor

$$u(x, t) = g(x - bt).$$

11.2.1.1. Gyenge megoldás, szakadás terjedése időben

Ha a kezdeti feltételnek szingularitása van, akkor a $g(x - bt)$ -t gyenge megoldásnak nevezzük. Ekkor a szingularitás nem tűnik el, hanem időben tovább terjed.

Bizonyítás

Definiáljunk egy $z(s)$ függvényt, melyre

$$z(s) := u(x + bs, t + s)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} z'(s) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x + bs, t + s)b + \frac{\partial u}{\partial t}(x + bs, t + s) = 0 \\ z(0) &= z(-t) \end{aligned}$$

Ezért

$$u(x, t) = u(x - bt, 0) = g(x - bt)$$

11.2.2. Inhomogén eset 0 kezdeti feltétellel

Adott $u(x, t)$ kétváltozós függvény. Az inhomogén transzport egyenlet 0 kezdeti feltétellel

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \quad u(x, 0) = 0.$$

Ekkor

$$u(x, t) = \int_{-t}^0 f(x + bs, t + s) \, ds.$$

Bizonyítás

Vizsgáljuk meg a függvény értékét a $(b, 1)$ irányú egyenesek mentén! Legyen

$$z(s) := u(x + bs, t + s)$$

amiből

$$z'(s) = \frac{\partial u}{\partial x}b + \frac{\partial u}{\partial t} = f(x + bs, t + s).$$

Tehát

$$\int_{-t}^0 z'(s) \, ds = z(0) - z(-t) = z(0) = u(x, t)$$

hiszen $z(-t) = u(x, 0) = 0$. Ekkor

$$u(x, t) = z(0) = \int_{-t}^0 f(x + bs, t + s) \, ds.$$

11.2.3. Inhomogén eset

Adott $u(x, t)$ kétváltozós függvény. Az inhomogén transzport egyenlet

$$\frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \quad u(x, 0) = g(x).$$

Ekkor

$$u(x, t) = g(x - bt) + \int_{-t}^0 f(x + bs, t + s) \, ds.$$

11.3. Laplace egyenlet $\mathbb{R}^3$ -beli tartományban

Adott $U \subset \mathbb{R}^3$ nyílt, sima határú tartomány. A keresett függvény $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ kielégíti a **Laplace-egyenlet**:

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0.$$

11.3.1. Fizikai háttér

Ez az egyik leggyakrabban előforduló PDE. A keresett függvény t -től nem függ, időben állandó állapotok leírására alkalmas (pl. egyensúlyi helyzetek). Gondolhatunk egy kémiai anyag sűrűségére, hőmérsékletre, vagy elektromos potenciálra. Az egyensúlyi állapot azt jelenti, hogy bármely zárt felületen keresztül az adott jellemző nem változik.

12. Tétel

12.1. Laplace-egyenlet

Adott $U \subset \mathbb{R}^n$ és $u : U \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor az egyenlet

$$\Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0.$$

12.1.1. Peremfeltételek típusai

1. Dirichlet-feltétel
 $\forall \mathbf{x} \in \partial U$ -hoz $u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ adott.
2. Neumann-feltétel
 $\forall \mathbf{x} \in \partial U$ -hoz normálvektor szerinti iránymenti derivált, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ adott.
3. Kevert feltétel
 $\forall \mathbf{x} \in \partial U$ -hoz $\alpha u(\mathbf{x}) + \beta \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ adott.

12.1.2. Megoldás az egységnyezeten, Dirichlet-feltétellel

12.1.2.1. Első eset

Adott $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ és

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u(1, y) = u(0, y) = 0 \\ u(x, 1) &= f(x). \end{aligned}$$

Ekkor

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx \right) \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi y.$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $u(x, y) = X(x)Y(y)$, így a Laplace-egyenlet

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

amiből

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

hiszen a két hányados különböző változók függvénye, tehát biztosan konstans az eredmény. Ebből két differenciálegyenletet írhatunk fel, miszerint

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad Y''(y) = -\lambda Y(y).$$

A kezdeti feltételekből

$$X(0) = X(1) = Y(0) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $s^2 = \lambda > 0$. Ebből

$$X(x) = Ae^{sx} + Be^{-sx}$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$\begin{aligned} X(0) &= A + B = 0 \implies B = -A \\ X(x) &= 2A \operatorname{sh} sx \\ X(1) &= 2A \operatorname{sh} s = 0 \implies A = 0 \text{ vagy } s = 0 \end{aligned}$$

tehát azt kapjuk, hogy $X = 0$, ami ellentmondás. Tehát legyen $\lambda = -s^2$. Ebből az egyenlet megoldása

$$X(x) = A \cos sx + B \sin sx$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$\begin{aligned} X(0) &= A = 0 \\ X(1) &= B \sin s = 0 \implies s = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tehát $\lambda = -(k\pi)^2$, amiből a második egyenlet megoldása

$$Y(y) = Ae^{k\pi y} + Be^{-k\pi y}$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$Y(0) = A + B = 0 \implies B = -A.$$

Tehát

$$Y(y) = Ae^{k\pi y} - Ae^{-k\pi y} = 2A \operatorname{sh} k\pi y.$$

Tehát

$$u_k(x, y) = A_k \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi y$$

illetve

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi y.$$

Az $u(x, 1) = f(x)$ kezdeti feltételből

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi = \sum_{k=1}^n b_k \sin k\pi x.$$

Egy Fourier-sort kaptunk, amiből tudjuk, hogy

$$A_k \operatorname{sh} k\pi = b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx$$

amiből

$$A_k = \frac{b_k}{\operatorname{sh} k\pi} = \frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx$$

illetve

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx \right) \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi y.$$

12.1.2.2. Második eset

$$\Delta u = 0 \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$$

$$u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = 0$$

$$u(1, y) = f(y)$$

Ekkor

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(y) \sin k\pi y \, dy \right) \operatorname{sh} k\pi x \sin k\pi y.$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $u(x, y) = X(x)Y(y)$, így a Laplace-egyenlet

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

amiből

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

hiszen a két hányados különböző változók függvénye, tehát biztosan konstans az eredmény. Ebből két differenciálegyenletet írhatunk fel, miszerint

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad Y''(y) = -\lambda Y(y).$$

A kezdeti feltételekből

$$X(0) = Y(0) = Y(1) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $\lambda = -s^2 < 0$. Ebből

$$Y(y) = Ae^{sy} + Be^{-sy}$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$Y(0) = A + B = 0 \implies B = -A$$

$$Y(y) = 2A \operatorname{sh} sy$$

$$Y(1) = 2A \operatorname{sh} s = 0 \implies A = 0 \text{ vagy } s = 0$$

tehát azt kapjuk, hogy $Y = 0$, ami ellentmondás. Tehát legyen $\lambda = s^2$. Ebből az egyenlet megoldása

$$Y(y) = A \cos sy + B \sin sy$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$Y(0) = A = 0$$

$$Y(y) = B \sin sy$$

$$Y(1) = B \sin s = 0 \implies s = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tehát $\lambda = (k\pi)^2$, amiből a második egyenlet megoldása

$$X(x) = Ae^{k\pi x} + Be^{-k\pi x}$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$X(0) = A + B = 0 \implies B = -A.$$

Tehát

$$X(x) = Ae^{k\pi x} - Ae^{-k\pi x} = 2A \operatorname{sh} k\pi x.$$

Tehát

$$u_k(x, y) = A_k \operatorname{sh} k\pi x \sin k\pi y$$

illetve

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh} k\pi x \sin k\pi y.$$

Az $u(1, y) = f(y)$ kezdeti feltételből

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh} k\pi \sin k\pi y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi y$$

Egy Fourier-sort kaptunk, amiből tudjuk, hogy

$$A_k \operatorname{sh} k\pi = b_k = 2 \int_0^1 f(y) \sin k\pi y \, dy$$

amiből

$$A_k = \frac{b_k}{\operatorname{sh} k\pi} = \frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(y) \sin k\pi y \, dy$$

illetve

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(y) \sin k\pi y \, dy \right) \operatorname{sh} k\pi x \sin k\pi y.$$

12.1.2.3. Harmadik eset

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 & \Omega &= (0, 1) \times (0, 1) \\ u(1, y) &= u(x, 1) = u(0, y) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x)\end{aligned}$$

Ekkor

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx \right) \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi(1-y).$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $u(x, y) = X(x)Y(y)$, így a Laplace-egyenlet

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

amiből

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

hiszen a két hányados különböző változók függvénye, tehát biztosan konstans az eredmény. Ebből két differenciálegyenletet írhatunk fel, miszerint

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad Y''(y) = -\lambda Y(y).$$

A kezdeti feltételekből

$$X(0) = X(1) = Y(1) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $s^2 = \lambda > 0$. Ebből

$$X(x) = Ae^{sx} + Be^{-sx}$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$\begin{aligned}X(0) &= A + B = 0 \implies B = -A \\ X(x) &= 2A \operatorname{sh} sx \\ X(1) &= 2A \operatorname{sh} s = 0 \implies A = 0 \text{ vagy } s = 0\end{aligned}$$

tehát azt kapjuk, hogy $X = 0$, ami ellentmondás. Tehát legyen $\lambda = -s^2$. Ebből az egyenlet megoldása

$$X(x) = A \cos sx + B \sin sx$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$\begin{aligned}X(0) &= A = 0 \\ X(1) &= B \sin s = 0 \implies s = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Tehát $\lambda = -(k\pi)^2$, amiből a második egyenlet megoldása

$$Y(y) = Ae^{k\pi y} + Be^{-k\pi y}$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$Y(1) = Ae^{k\pi} + Be^{-k\pi} = 0 \implies B = -Ae^{2k\pi}.$$

Tehát

$$Y(y) = Ae^{k\pi y} - Ae^{-k\pi(y-2)} = -2eA \operatorname{sh} k\pi(1-y).$$

Tehát

$$u_k(x, y) = A_k \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi(1-y)$$

illetve

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi(1-y).$$

Az $u(x, 0) = f(x)$ kezdeti feltételből

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x$$

Egy Fourier-sort kaptunk, amiből tudjuk, hogy

$$A_k \operatorname{sh} k\pi = b_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx$$

amiből

$$A_k = \frac{b_k}{\operatorname{sh} k\pi} = \frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx$$

illetve

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx \right) \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi(1 - y).$$

12.1.2.4. Negyedik eset

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \Omega &= (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) &= u(x, 1) = u(1, y) = 0 \\ u(0, y) &= f(y) \end{aligned}$$

Ekkor

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(y) \sin k\pi y \, dy \right) \operatorname{sh} k\pi(1 - x) \sin k\pi y.$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $u(x, y) = X(x)Y(y)$, így a Laplace-egyenlet

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

amiből

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

hiszen a két hányados különböző változók függvénye, tehát biztosan konstans az eredmény. Ebből két differenciálegyenletet írhatunk fel, miszerint

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad Y''(y) = -\lambda Y(y).$$

A kezdeti feltételekből

$$X(1) = Y(0) = Y(1) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $\lambda = -s^2 < 0$. Ebből

$$Y(y) = Ae^{sy} + Be^{-sy}$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$\begin{aligned} Y(0) &= A + B = 0 \implies B = -A \\ Y(y) &= 2A \operatorname{sh} sy \\ Y(1) &= 2A \operatorname{sh} s = 0 \implies A = 0 \text{ vagy } s = 0 \end{aligned}$$

tehát azt kapjuk, hogy $Y = 0$, ami ellentmondás. Tehát legyen $\lambda = s^2$. Ebből az egyenlet megoldása

$$Y(y) = A \cos sy + B \sin sy$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$\begin{aligned} Y(0) &= A = 0 \\ Y(y) &= B \sin sy \\ Y(1) &= B \sin s = 0 \implies s = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tehát $\lambda = (k\pi)^2$, amiből a második egyenlet megoldása

$$X(x) = Ae^{k\pi x} + Be^{-k\pi x}$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$X(1) = Ae^{k\pi} + Be^{-k\pi} = 0 \implies B = -Ae^{2k\pi}.$$

Tehát

$$X(x) = Ae^{k\pi x} - Ae^{-k\pi(x-2)} = -2eA \operatorname{sh} k\pi(1-x).$$

Tehát

$$u_k(x, y) = A_k \operatorname{sh} k\pi(1-x) \sin k\pi y$$

illetve

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh} k\pi(1-x) \sin k\pi y.$$

Az $u(0, y) = f(y)$ kezdeti feltételből

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh} k\pi \sin k\pi y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi y$$

Egy Fourier-sort kaptunk, amiből tudjuk, hogy

$$A_k \operatorname{sh} k\pi = b_k = 2 \int_0^1 f(y) \sin k\pi y \, dy$$

amiből

$$A_k = \frac{b_k}{\operatorname{sh} k\pi} = \frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(y) \sin k\pi y \, dy$$

illetve

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f(y) \sin k\pi y \, dy \right) \operatorname{sh} k\pi(1-x) \sin k\pi y.$$

12.1.2.5. Általános eset

$$\Delta u = 0 \quad \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$$

$$u(x, 1) = f_1(x)$$

$$u(1, y) = f_2(y)$$

$$u(x, 0) = f_3(x)$$

$$u(0, y) = f_4(y)$$

Ekkor

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f_1(x) \sin k\pi x \, dx \right) \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi y + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f_2(y) \sin k\pi y \, dy \right) \operatorname{sh} k\pi x \sin k\pi y + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f_3(x) \sin k\pi x \, dx \right) \sin k\pi x \operatorname{sh} k\pi(1-y) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\operatorname{sh} k\pi} \int_0^1 f_4(y) \sin k\pi y \, dy \right) \operatorname{sh} k\pi(1-x) \sin k\pi y. \end{aligned}$$

Bizonyítás

Az első négy eset összegeként áll elő a megoldás.

12.1.3. Laplace egyenlet polárkoordinátákban

Legyen $W(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta \\ \frac{\partial W}{\partial \theta} &= -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \theta \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \theta - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \cos \theta \sin \theta\end{aligned}$$

Ebből láthatjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0.$$

12.1.3.1. Megoldás egységkörön, Dirichlet-feltétellel

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0 & \Omega &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in [0, 1]\} \\ u(x, y) &= f(x, y) & (x, y) &\in \bar{\Omega}\end{aligned}$$

Legyen

$$W(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

így

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = \Delta u = 0.$$

Tegyük fel, hogy $W(r, \theta) = R(r)T(\theta)$, így a Laplace-egyenlet

$$R''T + \frac{1}{r}R'T + \frac{1}{r^2}RT'' = 0$$

amiből

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

hiszen a két hányados különböző változók függvénye, tehát biztosan konstant az eredmény. Ebből két differenciálegyenletet írhatunk fel, miszerint

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R(r) \quad T''(\theta) = -\lambda T(\theta).$$

A peremfeltétel ekkor

$$W(1, \theta) = R(1)T(\theta) = f(\theta) \quad T(0) = T(2\pi).$$

Legyen $\lambda = n^2$, innen $T'' = -n^2 T$, ezért

$$T(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta$$

$$T(0) = A \quad T(2\pi) = A \cos n2\pi + B \sin n2\pi \implies \text{ez a legegyszerűbb megoldás, } n = k \in \mathbb{N}$$

$$r^2 R'' + rR' = \lambda R, \lambda = k^2.$$

Legyen $k = 0$, ekkor

$$r^2 R'' + rR' = 0$$

$$R(r) = c \text{ vagy } R(r) = \ln r \rightarrow 0\text{-ban nincs értelmezve, el lehet vetni}$$

Legyen $k \neq 0$, ekkor

$$r^2 R'' + rR' = k^2 R$$

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n}$$

$$\text{I. } R'(r) = Anr^{n-1} + B(-n)r^{-n-1}$$

$$\text{II. } R''(r) = A(n^2 - n)r^{n-2} + B(n^2 + n)r^{-n-2}$$

Szorozzuk be az I. egyenletet r -rel, a II.-at pedig r^2 -tel, majd adjuk össze őket:

$$r^2 R'' + rR' = An^2 r^n + Bn^2 r^{-n} = \sum_{n=k} n^2 R$$

Tehát

$$R(r) = A_n r^n$$

$$W_n(r, \theta) = r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

illetve

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

A peremfeltételből

$$W(1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta).$$

Tehát az A_n és B_n együtthatókat $f(\theta)$ Fourier-sorfejtéséből határozhatjuk meg.

12.1.3.2. Poisson mag

Adott feladat ($\Delta u = 0$, hővezetés, + Dirichlet, + Neumann), akkor $\exists K(x, y, t)$, melyre

$$u(x, y) = \int_{\partial\Omega} K(x, y, t) f(\gamma(t)) dt.$$

A **Poisson mag** a tartomány sajátja.

Példa

$$\Delta u = 0 \quad (x, y) > 0$$

$$u(x, 0) = g(x)$$

Ekkor

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi \longrightarrow \text{Poisson formula}$$

13. Tétel

13.1. Hővezetés egyenlete

Adott $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt tartomány és $\Omega_t^+ = \Omega \times (0, \infty)$. Ekkor a hővezetési feladat

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \Delta u.$$

Ezen felül adott kezdeti feltétel, vagy peremfeltétel.

13.1.1. Hővezetés véges rúdban

Legyen $\Omega = (0, 1)$, így $\partial\Omega = \{0, 1\}$. Ekkor olyan $u(x, t)$ függvényt keresünk, melyre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

13.1.1.1. Peremfeltétel és kezdeti feltétel

Dirichlet-feltétel

Az $u(x, 0) = f(x)$ kezdetiérték feltétel és $u(0, t) = u(1, t) = 0$ peremfeltétel, ahol $x \in \Omega, t \in (0, \infty)$. Ez azt jelenti, hogy a rudat a két végénél "hűtjük". Ekkor

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx \right) e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x.$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy $u(x, t) = X(x)T(t)$, így a megoldandó egyenlet

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

amiből

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

hiszen a két hányados különböző változók függvénye, tehát biztosan konstans az eredmény. Ebből két differenciálegyenletet írhatunk fel, miszerint

$$T'(t) = \lambda T(t) \quad X''(x) = \lambda X(x).$$

A kezdeti feltételekből

$$X(0) = X(1) = 0.$$

Tegyük fel, hogy $\lambda = s^2 > 0$. Ekkor $X'' = s^2 X$, tehát

$$X = Ae^{sx} + Be^{-sx}$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$X(0) = A + B = 0 \implies B = -A$$

$$X(1) = 2A \operatorname{sh} s = 0 \implies A = 0 \text{ vagy } s = 0$$

tehát azt kapjuk, hogy $X = 0$, ami ellentmondás. Tehát legyen $\lambda = -s^2$. Ebből az egyenlet megoldása

$$X = A \cos sx + B \sin sx$$

amiből a kezdeti feltételek miatt

$$X(0) = A = 0$$

$$X(1) = B \sin s = 0 \implies s = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tehát $\lambda = -(k\pi)^2$, amiből a $T' = -(k\pi)^2 T$ egyenlet megoldása

$$T = Ce^{-k^2 \pi^2 t}.$$

Tehát

$$u_k(x, t) = A_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x$$

illetve

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x.$$

Az $u(x, 0) = f(x)$ kezdeti feltételből

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\pi x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi x$$

Egy Fourier-sort kaptunk, amiből tudjuk, hogy

$$A_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx$$

amiből

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx \right) e^{-k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x.$$

13.1.2. Véges rúd hőenergiája

1. Legyen $\Omega = (0, 1)$, így $\partial\Omega = \{0, 1\}$.

$$E(t) := \int_0^1 u^2 \, dx$$

időben monoton fogyó energiafüggvény.

2. Adott $u(x, 0) = f(x)$ és a **Neumann-feltétel** mellett

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$$

tehát a rúd hőszigetelt. Ekkor az energiafüggvény

$$E(t) = \int_0^1 u^2 \, dx$$

időben állandó.

Bizonyítás

Definiáljuk a rúd hőmennyiségét a t időpontban így:

$$\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u(x, t) \, dx.$$

Ekkor $\mathcal{T}(t)$ deriváltja

$$\mathcal{T}'(t) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \, dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \, dx$$

Ebből következik, hogy

$$\mathcal{T}'(t) \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \, dx = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Ezért $\mathcal{T}(t) = c$, konstans, és a kiindulási értékkel egyezik meg.

$$\mathcal{T}(t) = \mathcal{T}(0) = \int_0^1 u(x, 0) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

A rúd hőmérséklete homogén lesz, azaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \mathcal{T} \quad \forall x \in (0, 1).$$

13.1.2.1. Gauss: Maximumelv

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \Delta u \\ u(t, x) &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} v(x) & 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \Delta v \\ u|_{\partial\Omega} &= h|_{\partial\Omega} & \text{adott} \end{aligned}$$

Elv: a hővezetésre és a diffúzióra. Legyen Ω korlátos tartomány és

$$\max_{(t,x) \in \partial^* \Omega_T} u(t, x) = \max_{(t,x) \in \Omega_T} u(t, x)$$

ahol

$$\Omega_T = (0, T) \times \Omega$$

és

$$\partial^* \Omega_T = \{0\} \times \overline{\Omega} \cup [0, T] \times \partial\Omega.$$

Tehát ahhoz, hogy valahol valamilyen hőmérséklet létrejöheszen szükséges az, hogy előtte térben vagy időben már előforduljon olyan hőmérséklet.

Bizonyítás

Az állítást indirekt módon bizonyítjuk.

Tegyük fel, hogy létezik egy maximum. Ekkor

$$\max_{(t,x) \in \overline{\Omega_T}} u(t, x) = u(t^*, x^*) \quad \text{ahol } 0 \leq t^* \leq T \text{ és } x^* \in \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t^*, x^*) = 0 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t^*, x^*) \leq 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t^*, x^*) \geq 0$$

Innen

$$0 \leq \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0$$

Így nem jön ki az ellentmondás.

Legyen $\varepsilon > 0$ és $v_\varepsilon(t, x) = u(t, x) - \varepsilon t$. Szeretnénk igazolni, hogy

$$\max_{(t,x) \in \partial^* \Omega_T} v_\varepsilon(t, x) = \max_{(t,x) \in \Omega_T} v_\varepsilon(t, x)$$

Ha ez igaz, akkor $\varepsilon \searrow 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(t, x) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \varepsilon < \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}(t, x) \\ 0 &\leq \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \varepsilon = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - \varepsilon = \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial x^2}(t, x) - \varepsilon < 0 \end{aligned}$$

Ellentmondásra jutottunk, $\varepsilon \rightarrow 0$ a folytonosság miatt.

13.1.3. Hővezetési egyenlet időben megfordítva

Legyen $\Omega = (0, 1)$. Haladjunk visszafelé az időben, tehát legyen $U(x, t) = u(x, -t)$. Ekkor az egyenlet

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$u(x, 0) = f(x)$ kezdeti feltétellel.

Megoldása

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^n \left(2 \int_0^1 f(x) \sin k\pi x \, dx \right) e^{k^2 \pi^2 t} \sin k\pi x.$$

Láthatjuk, hogy a megoldás "felrobban":

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(x, t) = \infty.$$

13.1.4. Inhomogén hővezetési egyenlet megoldása

Legyen $\Omega = (0, 1)$, ezért $\partial\Omega = \{0, 1\}$. Ekkor keressük azt a függvényt, melyre

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 & x &\in (0, 1) \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 & t &\in (0, \infty) \\ u'_t - u''_{xx} &= f(x, t) & (x, t) &\in (0, 1) \times (0, \infty) \end{aligned}$$

Ekkor definiáljuk a $w(x, t, \tau)$ függvényt, mely kielégíti a

$$\begin{aligned} w(0, t, \tau) &= w(1, t, \tau) = 0 & t &\in (\tau, \infty) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & (x, t) &\in (0, 1) \times (\tau, \infty) \\ w(x, \tau, \tau) &= f(x, \tau) & x &\in (0, 1) \end{aligned}$$

homogén hővezetési egyenletet. Ekkor

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t, \tau) \, d\tau.$$

Bizonyítás

Legyen

$$u(x, t) = \int_0^t w(x, t, \tau) \, d\tau.$$

Ekkor a Leibniz-szabályból

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = w(x, t, t) + \int_0^t \frac{\partial w}{\partial t}(x, t, \tau) \, d\tau$$

illetve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \int_0^t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t, \tau) \, d\tau$$

amiből

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = w(x, t, t) + \int_0^t \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)(x, t, \tau) \, d\tau = w(x, t, t) = f(x, t).$$

Ezen felül láthatjuk, hogy $u(x, 0) = 0$. Ezzel beláttuk a bizonyítandót.

14. Tétel

14.1. Hővezetés egyenlete

Adott $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt tartomány és $\Omega_t^+ = \Omega \times (0, \infty)$. Ekkor a hővezetési feladat

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \Delta u.$$

Ezen felül adott kezdeti feltétel, vagy peremfeltétel.

14.1.1. Hővezetés végtelen rúdban

Legyen $\Omega = \mathbb{R}$. Ekkor olyan $u(x, t)$ függvényt keresünk, melyre

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

adott $u(x, 0) = f(x)$ kezdeti feltétel mellett, ahol a kezdeti hőmennyiség véges, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Peremfeltételként feltesszük továbbá, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = 0.$$

Ekkor

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{(x-t)^2}{4kt}} dt.$$

14.1.1.1. Megoldás a Fourier-transzformáció segítségével Bizonyítás

A feladatot a transzformált tartományban oldjuk meg. Legyen

$$\hat{u}(s, t) = \mathcal{F}\{u(x, t), s\}$$

akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}, s\right\} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \\ \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, s\right\} &= (is)^2 \hat{u} = -s^2 \hat{u}. \end{aligned}$$

Tehát az egyenlet

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -s^2 k \hat{u}$$

aminek megoldása

$$\hat{u} = C(s) e^{-s^2 kt}.$$

A kezdeti feltétel transzformáltja

$$\mathcal{F}\{u(x, 0), s\} = \mathcal{F}\{f(x), s\} = \hat{u}(s, 0) = C(s).$$

Ebből

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{C(s) e^{-s^2 kt}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) * \mathcal{F}\{e^{-s^2 kt}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) * \frac{1}{\sqrt{2kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}} = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy.$$

14.1.1.2. Speciális kezdeti feltételek

Az alábbi két kezdeti feltétel mellett azt tapasztaljuk, hogy a kezdeti hőeloszlás az idő múlásával egyre inkább egyenletessé válik.

1. Legyen $u(x, 0) = \delta(x)$. Ekkor

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

tehát a hőmérséklet eloszlás 0 várható értékű és $\sqrt{2kt}$ szórású normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

2. Legyen

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases}.$$

Ekkor

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-1}^1 e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} dy$$

tehát a hőmérséklet eloszlás 0 várható értékű és $\sqrt{2kt}$ szórású normális eloszlás $[-1, 1]$ intervallumba esésének valószínűsége.