

Sztochasztikus folyamatok

Erdélyi Áron

2019.06.11.

Tartalomjegyzék

1 Statisztikai alapfogalmak, becslés elmélet	2
1.1 Alapfogalmak	2
1.2 Becslésnél használt értékek	2
1.3 Becslésmélet	2
1.4 Statisztikai hipotézis	3
1.5 Hipotézisvizsgálat menete	3
2 Próbák, paraméteres próbák	4
2.1 u próba	4
2.2 Student féle t próba	4
2.3 Fischer féle F próba	5
3 Nem paraméteres próbák	6
3.1 Illeszkedés vizsgálat	6
3.2 Homogenitás vizsgálat	6
3.3 Függetlenség vizsgálat	7
4 Sztochasztikus folyamatok, stacionaritás fogalmai	8
5 Mozgó átlag folyamatok	9
6 AR, MA, ARMA folyamatok	10
7 Előrejelzés	12
8 Kovariancia függvény, jellemzői	13
9 Spektrális sűrűség függvény	14
10 Stacionárius folyamatok becslése	15
11 Wiener szűrő	16
11.1 Lineáris szűrők	16
11.2 Wiener szűrők	16
12 Markov lánc alapfogalmai	17
13 Állapotok osztályozása, jellemzői	19
14 Folytonos idejű Markov láncok	20
15 Tömegkiszolgálás	21
15.1 Diszkrét időben	21
15.2 Folytonos időben	21

1 Statisztikai alapfogalmak, becslés elmélet

1.1 Alapfogalmak

Definíció: Determinisztikus folyamatnak nevezzük azokat a folyamatokat, ahol a körülmények egyértelműen meghatározzák a folyamat lefolyását.

Definíció: Sztochasztikus folyamat, ha valamelyik szükséges körülmény hiányzik, vagy kiszámíthatatlanná válik.

Definíció: Véletlen jelenség, ahol a körülmények nem határozzák meg egyértelműen az eseményt.

Definíció: Statisztikai minta ahol a valószínűségi változóra n db független azonos körülmények között végrehajtott megfigyelést, mérést elvégeztünk. A mintában a valószínűségi változók eloszlása azonos eloszlású lesz.

Definíció: A minta nagysága az elemeinek száma

1.2 Becslésnél használt értékek

Definíció: A mintaátlag:

$$\bar{\xi}_n = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n}, \quad \bar{\xi}_n \rightarrow m.$$

Definíció: Az empirikus szórásnégyzet:

$$s_n^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (\bar{\xi} - \xi_k)^2}{n}$$

Definíció: A korrigált szórásnégyzet:

$$s_n^{*2} = \frac{\sum_{k=1}^n (\bar{\xi} - \xi_k)^2}{n-1}, \quad s_n^{*2} \rightarrow \sigma^2.$$

1.3 Becsléelmélet

ξ valószínűségi változó, ismerjük eloszlását, illetve a sűrűségfüggvényének a típusát. Ekkor

$$f(\xi) = f(\xi, \Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n).$$

Definíció: Torzítatlan becslés: $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ függvény, és $E(\tilde{\Theta}) = \Theta$. Azaz a $\tilde{\Theta}$ várható értéke megegyezik a becsült paraméter értékével.

Definíció: Megbízhatóság (konfidencia) intervallum: Tegyük fel, hogy $\tilde{\Theta}$ torzítatlan becslés, Θ ismeretlen. Az $[\epsilon_1, \epsilon_2)$ intervallumot megbízhatósági intervallumnak nevezzük, ha adott $\alpha > 0$ -ra $P(\epsilon_1 \leq \Theta < \epsilon_2) = 1 - \alpha$.

Definíció: Maximum-likelihood módszer: Tegyük fel, hogy $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. ξ_i sűrűségfüggvénye f_{ξ_i} . Ekkor

$$f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f_{\xi_k}(x_k) = L(\Theta, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

$\tilde{\Theta} = L(\Theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$ -t nevezzük Maximum-likelihood függvénynek.

1.4 Statisztikai hipotézis

Definíció: Statisztikai hipotézisnek nevezzük a valószínűségi változók

- eloszlására
- valamely paraméterére

vonatkozó állításokat. (H_0, H_1)

Statisztikai próba feladata , hogy az X valószínűségi változóra vonatkozó statisztikai minta alapján döntsünk a H_0 hipotézisről.

Statisztikai próba lényege: K kritikus tartomány megválasztása úgy, hogy H_0 mellett azámított $U = u(x_0, x_2, \dots, x_n)$, vagy $T = t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ statisztikai érték kis valószínűséggel essen a K tartományba.

Definíció: Annak a valószínűségét, hogy H_0 fennáll és a póbastatisztika a K tartományba esik, a próba terjedelmének nevezzük.

1.5 Hipotézisvizsgálat menete

Állítás:

1. Mintavétel
2. H_0 hipotézis megalkotása, H_1 ellenhipotézis megfogalmazása
3. Megadunk $0 < \alpha < 1$ korlátot, az elsőfajú hiba valószínűségére.
4. Konstruálunk egy statisztikai függvényt (próbafüggvényt) a minta elemeiből, illetve a H_0 hipotézisből.
5. Meghatározzuk a próbafüggvény eloszlását, ha H_0 teljesül.
6. Az előző lépésben kapott eloszlás alapján meghatározzuk E (elfogadási), és K (kritikus) tartományokat ($E \cup K = \mathbb{R}$, $E \cap K = \emptyset$).

Az elfogadási tartomány tipikusan lehet:

- $E = [-a_\alpha, a_\alpha]$
- $E = [-a_\alpha, \infty)$
- $E = (-\infty, a_\alpha]$

Definíció: Elsőfajú hiba: H_0 igaz, de $u \in K$, vagy $t \in K$, ezért H_0 -t elvetjük.

Definíció: Másodfajú hiba: H_0 nem igaz, mégis $u \in E$, vagy $t \in E$, ezért H_0 -t elfogadjuk.

2 Próbák, paraméteres próbák

2.1 u próba

Adott n elemű minta $\xi_0, \dots, \xi_n$, amely $N(m, \sigma)$ eloszlású és független, σ ismert. Paraméteres próba eloszlás valamelyik paraméterére vonatkozó hipotézis igazságát vizsgáljuk.

- 1 mintás u próba:

H_0 hipotézis: $E(\xi) = m$. $0 < \alpha < 1$

Próba függvény:

$$u = \frac{\bar{\xi} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, \quad N(0, 1)$$

- Kétoldali próba:

$$H_0 : E(\xi) = m \quad H_1 : E(\xi) \neq m$$

$$E = [-a_\alpha, a_\alpha] \quad K = \mathbb{R} \setminus [-a_\alpha, a_\alpha]$$

- Egyoldali próba:

$$H_0 : E(\xi) > m \quad H_1 : E(\xi) \leq m$$

$$E = [-a_\alpha, \infty) \quad K = (-\infty, -a_\alpha).$$

- 2 mintás u próba:

Függetlennek kell lennie a 2 mintának. $\xi_1, \dots, \xi_{n_1}$ és $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$ független minták, $N(m_1, \sigma_1)$ és $N(m_2, \sigma_2)$ eloszlásúak, valamint σ_1, σ_2 ismert.

Próba függvény:

$$u = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}, \quad N(0, 1).$$

- Kétoldali próba

$$H_0 : m_1 = m_2 \quad H_1 : m_1 \neq m_2$$

$$E = [-a_\alpha, a_\alpha] \quad K = \mathbb{R} \setminus [-a_\alpha, a_\alpha]$$

- Egyoldali próba

$$H_0 : m_1 > m_2 \quad H_1 : m_1 \leq m_2$$

$$E = [-a_\alpha, \infty) \quad K = (-\infty, -a_\alpha).$$

2.2 Student féle t próba

Normális eloszlású valószínűségi változó várható értékére vonatkozó hipotézis, ismeretlen szórás esetén.

A szórás ismeretlen, becsüljük az

$$s_n^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2}{n-1}}$$

korrigált tapasztalati szórással.

- 1 mintás t próba:

$\xi_1, \dots, \xi_n$ eloszlása ismert $N(m, \sigma)$, $-\infty < m < \infty$, $\sigma > 0$.

- Kétoldali próba:

$$H_0 : E(\xi) = m \quad H_1 : E(\xi) \neq m$$

$$E = [-a_\alpha, a_\alpha] \quad K = \mathbb{R} \setminus [-a_\alpha, a_\alpha]$$

- Egyoldali próba:

$$H_0 : E(\xi) > m \quad H_1 : E(\xi) \leq m$$

$$E = [-a_\alpha, \infty) \quad K = (-\infty, -a_\alpha).$$

- 2 mintás t próba:
 $\xi_1, \dots, \xi_{n_1}$ és $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$ független minták, σ_1, σ_2 ismeretlen.
 Próba függvény:

$$t_{(n_1-1+n_2-1)} = \frac{\bar{\xi} - \bar{\eta}}{\sqrt{(n_1-1)s_1^{*2} + (n_2-1)s_2^{*2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

2.3 Fischer féle F próba

$\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m$ normális eloszlású független minták.

$$H_0 : \sigma_\xi = \sigma_\eta \quad H_1 : \sigma_\xi \neq \sigma_\eta.$$

$$F_{f_\xi, f_\eta}^* = \frac{\max(s_\xi^{*2}, s_\eta^{*2})}{\min(s_\xi^{*2}, s_\eta^{*2})} \geq 1.$$

F_{f_ξ, f_η}^* szabadságfoka:

- $s_\xi^{*2} > s_\eta^{*2}$ esetén $(n-1)$.
- $s_\eta^{*2} > s_\xi^{*2}$ esetén $(m-1)$.

$1 - \alpha$ szignifikancia szinten:

- $F_{f_\xi, f_\eta}^* < F_{1-\alpha}$ esetén H_0 -t elfogadjuk, a két mintának azonos a szórása.
- $F_{f_\xi, f_\eta}^* \geq F_{1-\alpha}$ esetén H_0 -t elvetjük, a két mintának nem azonos a szórása.

3 Nem paraméteres próbák

Definíció: Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n, N(0, 1)$ független valószínűségi változók. Legyen $\eta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$. Ekkor η eloszlását n szabadságfokú χ^2 eloszlásnak nevezzük. $E(\eta) = n$ és $D^2(\eta) = 2n$.

Definíció: Legyen $A_1, \dots, A_r$ teljes eseményrendszer. Vizsgáljuk meg azt a H_0 hipotézist, hogy: $P(A_i) = p_i$. Ahol p_i $i = 1, \dots, r$ nevezetes eloszlás, és $\sum_{i=1}^r p_i = 1$. Ezt a hipotézist nevezzük χ^2 próbának.

Definíció: Tfh. n kísérlet során A_i ν_i -szer következik be. $\sum_{i=1}^r \nu_i = n$ ν_i valószínűségi változók binomiális eloszlásúak. $E(A_i) = np_i$.

$$P(\nu_1 = k_1, \nu_2 = k_2, \dots, \nu_r = k_r | H_0) = P(\nu_1 = k_1) \cdot P(\nu_2 = k_2) \cdot \dots \cdot P(\nu_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r},$$

ahol $\sum_{i=1}^r k_i = n$. Ez a Polinomiális eloszlás.

Képezzük a következő statisztikát:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

Amennyiben a H_0 hipotézis igaz, akkor $E(\nu_i) \approx np_i$, azaz a számláló minden tagjában a ν_i értéknek a saját várható értékétől vett távolságának négyzete szerepel, azaz ha a χ^2 kicsi, akkor jó a próba. $\chi^2 : r$ db standardizált binomiális eloszlású val. vált. négyzetének összege.

Definíció: Tetszőleges $\alpha > 0$ -hoz meghatározható olyan χ_{r-1}^2 kritikus érték, melyre $P(\chi^2 < \chi_{r-1}^2(\alpha)) = 1 - \alpha$. Ezt nevezzük $r - 1$ szabadságfokú χ^2 eloszlásnak.

3.1 Illeszkedés vizsgálat

A minta illeszkedik-e egy előre megadott eloszláshoz?

Adott $\xi_1, \dots, \xi_r$ független, azonos eloszlású val.vált.-ok. Jelöljük $q_1, \dots, q_r$ -el az eloszlásukat. Illetve legyen adott az (x_i, p_i) elméleti eloszlás. Legyen $\nu_i = \{n : \xi_i = x_i\}$.

$H_0 : q_i = p_i$ azaz a két eloszlás megegyező $\forall i = 1, \dots, r$ -re.

$H_1 : q_i \neq p_i$ legalább egy i -re.

Definíció:

$$q(\xi_1, \dots, \xi_r) = \frac{\sum_{i=1}^r (\nu_i - np_i)^2}{np_i}$$

Ez egy $(r - 1)$ szabadságfokú χ^2 eloszlás.

$$P(H_0; g > c_r) = \alpha,$$

ahol α a hiba, g a kiszámolt, c_r a táblázatbeli érték. Ha $g > c_r$ elvetjük H_0 -t, ha $g \leq c_r$ elfogadjuk H_0 -t.

3.2 Homogenitás vizsgálat

Célja: annak eldöntése, hogy két val. vált. egyforma eloszlású-e.

Adott két val.vált.: ξ, η . $H_0 : A$ két val.vált. azonos eloszlású. $H_1 : nem$ azonos eloszlásúak.

Legyen ν_i, μ_i az i intervallumba eső minta elemek gyakorisága.

$$\chi^2 = n \cdot m \sum_{i=1}^r \left(\frac{\left(\frac{\nu_i}{n} - \frac{\mu_i}{m} \right)^2}{\frac{\nu_i}{n} + \frac{\mu_i}{m}} \right),$$

$r - 1$ szabadságfokú χ^2 eloszlást ad.

$$\sum_{i=1}^r \nu_i = n, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i = m.$$

3.3 Függetlenség vizsgálat

Cél: Két val.vált. között van-e kapcsolat, vagy függetlenek?

Adott két val.vált.: ξ, η es ezeknek teljes eseményrendszerei: $A_1, \dots, A_r$ és $B_1, \dots, B_s$. Ekkor $H_0 : P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j)$, azaz A_i, B_j függetlenek $\forall i = 1, \dots, r, \quad j = 1, \dots, s$. H_1 : nem függetlenek.

$\nu_{ij} = A_i \cap B_j$ gyakorisága n független kísérletben.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{(\nu_{ij} - \frac{\nu_i \nu_j}{n})^2}{\frac{\nu_i \nu_j}{n}}.$$

Ha $\chi^2_{(r-1)(s-1)} < c_k$, elfogadjuk $1 - \alpha$ szinten a H_0 -t

4 Sztochasztikus folyamatok, stacionaritás fogalmai

Definíció: Legyen $x_t, t \in \mathbb{N}$ valószínűségi változók halmaza. Ezt diszkrét idejű sztochasztikus folyamatnak nevezzük.

Definíció: Legyen $x_t, t \in \mathbb{Z}$ valószínűségi változók halmaza, diszkrét idejű sztochasztikus folyamat.

$$x_t \begin{cases} t \leq 0 : \text{ múlt és jelen} & \text{Ezt vizsgálom mérem, megfigyelem} \\ t > 0 : \text{ jövő} & \text{Ezt akarjuk becsülni.} \end{cases}$$

Definíció: $x_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ függvény valamilyen véletlen esemény értéke a t időpontban.

$\omega \in \Omega$ az eseménytér egy fix állapota.

$x_0(\omega), x_1(\omega), \dots, x_n(\omega)$ számsorozat a folyamat $\omega \in \Omega$ -hoz tartozó megvalósulása.

Példa: ε_t fehér zaj, ha független azonos eloszlású vel.vált.-ot jelöl, és $E(\varepsilon_t) = 0, D^2(\varepsilon_t) = c, c \in \mathbb{R}^+,$ gyakran $c = 1$.

Definíció: Az időben változatlan viselkedésű egyensúlyban lévő rendszereket nevezünk stacionáriusnak.

Definíció: Egy $x_t, t \in \mathbb{Z}$ folyamatot erősen stacionárius folyamatnak nevezünk, ha $\forall k \in \mathbb{Z}$ -re az $(x_0, \dots, x_n)$ eloszlása megegyezik $(x_{0+k}, \dots, x_{n+k})$ eloszlásával. Azaz az eloszlásra teljesül az időinvariáns tulajdonság.

Definíció: Az $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stacionárius folyamat, ha

1. $E(x_t^2) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{Z}$
2. $E(x_t) = E(x_0) \quad \forall t \in \mathbb{Z}$
3. $\text{cov}(x_0, x_m) = \text{cov}(x_{0+k}, x_{m+k}), \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}$ (időinvariáns.)

Definíció: Legyen $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stac. folyamat. Ekkor a

$$R_x(k) = \text{cov}(x_0, x_k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

függvényt kovariancia függvénynek nevezzük.

Állítás: A kovariancia fv. tulajdonságai:

1. $R_x(0) = D^2(x_t)$ bármely $t \in \mathbb{Z}$ -re.
2. $R_x(k) = R_x(-k)$ (páros fv.)
3. $\text{cov}(x_k, x_m) = R_x(m - k)$

Bizonyítás:

1. $R_x(0) = \text{cov}(x_0, x_0) = \text{cov}(x_{0+t}, x_{0+t}) = \text{cov}(x_t, x_t) = D^2(x_t)$.
2. $R_x(k) = \text{cov}(x_0, x_k) = \text{cov}(x_{0-k}, x_{k-k}) = \text{cov}(x_{-k}, x_0) = R_x(-k)$.
3. $\text{cov}(x_k, x_m) = \text{cov}(x_{k-k}, x_{m-k}) = \text{cov}(x_0, x_{m-k}) = R_x(m - k)$.

Állítás: Ezekből, a fehér zaj tulajdonságai:

1. $\text{cov}(x_0, x_0) = \sigma^2$
2. $\text{cov}(x_i, x_j) = 0, \quad i \neq j$
3. Az előzőt átalakítva: $R_x(i - j) = 0$.

5 Mozgó átlag folyamatok

Definíció: Legyen

$$x_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

ε_t fehér zaj, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ együttthatók. Ekkor x_t végtelen mozgóátlag folyamat.

Definíció: Ha $\forall \alpha_j = 0 \ j < 0$ esetén, akkor az

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}$$

végtelen mozgó átlag folyamatot kauzális mozgóátlag folyamat.

Állítás:

$$R_x(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+k} \sigma^2$$

6 AR, MA, ARMA folyamatok

Definíció: Azt mondjuk, hogy x_t autoregresszív (AR) folyamat, ha x_t gyengén stacionárius és előáll $x_{t+1} = \Phi x_t + \varepsilon_{t+1}$ rekurzióval, ahol $\Phi \in \mathbb{R}$, ε_{t+1} fehér zaj.

Megjegyzés: Ha $\Phi > 1$, x_t Φ ütemben nő, ha $\Phi < 1$, x_t Φ ütemben csökken.

Példa: x_t - a Balaton vízállása t időpontban.
 $x_{t+1} = 0.9x_t + \varepsilon_{t+1}$, ahol ε_{t+1} a csapadék.

Definíció: Legyen

$$x_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

ε_t fehér zaj, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ együtthatók. Ekkor x_t végtelen mozgóátlag folyamat.

Definíció: Ha $\forall \alpha_j = 0 \ j < 0$ esetén, akkor az

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}$$

végtelen mozgó átlag folyamatot kauzális mozgóátlag folyamat.

Állítás:

$$R_x(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+k} \sigma^2$$

Definíció: Y_t, Y val.vált.-ok. $E(Y_t^2) < \infty, E(Y^2) < \infty$. Y_n L^2 értelemben tart Y -hoz, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} E((Y_n - Y)^2) = 0$.

Tétel: Legyen $|\Phi| < 1$, ε_t fehér zaj. Ekkor $\exists x_t, t \in \mathbb{Z}$ AR-nak MA előállítás, melyre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ((x_t - \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^k \varepsilon_{t-k})^2) = 0,$$

azaz x_t előáll ε_k végtelen soraként.

Bizonyítás:

$$x_t = \Phi x_{t-1} + \varepsilon_t = \Phi(\Phi x_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots = \Phi^{n+1} x_{t-(n+1)} + \Phi^n \varepsilon_{t-n} + \dots + \varepsilon_t = \Phi^{n+1} x_{t-n-1} + \sum_{k=0}^n \Phi^k \varepsilon_{t-k}.$$

$$E[(x_t - \sum_{k=1}^{\infty} \Phi^k \varepsilon_{t-k})^2] = E[(\Phi^{n+1} x_{t-n-1})^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{2n+2} E[(x_0)^2] = 0.$$

Állítás: Az $x_t = \Phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ AR folyamat csak ε_t jelen és múlt értékeitől függ, így x_t és ε_{t+k} korrelálatlanok, függetlenek $k \geq 1$.

Definíció: Legyen $x_t, t \in \mathbb{Z}$ -re tetszőleges sztochasztikus folyamat. Ekkor $zx_t = x_{t-1}$ kifejezésben a z a visszaléptetési operátor.

Definíció: $x_t, t \in \mathbb{Z}$ stacionárius folyamatot (p, q) -ad rendű ARMA folyamatnak nevezzük, ha:

$$x_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p} = \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q},$$

ahol α_0 mindig 1, $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_0, \dots, \beta_q$ rögzített konstansok, valamint ε_t fehér zaj.

$$x_t + \alpha_1 z x_t + \alpha_2 z^2 x_t + \dots + \alpha_p z^p x_t = \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 z \varepsilon_t + \beta_2 z^2 \varepsilon_t + \dots + \beta_q z^q \varepsilon_t$$

$$x_t(1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_p z^p) = \varepsilon_t(\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_q z^q)$$

$$x_t A(z) = \varepsilon_t B(z)$$

Tétel: Ha az $A(z)$ polinom minden gyöke a komplex sík egységkörén kívül van, azaz $\forall |z_i| > 1$, akkor az x_t ARMA folyamatnak létezik MA előállítása:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}.$$

Bizonyítás: Legyenek $A(z)$ gyökei $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{Z}$ vagy $\in \mathbb{C}$, mind különböző. Ekkor $A(z) = \alpha_p (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p)$

$$x_t = \frac{B(z)}{A(z)} \varepsilon_t = \frac{B(z)}{\alpha_p} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p)} \varepsilon_t =$$

Parciális törtekre bontható:

$$\frac{B(z)}{\alpha_p} \left[\frac{L_1}{z - z_1} + \frac{L_2}{z - z_2} + \dots + \frac{L_p}{z - z_p} \right] \varepsilon_t =$$

Minden elem mértani sorra bontható

$$\begin{aligned} \frac{L_j}{z - z_j} &= -\frac{L_j}{z_j} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_j}} = -\frac{L_j}{z_j} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_j} \right)^i \\ &= \frac{B(z)}{\alpha_p} \left[\sum_{j=1}^p \left(-\frac{L_j}{z_j} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{z}{z_j} \right)^i \right] \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i z^i \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \varepsilon_{t-i}, \end{aligned}$$

ahol φ_i konstansok.

Definíció: $A(z)x_t = B(z)\varepsilon_t$ folyamat invertálható, ha $\exists \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j x_{t-j}$ előállítása.

Tétel: Ha $B(z)$ polinom olyan, hogy minden gyöke az egységkörön kívül van, akkor invertálható, és

$$\varepsilon_t = \frac{A(z)}{B(z)} x_t.$$

7 Előrejelzés

Adottak $x_1, \dots, x_T$ minták. Ekkor x_{T+1} megközelítése $\hat{x}_{T+1}$.
Felvetések: $x_t(p, q)$ ARMA stabil, invertálható.

Definíció: Olyan $\hat{x}_t = \sum_{j=1}^{\infty} \delta x_{t-j}$ becslést keresünk, ahol $x_t(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$ múltból állítjuk elő, melyre $E(x_t - \hat{x}_t)^2$ a legkisebb négyzetes közelítés.

$$x_t = \frac{B(z)}{A(z)} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j},$$

φ_k -k számolhatók.

$$\hat{x}_t = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \varepsilon_{t-j}.$$

Állítás: $x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}$ ez a legjobb négyzetes közelítés, azaz akkor a legjobb, ha $\gamma_j = \varphi_j \forall j = 1, \dots$

Bizonyítás: tfh. $y_t = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \varepsilon_{t-j}$ x_t -nek egy becslése. A becslés akkor a legjobb, ha az $E((x_t - y_t)^2)$ a lehető legkisebb.

$$\begin{aligned} E((x_t - y_t)^2) &= E\left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j} - \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \varepsilon_{t-j}\right)^2\right) = E\left(\left(\varphi_0 \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j - \gamma_j) \varepsilon_{t-j}\right)^2\right) = \\ &= \varphi_0^2 E((\varepsilon_t)^2) + \sum_{j=0}^{\infty} (\varphi_j - \gamma_j)^2 E((\varepsilon_{t-j})^2) = 0. \end{aligned}$$

Mivel ε_t fehér zaj, $E(\varepsilon_t) = 0$

Állítás: Tehát mivel

•

$$\hat{x}_t = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}$$

alakban a legjobb,

•

$$x_t = \frac{B(z)}{A(z)} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j},$$

ezért

$$\hat{x}_t = x_t - \varphi_0 \varepsilon_t = \frac{B(z)}{A(z)} \varepsilon_t - \varphi_0 \varepsilon_t = \frac{B(z) - A(z)\varphi_0}{A(z)} \varepsilon_t.$$

Mivel j 1-től megy, a $j = 0$ tag 0. Azaz a számláló első tagja: $\beta_0 - 1\varphi_0 = 0$, amiből $\varphi_0 = \beta_0$.

Mivel x_t -kel akarjuk előállítani, felhasználjuk, hogy $\varepsilon_t = \frac{A(z)}{B(z)} x_t$

$$\hat{x}_t = \frac{B(z) - A(z)\beta_0}{B(z)} x_t.$$

8 Kovariancia függvény, jellemzői

Definíció: Legyen $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stac. folyamat. Ekkor a

$$R_x(k) = \text{cov}(x_0, x_k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

függvényt kovariancia függvénynek nevezzük.

Állítás: A kovariancia fv. tulajdonságai:

1. $R_x(0) = D^2(x_t)$ bármely $t \in \mathbb{Z}$ -re.
2. $R_x(k) = R_x(-k)$ (páros fv.)
3. $\text{cov}(x_k, x_m) = R_x(m - k)$

Bizonyítás:

1. $R_x(0) = \text{cov}(x_0, x_0) = \text{cov}(x_{0+t}, x_{0+t}) = \text{cov}(x_t, x_t) = D^2(x_t)$.
2. $R_x(k) = \text{cov}(x_0, x_k) = \text{cov}(x_{0-k}, x_{k-k}) = \text{cov}(x_{-k}, x_0) = R_x(-k)$.
3. $\text{cov}(x_k, x_m) = \text{cov}(x_{k-k}, x_{m-k}) = \text{cov}(x_0, x_{m-k}) = R_x(m - k)$.

Állítás: Ezekből, a fehér zaj tulajdonságai:

1. $\text{cov}(x_0, x_0) = \sigma^2$
2. $\text{cov}(x_i, x_j) = 0, \quad i \neq j$
3. Az előzőt átalakítva: $R_x(i - j) = 0$.

Definíció: $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stac. folyamatot ergodikusnak nevezünk, ha $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_t}{t}$ tart az $E(x_0)$ -hoz L^2 értelemben.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\left(\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_T}{T} - E(x_2)\right)^2\right) = 0.$$

Tétel: Ha $R_x(k)$ kovariancia függvény olyan, hogy a $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x(k) = 0$, akkor az x_t folyamat ergodikus.

Állítás: x_t ARMA folyamat. Ekkor

$$R_x(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j \varphi_{j+k} \sigma^2, \quad \sum \varphi_i^2 < \infty.$$

Bizonyítás:

$$R_x(k) = \text{cov}(x_t, x_{t+k}) = \text{cov}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi_j \varepsilon_{t-j}, \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_i \varepsilon_{t+k-i}\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_j \varphi_i \text{cov}(\varepsilon_{t-j}, \varepsilon_{t+k-i})$$

$$R_x(k) = \begin{cases} 0 & t - j \neq t + k - i \\ \varphi_j \varphi_{j+k} & t - j = t + k - i \end{cases}.$$

9 Spektrális sűrűség függvény

Definíció: Legyen $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stac. folyamat, $R_x(k), k \in \mathbb{Z}$ kovariancia fv. Ekkor a $\Phi_x(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_x(k) e^{-iuk}$ végtelen sort, ha konvergens, $u \in [-\pi, \pi]$ a folyamat spektrális sűrűség függvényének nevezzük.

Állítás: Tulajdonságai:

1. $\Phi(u) = \Phi(-u)$ azaz páros
2. $\Phi(u) \geq 0$
3. Ha $\Phi_x(u)$ létezik, akkor páros, nemnegatív inverze:

$$R_x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_x(u) e^{iuk} du.$$

Bizonyítás:

1.

$$\Phi_x(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_x(k) e^{-iuk} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_x(-k) e^{-iuk} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_x(k) e^{-i(-u)(-k)} = \Phi_x(-u).$$

2.

$$R_x(k) \sim \sigma^2 \geq 0, \quad e^{-ix} \geq 0$$

Állítás:

$$\Phi_x(u) = \sigma^2 \left| \frac{B(e^{-iu})}{A(e^{-iu})} \right|^2$$

10 Stacionárius folyamatok becslése

Definíció: $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stac. folyamatot ergodikusnak nevezünk, ha $\frac{x_1+x_2+\dots+x_t}{t}$ tart az $E(x_0)$ -hoz L^2 értelemben.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E\left(\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_T}{T} - E(x_2)\right)^2\right) = 0.$$

Tétel: Ha $R_x(k)$ kovariancia függvény olyan, hogy a $\lim_{k \rightarrow \infty} R_x(k) = 0$, akkor az x_t folyamat ergodikus.

Következmény: Ha az x_t stabil ARMA folyamat, akkor $R_x(k) \leq c^k$, valamilyen $0 < c < 1 \Rightarrow$ ergodikusság.

$$\bar{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_T}{T}$$

$$R_x(k) = \text{cov}(x_0, x_k) \stackrel{k=0}{=} \text{cov}(x_0, x_0) = D^2(x_0) = D^2(x_t)$$

$$R_x(0) = \frac{\sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x}_T)^2}{T}$$

$$R_x(k) \cong \frac{\sum_{i=1}^T (x_i - \bar{x}_T)(x_{i+k} - \bar{x}_T)}{T - k}$$

Tétel: x_t stabil ARMA folyamat, $R_x(k) \rightarrow 0$ $\hat{R}_x^T(k)$ L^2 értelemben tart $R_x(k)$ -hoz, és $\bar{x}_T \rightarrow E(x_t)$.

11 Wiener szűrő

11.1 Lineáris szűrők

Definíció: Legyen $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stac. folyamat, $\Psi_j \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{Z}$, melyre $\sum |\Psi_i| < \infty$. Azt mondjuk, hogy a Ψ_i által adott folyamat lineáris szűrő, ha

$$y_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i x_{t-i}.$$

y_t kauzális szűrő, ha $i < 0$ esetén $\Psi_i = 0$.

Tétel: Legyen $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stac. folyamat, Ψ_i lin. szűrő, $y_t = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i x_{t-i}$. Ekkor

$$R_y(k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_i \Psi_j R_x(k + i - j).$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} R_y(k) &= \text{cov}(y_t, y_{t+k}) = \text{cov}(x_0, x_k) = \text{cov}\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i x_{t-i}, \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_j x_{t+k-j}\right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_i \Psi_j \text{cov}(x_{t-i}, x_{t+k-j}) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_i \Psi_j R_x(k + i - j). \end{aligned}$$

Definíció: Transzfer függvény:

$$H(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j z^j,$$

ha Ψ_j lin. szűrő.

Tétel: $x_t, t \in \mathbb{Z}$ gyengén stac folyamat,

$$y_t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_j x_{t-j},$$

akkor

$$\phi_y(u) = \phi_x(u) |H(e^{-iu})|^2.$$

11.2 Wiener szűrők

Definíció: Wiener szűrő:

$$y_t = x_t + N_t,$$

ahol x_t a megfigyelt jel, N_t zaj.

Állítás: Ha x_t gyengén stac. és N_t fehér zaj, akkor y_t is gyengén stac.

$$R_y(k) = R_x(k) + R_N(k).$$

$$\phi_y(u) = \phi_x(u) + \phi_N(u).$$

Definíció: Ψ_i sorozat lineáris szűrő, a transzfer fv.:

$$H(e^{-iu}) = \frac{\phi_x(u)}{\phi_x(u) + \phi_N(u)} = \frac{\phi_x(u)}{\phi_y(u)}.$$

Ezt a szűrőt nevezzük Wiener szűrőnek.

$$\phi_x(u) = \phi_y(u) - \phi_N(u)$$

$$\Psi_i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\phi_x(u)}{\phi_x(u) + \phi_N(u)} e^{iju} du, \quad H(e^{-iu}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Psi_j e^{-iju}.$$

12 Markov lánc alapfogalmai

Definíció: $x_1, \dots, x_t$ valószínűségi változók sorozata Markov láncot alkot, ha t kezdőpillanatot követő x_{t+1} val. vált. értéke csak x_t értékétől függ.

$$P(x_{t+1} = i_{t+1} | x_t = i_t, x_{t-1} = i_{t-1}, \dots, x_0 = i_0) = P(x_{t+1} = i_{t+1} | x_t = i_t).$$

Definíció: Rögzített $n \in \mathbb{N}$ mellett $p_{i,j}(n)$, $i, j \in I$ valószínűségeket a Markov lánc n . lépéséhez tartozó egy lépéses átmenet valószínűségének nevezzük.

Definíció: $\pi(n)$ az átmenet valószínűségekhez tartozó átmenet valószínűségi mátrix.

$$\pi(n) = [p_{i,j}(n)]_{i,j \in I}.$$

π a folyamat dinamikáját adja meg. Tehát azt, hogy milyen valószínűséggel jut egy lépés alatt i -ből j -be.

Definíció: Egy α sorvektorról azt mondjuk, hogy eloszlás, ha

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k], \quad \alpha_i \geq 0, \quad \forall i = 1 \dots k, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$$

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix sztochasztikus mátrix, ha minden sorvektora eloszlás.

Definíció: A Markov lánc kezdeti eloszlása megadható egy $\mathbf{q} = [q_i]$ sorvektorral, ahol $\forall q_i = P(x_0 = i)$. Ebből következik, hogy $\sum q_i = 1$.

Definíció: Az $x_t, t \in \mathbb{N}$ Markov lánc homogén, ha $P(x_t = i_t | x_{t-1} = i_{t-1})$ független t -től.

Tétel:

$$p_{i,j} = P(x_1 = j | x_0 = i) \geq 0, \quad \forall i, j, \quad \sum_{j=0}^n p_{i,j} = 1.$$

Tétel: Legyen x_t valószínűségi változók sorozatának eloszlása $\mathbf{q}(x_0)$. Ekkor $\mathbf{q}(x_1)$ a következő képpen számolható:

$$\mathbf{q}(x_1) = \mathbf{q}(x_0)\pi, \quad \mathbf{q}(x_0), \mathbf{q}(x_1) \in \mathbb{R}^n, \quad \pi \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Definíció: Az n lépéses átmenet valószínűség annak a valószínűsége, hogy i -ből kiindulva n lépés alatt eljutok j -be:

$$p_{i,j}^{(n)} = P(x_n = j | x_0 = i).$$

Tétel: Chapman-Kolmogorov egyenlet:

$$[p_{i,j}^{(n)}] = \pi^n \quad n \geq 2$$

Definíció: Az $x_t, t \in \mathbb{N}$ Markov láncot irreducibilisnek nevezzük, ha $\forall i, j = 1, 2, \dots, N$ esetén $\exists n = n(i, j)$, hogy $p_{i,j}^{(n)} > 0$.
Azaz bármelyik állapotból bármelyik állapot elérhető.

Definíció: A Markov lánc aperiodikus, ha minden állapota aperiodikus.

Definíció: A markov láncot ergodikusnak nevezzük, ha aperiodikus, és $\forall p_{i,j} > 0$

Tétel: Legyen a markov lánc ergodik, $(N \times N)$ -es π mátrix-szal adott. Ekkor $\exists \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix}$$

x_j valószínűség független a kiindulástól.

Definíció: A fenti $\mathbf{x}$ a Markov lánc stacionárius állapota: $\mathbf{x} = \mathbf{x}\pi$, másképp jelölve: $\mathbf{q}_\infty = \mathbf{q}_0\pi$.

Tétel: Ha a markov lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor stabil. Azaz $\mathbf{q}(x_n) \rightarrow \mathbf{q}_\infty$, $\mathbf{q}_0$ -tól függetlenül.

Definíció: Egy végtelen Markov lánc visszatérő, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(x_n = i, x_k \neq i, 1 \leq k < n | x_0 = i)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{i,i}^{(n)} < \infty \Rightarrow \text{nem visszatérő.}$$

Definíció: Ha ∞ állapotterű Markov lánc stabil, ha

1. Irreducibilis és aperiodikus
2. Pozitív visszatérő: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i,i}^{(n)} \exists$ és független i -től.

Tétel: ∞ állapotterű Markov láncoknál Chapman-Kolmogorov:

$$p_{i,j}(n+m) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{i,k}(n) p_{k,j}(m).$$

Állítás: Ha egy ∞ állapotterű Markov lánc stabil, akkor létezik határeloszlás, ami szintén ∞ elemű lesz, összege 1.

$$q_j(n) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(0) p_{ij}(n).$$

13 Állapotok osztályozása, jellemzői

Definíció: Az $x_t, t \in \mathbb{N}$ Markov láncot irreducibilisnek nevezzük, ha $\forall i, j = 1, 2, \dots, N$ esetén $\exists n = n(i, j)$, hogy $p_{i,j}^{(n)} > 0$.

Azaz bármelyik állapotból bármelyik állapot elérhető.

Definíció: A markov lánc állapotainak S halmaza zárt, ha az S halmazon kívül egyetlen állapot sem érhető el S állapotaiból.

Definíció: Az i . állapot elnyelő állapot, ha $p_{i,i} = 1$. Minden elnyelő állapot zárt halmaz.

Definíció: Az i . állapot tranziens, ha $\exists$ olyan j állapot, amely elérhető i -ből, de j -ből i nem érhető el.

$$\exists n : p_{i,j}^{(n)} > 0, \quad \nexists m : p_{j,i(m)} > 0.$$

Ha nem tranziens, akkor visszatérő.

Definíció: Azt mondjuk, hogy i kommunikál j -vel, ha $\exists n, m : p_{i,j}^{(n)} > 0$ és $p_{j,i}^{(m)} > 0$.

Definíció: Az i . állapot periodikus $k > 1$ periódussal, ha k az a legkisebb szám, amire igaz, hogy i -ből i -be visszatérő lánc hossza k , illetve egész számú többszörösei.

Definíció: A nem periodikus visszatérő állapotot aperiodikusnak nevezzük.

Definíció: A Markov lánc aperiodikus, ha minden állapota aperiodikus.

14 Folytonos idejű Markov láncok

Az állapotter diszkrét $x_t \in S$, $S = \{1, 2, \dots\}$ $t \geq 0, t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Definíció: x_t -t folytonos idejű markov láncnak nevezzük, ha $\forall n \geq 1$ -re $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ -re az $x_0, x_1, \dots, x_n \in S$ teljesül:

$$P(x(t_n) = x_n | x(t_{n-1}) = x_{n-1}, x(t_{n-2}) = x_{n-2}, \dots, x(t_0) = x_0) = P(x(t_n) = x_n | x(t_{n-1}) = x_{n-1}),$$

ha ezek a feltételes valószínűségek léteznek.

Példa: 2 egymás utáni történés λ paraméterű, exponenciális eloszlású. x_t jelenti $[0, t]$ hány történés volt. x_t folytonos idejű Markov lánc eloszlása (λt) paraméterű Poisson eloszlás:

$$p_{ij} = e^{-(\lambda t)} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

Tétel: Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{aligned} p_{ij}(s+t) &= \sum_{k \in S} P(x(s+t) = j, x(t) = k | x(0) = i) = \sum_{k \in S} P(x(s+t) = j | x(t) = k) P(x(t) = k | x(0) = i) = \\ &= \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t) \\ \pi(s+t) &= \pi(s) \pi(t) = \pi(t) \pi(s). \end{aligned}$$

Definíció:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Tétel: Ha a Markov láncra igaz a fenti feltétel, $p_{i,j}(t)$ függvények differenciálhatóak $\forall t > 0$ -ra. Jelölés:

$$q_{ij} = p'_{ij}(0)^+ = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}$$

Definíció: $Q = [q_{ij}] = \pi'[0^+]$ mátrixot a folyamat ráta mátrixának nevezzük.

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} q_j = 0.$$

Tétel: A folytonos idejű Markov lánc stac. állapota létezik, ha $\cap \pi = \mathbf{y}$ egyenletnek létezik szátvektor megoldása.

A megoldás egyenlő lesz a $\mathbf{y}Q = 0$ egyenlet megoldásával.

15 Tömegkiszolgálás

Érkeznek igények, amikből mindig egyet kiszolgálunk, majd kiszolgálás után távozik.

Állítás: Fontos tulajdonságai:

1. Várható sorhossz
2. Átlagos várakozási idő
3. Optimális alkalmazott száma

15.1 Diszkrét időben

- x_n - sorhossz, n . időegység végén.
- y_n - n . időegységben érkező igények.
- v_n - n . időegységben legfeljebb hány igényt tud kielégíteni.

y_n független, azonos eloszlású. v_n független, azonos eloszlású. x_n, y_n, v_n függetlenek.

$$x_{n+1} = (x_n - v_{n+1})^+ y_{n+1}, \quad (x_n - v_n)^+ = \max(x_n - v_{n+1}, 0).$$

Állítás: Ha $x_0(y_n, v_n)$ függetlenek, akkor ez egy Markov lánc.

Tétel: A fenti tömegkiszolgálási modell π egy lépéses átmenet valószínűségi mátrixa olyan, hogy a főátló alatt és felett lévő elemek pozitívak, és $E(Y_i) < E(V_i)$, akkor a Markov lánc stabil.

Példa: Bináris modell:

$$\begin{aligned} Y_i &= \{0, 1\}, & P(y_i = 1) &= p, & P(y_i = 0) &= 1 - p \\ V_i &= \{0, 1\}, & P(v_i = 1) &= q, & P(v_i = 0) &= 1 - q \\ a &= (1 - p)q, & b &= (1 - q)p, & c &= (1 - p)(1 - q) + pq \end{aligned}$$

$$\pi = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & \cdots \\ a & c & b & 0 & \cdots \\ 0 & a & c & b & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Állítás: Sorhossz várható értéke:

$$E(x_{t+1}) = \frac{E(y_{t+1})(1 - 2E(y_{t+1})) + E(y_{t+1}^2)}{2(E(v_{t+1})) - E(Y_{t+1})}.$$

15.2 Folytonos időben

Sorban állási modellek: $A/B/m/K/M$, ahol

1. A - Szomszédos igények beérkezése között eltelt idő eloszlásának kódja.
2. B - Kiszolgálási idő eloszlásának kódja.
3. m - A rendszerben lévő kiszolgáló egységek száma.
4. K - A rendszer befogadóképessége.
5. M - Igényforrások száma.

A, B kódja lehet:

1. M - Markov lánc tulajdonságú, exponenciális eloszlású

2. D - Determinisztikus

3. G - Tetszőleges eloszlású

K, M alapértelmezettként ∞ .

$M/M/1$ -re, kiszolgálás λ , érkezés μ :

1. Kihasználtság: $\frac{\lambda}{\mu} = \rho < 1$

2. $p_k = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$, valamint $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

3. Rendszerben tartózkodó igények száma: $N(t) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i = \frac{\rho}{1-\rho}$

4. Sorhossz: $Q = \rho N(t) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = N(t) - \rho$

5. Várakozási idő: $T = \frac{1}{\mu - \lambda}$