

Lineáris Algebra I. Vizsga Jegyzet

Definíciók, Tételek és Bizonyítások a Vizsgához

Erdélyi Áron

September 12, 2018

Contents

1	Lineáris egyenletrendszerek	5
1.1	Bevezetés	5
1.1.1	Lineáris egyenletrendszer	5
1.2	Gauss elimináció	5
1.2.1	Lépcsős alak	5
1.2.2	Ekvivalens átalakítás	5
1.3	Homogén lineáris egyenletrendszerek	5
1.3.1	Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása	5
2	Mátrix algebra	5
2.1	Bevezetés	5
2.1.1	$m \times n$ -es mátrix	5
2.1.2	Mátrixok egyenlősége	5
2.1.3	Speciális mátrixok	6
2.2	Műveletek mátrixokkal	6
2.2.1	Művelet	6
2.2.2	Mátrixok összeadása	6
2.2.3	Mátrixok szorzása	6
2.2.4	Egységmátrix	6
2.2.5	Mátrix inverze	7
2.3	Mátrix transzponáltja	7
2.4	Mátrix számszorosa	8
3	Vektoralgebra	8
3.1	Bevezetés	8
3.2	Vektorok összeadása és különbsége	8
3.2.1	Vektorok összeadása	8
3.3	Vektorok szorzatai	9
3.3.1	Vektor számszorosa	9
3.3.2	Skálárszorzat	9
3.3.3	Vektoriális szorzat	9
3.3.4	Vegyes szorzat	10
3.4	Vektorok mátrixos felírása	10
3.4.1	Vektorok felbontása, koordináták, mátrixos alak	10
3.4.2	Speciális bázisok	11
3.4.3	Koordinátákkal adott vektorok összeadása	11
3.4.4	Koordinátákkal adott vektor számszorosa	12
3.4.5	Koordinátákkal adott vektorok skalárszorzata ortonormált bázisban	12
3.4.6	Koordinátákkal adott vektorok vektoriális szorzata ortonormált jobbrendszertű bázisban	12
3.4.7	Koordinátákkal adott vektorok vegyes szorzata ortonormált bázisban	12

3.5	Alkalmazások	13
3.5.1	Vektorok felbontása	13
3.5.2	Sík normálvektoros egyenlete	13
4	Algebrai struktúrák és relációk	13
4.1	Struktúra és művelet általános fogalma	13
4.2	Fontos struktúrák	14
4.2.1	Csoport, félcsoport	14
4.2.2	Gyűrű	14
4.2.3	Test	15
4.2.4	Vektortér	15
4.2.5	Részstruktúrák	15
5	Vektorterek	16
5.1	Vektortér axiómák és következményeik	16
5.2	Lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség	16
5.2.1	Általános vektorok lineáris kombinációja	16
5.2.2	Lineáris függetlenség, összefüggőség	16
5.3	Generátorrendszer	16
5.4	Bázis és vektorok koordináta mátrixa	16
5.4.1	Bázis	16
5.4.2	Koordináta mátrix	16
5.5	Dimenzió	16
6	Determinánsok	16
6.1	A determináns fogalma	16
6.2	Kifejtési tétel	16
6.3	A determináns tulajdonságai	16
6.4	A determináns alkalmazásai	16
6.4.1	Cramer-szabály	16
6.4.2	Négyzetes mátrix inverze	16
6.4.3	Vektorok függetlenségének megállapítása	16
7	Homogén lineáris leképezések	16
7.1	Homogén lineáris leképezés fogalma	16
7.2	(Homogén) Lineáris leképezés mátrixa	17
7.3	Lineáris leképezések magtere, képtere	17
7.3.1	Magtér és képtér fogalma	17
7.3.2	Dimenziótétel	17
7.4	Sajátérték, sajátvektor	18
7.5	Izomorfia	18
8	Bázistranszformáció	19
8.1	Áttérés másik bázisra	19

8.2	Lineáris leképezések mátrixa bázisváltás esetén	19
8.3	Diagonizálás, hasonló mátrixok	20

1 Lineáris egyenletrendszerek

1.1 Bevezetés

1.1.1 Lineáris egyenletrendszer

Definíció: A lineáris egyenletrendszer lineáris egyenletekből áll. Egy egyenletet lineárisnak nevezünk, ha a benne szereplő ismeretlenek legfeljebb első hatványon vannak.

1.2 Gauss elimináció

1.2.1 Lépcsős alak

Definíció: Az egyenletrendszer lépcsős alakjában az i . egyenletet tartalmazza az x_i ismeretlent, de nem tartalmazza az $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ ismeretleneket.

1.2.2 Ekvivalens átalakítás

Definíció: Ekvivalens az egyenletrendszer átalakítása, ha az átalakítás után keletkező egyenletrendszer eredménye megegyezik az átalakítás előtti egyenletrendszer eredményével.

1.3 Homogén lineáris egyenletrendszerek

Definíció: A lineáris egyenletrendszer homogén, ha $b_i=0$ minden lehetséges i -re.

1.3.1 Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

Két megoldás lehetséges:

Ha a főátlóban szereplő elemek nem esnek ki, akkor csak a triviális eset lehetséges, azaz a megoldás az, ha minden változónk 0.

Akkor kapunk a triviálisról különböző megoldást, ha a lépcsős alakra hozás közben tiltósort kapunk. Ekkor az egyenletnek végtelen megoldása van.

2 Mátrix algebra

2.1 Bevezetés

2.1.1 $m \times n$ -es mátrix

Definíció: Legyen R a valós számok halmaza, m, n természetes számok. Ekkor az R feletti $m \times n$ -es mátrixon egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek m sora és n oszlopa van, elemei pedig valós számok. A mátrix típusa $m \times n$

2.1.2 Mátrixok egyenlősége

Definíció: Két mátrix egyenlő, ha megfelelő pozíciókon álló elemeik egyenlők:
 $(a_{ik}) = (b_{ik}) \iff a_{ik} = b_{ik}$ minden $i=1,2,\dots,m$ és minden $k=1,2,\dots,n$ számára.

2.1.3 Speciális mátrixok

Négyzetes Kvadrikus mátrixnak nevezzük az $n \times n$ típusú mátrixokat.

Sorvektorok $1 \times n$ típusú mátrixok.

Oszlopvektorok $n \times 1$ típusú mátrixok.

Szimetrikus mátrix Az $\mathbf{A}$ mátrix, ahol $a_{ik} = a_{ki}$.

Diagonális mátrix A főátlón kívül minden eleme 0. Röviden $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Nullmátrix Minden eleme 0: $a_{ik} = 0$.

Egységmátrix A főátlóban 1-esek, mindenhol máshol nullások találhatók: $\text{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

2.2 Műveletek mátrixokkal

2.2.1 Művelet

Definíció: A művelet olyan függvény, amely egy adott matematikai objektumok halmaz elemeihez, egy (másik) halmazbeli elemet rendel.

Egyváltozós a művelet, ha egy elemhez egy (másik) elemet rendel.

Kétváltozós, ha két elemhez rendel egy elemet.

2.2.2 Mátrixok összeadása

Definíció: Az $\mathbf{A} = (a_{ik})$ és a $\mathbf{B} = (b_{ik})$ mátrixok összege az a $\mathbf{C} = (c_{ik})$, amelynek adott pozíciójú elemét az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ mátrixok ugyan azon pozíciójú elemeinek összeadásával kapunk: $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

A mátrixok az összeadásra nézve Abel-csoportot alkotnak.

2.2.3 Mátrixok szorzása

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix $m \times n$ típusú, a $\mathbf{B}$ mátrix $n \times k$ típusú. Az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ mátrixok szorzata az a $\mathbf{C}$ mátrix, melynek típusa $m \times k$, elemeit a következőképpen számoljuk ki:

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^n a_{il} b_{lk}$$

A mátrixok szorzásra nézve csoportot alkotnak.

2.2.4 Egységmátrix

Definíció: Az $n \times n$ típusú mátrixok körében az $n \times n$ -es $\mathbf{E}_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ egységmátrix a szorzás egységeleme.

Tétel: Legyen $\mathbf{A}$ $n \times n$ típusú mátrix. Ekkor $\mathbf{A}\mathbf{E}_n = \mathbf{E}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{A}\mathbf{E}_n = \mathbf{C}$:

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^n a_{il}e_{lk} = a_{ik}e_{kk} = a_{ik}$$

mivel $e_{lk} = 0$, ha $l \neq k$ és 1, ha $l=k$.

Legyen most $\mathbf{E}_n\mathbf{A} = \mathbf{D}$:

$$d_{ik} = \sum_{l=1}^n e_{il}a_{lk} = e_{ii}a_{ik} = a_{ik}$$

mivel $e_{il} = 0$, ha $i \neq l$ és 1, ha $i=l$.

Emiatt $\mathbf{C}=\mathbf{D}$ hiszen elemenként egyenlők.

2.2.5 Mátrix inverze

Definíció: Legyen $\mathbf{A}$ $n \times n$ es mátrix. at $\mathbf{A}^{-1}$ -gyel jelölt, $n \times n$ típusú mátrixot, amelyre $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$, az $\mathbf{A}$ mátrix inverzének nevezzük.

Tétel: Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak van baloldali és jobboldali inverze, akkor az egyértelmű.

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}_n$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{E}_n$. Ekkor:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{A}^*) = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{A}^* = \mathbf{E}_n\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*$$

Tulajdonságai

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
3. $\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$ és $\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{B}$

2.3 Mátrix transzponáltja

Definíció: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{k \times n}$. Ekkor $\mathbf{A}$ transzponáltján azt a $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times k}$ mátrixot értjük, amelynek elemeire $b_{ij} = a_{ji}$ teljesül. Jelölése: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$

Tulajdonságai

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
2. $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
3. $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$

2.4 Mátrix számszorosa

Definíció: Legyen $\lambda \in R$. Az $m \times n$ -s $\mathbf{A}$ mátrix λ számszorosa az a $\mathbf{B}$ mátrix, melynek elemeire $b_{ik} = \lambda a_{ik}$ teljesül.

Tulajdonságai

1. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}1 = \mathbf{A}$
2. Vegyes asszociativitás: $\lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}$
3. Vegyes disztributivitás: $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$
4. Vegyes disztributivitás: $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$

3 Vektoralgebra

3.1 Bevezetés

Definíció: Az irányított szakaszt vektornak nevezzük.

Definíció: Két vektor egyenlő, ha irányuk és hosszuk megegyezik.

3.2 Vektorok összeadása és különbsége

3.2.1 Vektorok összeadása

Definíció: Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok összegét úgy kapjuk, hogy a $\mathbf{b}$ vektort eltoljuk magával párhuzamosan úgy, hogy kezdőpontja az $\mathbf{a}$ vektor végpontjához kerüljön. Az $\mathbf{a}$ vektor kezdőpontját és a $\mathbf{b}$ vektor végpontját összekötő vektor az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor összege.

Tétel: Vektorok összeadása kommutatív: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

Bizonyítás: Rajzoljunk fel egy paralelogrammát, melynek egyik oldala $\mathbf{a}$, másik oldala $\mathbf{b}$. Ekkor Mindegy, hogy melyik irányba indulok el, az átló ugyan akkora marad.

Tétel: Vektorok összeadása asszociatív: $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

Bizonyítás: Az összeg szerkesztésekor az előírt módon létrehozva a vektorok összefűzését, a kezdő és végpontok rögzítettek. Ezért mindegy, hogy milyen sorrendben adjuk őket össze, az összegvektor mindig az $\mathbf{a}$ vektor kezdőpontjából a $\mathbf{c}$ vektor végpontjába mutat.

Definíció: A nullvektor kezdőpontja és végpontja ugyan az a pont, iránya pedig definíció szerint tetszőleges.

3.3 Vektorok szorzatai

3.3.1 Vektor számszorosa

Definíció: Legyen $\lambda \in R$, $\mathbf{a}$ vektor. Az $\mathbf{a}$ vektor számszorosa az a $\lambda\mathbf{a}$ -val jelölt vektor, amelyre

- $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}$ -val egyirányú, hossza: $|\lambda\mathbf{a}| = \lambda|\mathbf{a}|$, ha $\lambda \geq 0$.
- $\lambda\mathbf{a} = \mathbf{a}$ -val ellentétes, hossza: $|\lambda\mathbf{a}| = \lambda|\mathbf{a}|$, ha $\lambda < 0$.

Lemma: Az $\mathbf{a}$ vektor ellentettje, az $\mathbf{a}$ vektor (-1) szerese: $(-\mathbf{a}) = (-1)\mathbf{a}$

Lemma: az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha $\exists$ olyan $\lambda \in R$, amelyekkel egyik vektor felírható a másik λ számszorosaként: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \exists \lambda \in R \mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$

Bizonyítás: Először azt bizonyítjuk, hogy ha a vektorok párhuzamosak, akkor van ilyen $\lambda \in R$. A párhuzamos irányt megadhatjuk egy $\mathbf{e}$ egységnyi hosszú vektorral, így $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}$ és $\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\mathbf{e}$. Ebből $\mathbf{e}$ kifejezhető $\mathbf{b}$ -ből: $\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$.

Visszahelyettesítve megkaphatjuk, hogy $\mathbf{a} = (|\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|)\mathbf{b}$. Tehát ha azt mondjuk, hogy $\lambda = |\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$, akkor kapjuk a bizonyítandót.

Amennyiben a vektorok ellentétesek, legyen $\lambda = -|\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$

Másodszor azt tegyük fel, hogy $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$. Ekkor a definíció miatt $\lambda\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$.

Definíció: Amennyiben $|\mathbf{e}| = 1$, akkor az $\mathbf{e}$ vektort egységvektornak nevezzük.

3.3.2 Skalárszorzat

Definíció: Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok skalárszorzatán azt az $\mathbf{a}\mathbf{b}$ -vel jelölt számot értjük, amelyre $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha$, ahol α a vektorok által bezárt szög.

Geometriai jelentés: Ha leosztjuk a szorzatot $|\mathbf{b}|$ -vel, akkor az $\mathbf{a}(\mathbf{b}/|\mathbf{b}|) = |\mathbf{a}| \cos \alpha = x$ az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ -re vetett merőleges vetületének előjeles hosszát kapjuk.

3.3.3 Vektoriális szorzat

Definíció: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ha közös kezdőpontból ábrázolva őket a $\mathbf{c}$ vektor irányából nézve az $\mathbf{a}$ vektort π -nél kisebb szögű pozitív irányú forgatás vigye át a $\mathbf{b}$ vektor irányába.

Definíció: Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata az az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vel jelölt vektor, amelyre: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \alpha \mathbf{e}$, ahol $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{a} \perp \mathbf{e}$, $\mathbf{b} \perp \mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}$ jobbrendszert alkotnak.

Geometriai jelentés: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma magassága m , melyre $m=|\mathbf{b}|\sin\alpha$. A paralelogramma egyik alapja $|\mathbf{a}|$. Ezért a vektoriális szorzat geometriai jelentése az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

3.3.4 Vegyes szorzat

Definíció: Az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$ valós számot az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának nevezzük.

Geometriai jelentés: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha)\mathbf{ec} = \text{alapterület} \cdot \text{magasság} = \text{előjeles térfogat}$.

Tehát az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának geometriai jelentése a vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

3.4 Vektorok mátrixos felírása

3.4.1 Vektorok felbontása, koordináták, mátrixos alak

Tétel: (Síkbeli felbontási tétel): Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor $\forall$ más $\mathbf{c}$ síkbeli vektor felbontható az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre, melyek összege adja a $\mathbf{c}$ vektort: $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, ahol $\alpha, \beta \in R$.

Ez a felbontás egyértelmű.

Bizonyítás: A $\mathbf{c}$ vektor kezdőpontján keresztül húzzunk $\mathbf{a}$ -val, végpontján keresztül $\mathbf{b}$ -vel párhuzamos egyeneseket. Mivel $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nem párhuzamosak, az új egyenesek pontosan egy pontban metszik egymást, legyen ez a pont M .

Mivel $AM \parallel \mathbf{b}$, ezért $\forall \alpha \in R$, amire $AM = \alpha\mathbf{a}$ és hasonlóan $MB = \beta\mathbf{b}$, ezért $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

Ez a felbontás egyértelmű. Tegyük fel, hogy a $\mathbf{c}$ vektornak két ilyen felbontása van:

$$\mathbf{c} = \begin{cases} \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} \\ \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b} \end{cases}$$

Ha kivonjuk egymásból ezt a két egyenletet:

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{a} + (\beta_1 - \beta_2)\mathbf{b}, \text{ tehát } \alpha_1 = \alpha_2 \text{ és } \beta_1 = \beta_2.$$

Definíció: Legyenek α, β valós számok.

Az $\mathbf{a}$ vektor lineáris kombinációja az $\alpha\mathbf{a}$ kifejezés.

Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektorok lineáris kombinációja az $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ kifejezés.

Definíció: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineárisan függetlenek, ha egyik sem írható fel a többi lineáris kombinációjaként.

Definíció: Bázisnak nevezzük azokat a vektorokat, amelyek függetlenek, és lineáris kombinációjuként előállítanak minden vektort.

Definíció: Legyenek $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ egy sík belüli vektorok, melyek közül $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ bázist alkot. Ekkor a $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ lineáris kombinációban szereplő α és β valós számokat a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Definíció: Legyen a sík egy bázisa $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Ha $\mathbf{c} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2$, akkor az
$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} = [\alpha_1 \quad \alpha_2]_{[\mathbf{b}]}^T$$
 oszlopvektor a $\mathbf{c}$ koordináta mátrixa.

Tétel: (Térbeli felbontási tétel): Ha adott a térben három, nem egysíkú $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektor, akkor bármely $\mathbf{d}$ térbeli vektorhoz $\exists \alpha, \beta, \gamma \in R$, amelyre: $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. Ez a felbontás egyértelmű.

Bizonyítás: Vegyük $\mathbf{d}$ kezdőpontját úgy, hogy az az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott síkon legyen, legyen ez a talppont D. Valamint kössük össze $\mathbf{d}$ végpontját $\gamma\mathbf{c}$ végpontjával, ahol γ -t úgy határozzuk meg, hogy $\gamma\mathbf{c}$ kezdőpontja is az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által meghatározott síkon legyen, legyen ez a talppont C. Ekkor mivel $\mathbf{CD}$ egy síkon van $\mathbf{a}$ -val és $\mathbf{b}$ -vel, ezért a $\mathbf{CD}$ előáll az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineáris kombinációjaként: $\mathbf{CD} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

Ekkor $\mathbf{d} = (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) + \gamma\mathbf{c}$.

3.4.2 Speciális bázisok

Ortogonalis egy bázis, ha vektorai páronként merőlegesek.

Normált egy bázis, ha vektorai egységvektorok.

Ortonormált egy bázis, ha ortogonalis és normált, vektorai jobbrendszeret alkotnak.

3.4.3 Koordinátákkal adott vektorok összeadása

Tétel: Adott a tér egy $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázisa és a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok e bázisra vonatkozó

koordinátákkal: $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$ és $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$

Ekkor a $\mathbf{c} + \mathbf{d}$ vektorok összegének koordinátái:
$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]} = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ c_3 + d_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$$

Bizonyítás: $\mathbf{c} + \mathbf{d} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3 + d_1\mathbf{b}_1 + d_2\mathbf{b}_2 + d_3\mathbf{b}_3 =$
 $= (c_1 + d_1)\mathbf{b}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{b}_2 + (c_3 + d_3)\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ c_3 + d_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$

3.4.4 Koordinátákkal adott vektor számszorosa

Tétel: Adott a tér egy $\mathbf{b}=(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ bázisa, és az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ bázisra vonatkoztatott koordinátáival: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$. Az $\mathbf{a}$ vektor λ -szorosának koordinátái: $\lambda \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$.

Bizonyítás: $\lambda \mathbf{a} = \lambda(a_1 \mathbf{b}_1 + a_2 \mathbf{b}_2 + a_3 \mathbf{b}_3) = \lambda a_1 \mathbf{b}_1 + \lambda a_2 \mathbf{b}_2 + \lambda a_3 \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix}_{[\mathbf{b}]}$

3.4.5 Koordinátákkal adott vektorok skalárszorzata ortonormált bázisban

Tétel: Adott a tér egy ortonormált bázisa és az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok e bázisra vonatkozó koordinátáikkal: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Az $\mathbf{a}\mathbf{b}$ skalárszorzat ekkor a következőképpen számolható ki: $\mathbf{a}\mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$.

Bizonyítás: Alkalmazva a skalárszorzat homogén és lineáris tulajdonságait, és azt, hogy $\mathbf{i}\mathbf{i}=\mathbf{j}\mathbf{j}=\mathbf{k}\mathbf{k}=1$, továbbá $\mathbf{i}\mathbf{j}=\mathbf{i}\mathbf{k}=\mathbf{j}\mathbf{k}=0$, kapjuk a bizonyítandót.

3.4.6 Koordinátákkal adott vektorok vektoriális szorzata ortonormált jobbrendszertű bázisban

Tétel: Adott a tér egy ortonormált bázisa és az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok e bázisra vonatkozó koordinátáikkal: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzat ekkor a következőképpen számolható ki: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$.

Bizonyítás: Alkalmazva a vektoriális szorzat disztributív és antikommutatív tulajdonságait és azt, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$, $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$, $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, kapjuk a bizonyítandót.

Tétel: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

3.4.7 Koordinátákkal adott vektorok vegyes szorzata ortonormált bázisban

Tétel: Adott a tér egy ortonormált bázisa és az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok e bázisra vonatkozó koordinátáikkal: $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzat ekkor a következőképpen

számolható ki: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

Bizonyítás: A vegyes szorzatra igaz a következő: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}) \cdot (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

3.5 Alkalmazások

3.5.1 Vektorok felbontása

Tétel: Adottak az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok. Az $\mathbf{a}$ vektor felírható a $\mathbf{b}$ vektorral párhuzamos $\mathbf{a}_b$ és a $\mathbf{b}$ vektorra merőleges $\mathbf{a}_m$ vektorok összegeként: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_m$, $\mathbf{a}_b = (\mathbf{a}\mathbf{e}_b)\mathbf{e}_b$ és $\mathbf{a}_m = \mathbf{a} - \mathbf{a}_b$, ahol $\mathbf{e}_b$ a $\mathbf{b}$ -vel egyirányú egységvektor. Ezen $\mathbf{a}_b$, $\mathbf{a}_m$ vektorokat rendre az $\mathbf{a}$ vektor párhuzamos és merőleges összetevőinek nevezzük.

Bizonyítás: Mint tudjuk az $\mathbf{a}_b = \mathbf{a}\mathbf{e}_b = |\mathbf{a}_b|\mathbf{e}_b$, ezért ha ezzel a skalárral megszorozzuk a $\mathbf{b}$ irányú egységvektort, megkapjuk az $\mathbf{a}$ vektor $\mathbf{b}$ -re vetített merőleges vetületének vektorát, amihez ha hozzáadunk egy $\mathbf{b}$ -re merőleges, megfelelő hosszúságú vektort, akkor az $\mathbf{a}$ vektort kaphatjuk meg.

3.5.2 Sík normálvektoros egyenlete

Definíció: Ha az $\mathbf{n}$ vektor merőleges az S síkra, akkor $\mathbf{n}$ az S sík normálvektora. Egy síknak tehát végtelen normálvektora van.

Tétel: Ha az S sík egy normálvektora $\mathbf{n}$, egy adott pontja P_0 , ebbe mutató helyvektor $\mathbf{p}_0$, tetszőleges pontja P , ebbe mutató helyvektora $\mathbf{p}$, akkor a sík egyenlete $\mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0$

Bizonyítás: Ha $\mathbf{n}$ merőleges a síkre, merőleges annak minden vektorára, így a $\mathbf{P}_0\mathbf{P}$ vektorra is, ezért skalárszorzatuk 0. Mivel $\mathbf{P}_0\mathbf{P} = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ ezért $\mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0$.

4 Algebrai struktúrák és relációk

4.1 Struktúra és művelet általános fogalma

Definíció: Tekintsük a matematikai objektumok egy H halmazát. A művelet olyan függvény, amely az adott objektumok halmazából vett objektum(ok)hoz egy (másik) halmazbeli objektumot rendel.

Egyváltozós az f művelet, ha egy objektumhoz rendel egy (másik) objektumot: $f : H \rightarrow H$.

Kétváltozós az f művelet, ha két objektumhoz rendel egy (másik) objektumot: $f : H \times H \longrightarrow H$.

n-változós művelet: $f : H^n \longrightarrow H$.

Definíció: Algebrai struktúra alatt olyan nem üres H halmazt értünk, melyben legalább egy $*$ művelet van definiálva. Jelölése: $\langle H | * \rangle$. Ha több művelet is figyelembe akarunk venni, akkor mindegyiküket felsoroljuk: $\langle H | *, \circ \rangle$.

Összetett algebrai struktúra függvényekkel összekötött, több algebrai struktúrából is állhat (pl.: Vektortér).

4.2 Fontos struktúrák

4.2.1 Csoport, félcsoport

Definíció: Egy G nemüres halmazt csoportnak nevezünk, ha értelmezve van G -n egy $*$ bináris művelet, amely

1. asszociatív: $\forall a, b, c \in G$ -re $(a*b)*c = a*(b*c)$
2. van egységeleme: $\exists e \in G$, hogy $\forall a \in G$ -re teljesül: $e*a = a*e = a$
3. van inverzeleme: $\forall a \in G$ -hez $\exists a^{-1} \in G$, amire: $a^{-1}*a = a*a^{-1} = e$

Ha a fenti tulajdonságokon kívül teljesül még a kommutativitás is: $\forall a, b \in G$ -re $a*b = b*a$, akkor kommutatív csoportról, vagy Abel-csoportról beszélünk.

Tétel: Ha G csoport, akkor $\forall a, x, y \in G$ -re, ha $a*x = a*y$, akkor $x = y$. Hasonlóan ha $x*a = y*a$, akkor $x = y$.

Bizonyítás: $x = e*x = (a^{-1})^*a*x = (a^{-1})^*a*y = e*y = y$.

Tétel: Ha G csoport, akkor $\forall a, x, b \in G$ esetén, ha $a*x = b$, akkor $x = (a^{-1})^*b$. Hasonlóan ha $x*a = b$, akkor $x = b*(a^{-1})$.

Bizonyítás: $x = e*x = (a^{-1})^*a*x = (a^{-1})^*b$.

Definíció: Egy G nem üres halmazt félcsoportnak nevezünk, ha értelmezve van G -n egy $*$ bináris művelet, amely asszociatív: $\forall a, b, c \in G$ -re $(a*b)*c = a*(b*c)$.

4.2.2 Gyűrű

Definíció: Egy R nem üres halmazt gyűrűnek nevezünk, ha értelmezve van R -en két művelet, $*$ és $\circ$. E műveletekre a következők teljesülnek:

1. $a \circ$ művelet kommutatív csoport

2. a $*$ művelet asszociatív

3. a két műveletet disztributív szabályok kötik össze: $a*(b \circ c) = a*b \circ a*c$, $(b \circ c)*a = b*a \circ c*a$

A $\circ$ műveletet összeadásnak, a $*$ műveletet szorzásnak nevezzük. Amennyiben a szorzás művelet is kommutatív, kommutatív gyűrűről beszélünk.

4.2.3 Test

Definíció: Egy T legylább kételemű halmazt (kommutatív) testnek nevezünk, ha értelmezve van T -n két művelet, melyeket összeadásnak és szorzásnak hívunk. Mindkét művelet kommutatív csoport, kivéve, hogy az összeadás egységének nincs a szorzásra vonatkozó inverze. A szorzás disztributív az összeadásra nézve.

Ha a szorzás kommutativitását nem kötjük ki, akkor nemkommutatív, más néven ferde-testről beszélünk.

4.2.4 Vektortér

Definíció: A V nemüres halmazt vektortérnek nevezük a T test felett, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

A V halmazon értelmezve van egy összeadás nevű művelet, bármely $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ elemekhez egyértelműen hozzárendel egy V -beli elemet, amelyet $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ -vel jelölünk. Az összeadás kommutatív csoport.

A T test és a V halmaz között értelmezve van a skalárral való szorzás: bármely $\lambda \in T$ ún. skalárhoz és bármely $\mathbf{v} \in V$ ún. vektorhoz hozzárendel egy V -beli elemet, amelyet $\lambda\mathbf{v}$ -vel jelölünk. A skalárszoros a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

Bármely $\lambda, \mu \in T$ és $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ esetén:

1. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}1 = \mathbf{v}$, ahol 1 a T test szorzásra vonatkozó egységeleme.

2. a vegyes asszociativitási szabály: $(\lambda\mu)\mathbf{v} = \lambda(\mu\mathbf{v})$

3. a vegyes disztributivitási szabály:

a) $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$

b) $\lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2$

4.2.5 Részstruktúrák

Definíció: Ha $\langle H|* \rangle$ és $H_1 \subseteq H$ -ra is $\langle H_1|* \rangle$ akkor azt mondjuk, hogy H_1 részstruktúrája H -nak.

5 Vektorterek

5.1 Vektortér axiómák és következményeik

5.2 Lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség

5.2.1 Általános vektorok lineáris kombinációja

5.2.2 Lineáris függetlenség, összefüggőség

5.3 Generátorrendszer

5.4 Bázis és vektorok koordináta mátrixa

5.4.1 Bázis

5.4.2 Koordináta mátrix

5.5 Dimenzió

6 Determinánsok

6.1 A determináns fogalma

6.2 Kifejtési tétel

6.3 A determináns tulajdonságai

6.4 A determináns alkalmazásai

6.4.1 Cramer-szabály

6.4.2 Négyzetes mátrix inverze

6.4.3 Vektorok függetlenségének megállapítása

7 Homogén lineáris leképezések

7.1 Homogén lineáris leképezés fogalma

Definíció: Legyenek V és W vektorterek, valamint $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\lambda \in R$.

Azt az $L : V \longrightarrow W$ függvényt, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik, homogén lineáris leképezésnek nevezzük.

1. Vektorok összegének képe egyenlő a képvektorok összegével: $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$
2. Vektorok számszorosának képe egyenlő a képvektorok számszorosával: $L(\lambda \mathbf{u}) = \lambda L(\mathbf{u})$

Definíció: Ha $V=W$, akkor a leképezést lineáris transzformációnak hívjuk.

Következmény: Ha $L : V \rightarrow W$ leképezés homogén lineáris, akkor a $\mathbf{0} \in V$ vektor képe $\mathbf{0} \in W$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$, $0 \in R$. A második tulajdonság miatt $L(0\mathbf{v}) = 0L(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in W$.

Tétel: Az $L : V \rightarrow W$ leképezés akkor és csak akkor homogén lineáris, ha $L(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda L(\mathbf{u}) + \mu L(\mathbf{v})$, ahol $\lambda, \mu \in R, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

7.2 (Homogén) Lineáris leképezés mátrixa

Definíció: Az $L : V^n \rightarrow W^k$ lineáris leképezés mátrixa $\mathbf{A}_{[\mathbf{a}][\mathbf{b}]} = [\mathbf{k}_1 | \mathbf{k}_2 | \dots | \mathbf{k}_n]$, ahol $\mathbf{k}_i := L(\mathbf{a}_i)$. Az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopai a V^n -beli $[\mathbf{a}]$ bázis $\mathbf{a}_i$ vektorainak képei, a W^k -beli $[\mathbf{b}]$ bázisra vonatkozóan.

Tétel: Legyen $L : V^n \rightarrow W^k$ a lineáris leképezés, $\mathbf{A}$ a leképezés mátrixa, $\mathbf{x} \in V, \mathbf{y} \in W$ ahol $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.
Ekkor $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$.

Bizonyítás:

7.3 Lineáris leképezések magtere, képtere

7.3.1 Magtér és képtér fogalma

Definíció: $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in V \mid L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$

Definíció: $\text{Im}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in W \mid \exists \mathbf{x} \in V : L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$

Lemma: V -beli nullvektor képe a W -beli nullvektor.

Tétel: Legyenek $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$, a magtér vektorai, vagyis $L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in W$.
 $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.
 $L(\lambda\mathbf{u}) = \lambda L(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$

7.3.2 Dimenziótétel

Tétel: $\text{Dim}(V) = \text{Dim}(\text{Ker}(L)) + \text{Dim}(\text{Im}(L))$

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\text{Ker}(L)$ altér, tehát van bázisa: $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m$. Egészítsük ki a független rendszert úgy, hogy $\text{Im}(A) = \{\mathbf{y} \in W \mid \exists \mathbf{x} \in V : L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$ bázisa legyen: $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m, \dots, \mathbf{b}_n$. Azt fogjuk bizonyítani, hogy a $\mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_{m+2}, \dots, \mathbf{b}_n$ vektorok képei bázist alkotnak a W -ben. Először azt bizonyítjuk, hogy képeik generátorrendszert alkotnak, aztán, hogy lineárisan függetlenek.

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \mathbf{b}_n$$

$$L(\mathbf{x}) = L(x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \mathbf{b}_n) = 0 + 0 + \dots + 0 + x_{m+1} L(\mathbf{b}_{m+1}) + \dots + x_n L(\mathbf{b}_n).$$

Tehát valóban generátorrendszert alkot a W -ben.

$$\text{Nézzük meg a függetlenség definícióját: } \mathbf{0} = \alpha_{m+1} L(\mathbf{b}_{m+1}) + \dots + \alpha_n L(\mathbf{b}_n) = L(\alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n)$$

$\mathbf{x}^* = \alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n$, ami eleme a kernelnek, tehát felírható a magtér bázisaiból:

$$\mathbf{x}^* = \alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{b}_m, \text{ Tehát átrendezve:}$$

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{b}_m - \alpha_{m+1} \mathbf{b}_{m+1} - \dots - \alpha_n \mathbf{b}_n. \text{ Mivel ezek lineárisan függetlenek, ezért ez csak akkor lehetséges, ha } \forall \alpha_i = 0$$

7.4 Sajátérték, sajátvektor

Definíció: A λ szám sajátértéke az L transzformációnak, ha van olyan nem nulla vektor, amelyre: $L(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Ez a nemnulla $\mathbf{x}$ vektor az L transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektor.

Tétel: Legyen $L : R^n \rightarrow R^n$ és $L(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x}_{[\mathbf{b}]}$, ahol az $\mathbf{A}$ a transzformáció egy mátrixa, $\mathbf{x}_{[\mathbf{b}]}$ pedig az $\mathbf{x}$ vektor koordináta mátrixa, mindkettő valamely rögzített $[\mathbf{b}]$ bázisra vonatkozóan. Ekkor az L transzformáció sajátértékei a $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai. A $p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$ polinom λ -ban n -edfokú, ez az ún. karakterisztikus polinom, melynek gyökei a sajátértékek. A saját vektorok pedig a sajátérték ismeretében $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletből kaphatók.

Bizonyítás: Rendezve a mátrix egyenletet, az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani: $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \iff \mathbf{A} \mathbf{x} = (\lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} \iff (\lambda \mathbf{E}) \mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ennek pontosan akkor lesz triviálistól különböző megoldása, ha $p(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0$. Ebből az egyenletből a λ értékek kiszámolhatók. Visszahelyettesítéssel kapjuk a sajátvektorokat.

7.5 Izomorfia

Definíció: Az egy-egy értelmű $L : V \rightarrow W$ lineáris leképezést izomorf, leképezésnek nevezzük. Jelölése: $V \cong W$.

Tétel: Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha dimenziójuk egyenlő.

Bizonyítás: Triviális: csak így lehet egy-egy értelmű.

8 Bázistranszformáció

8.1 Áttérés másik bázisra

Tétel: Legyen $V \neq \mathbf{0}$ n dimenziós vektortér, $[\mathbf{e}]$ és $[\mathbf{u}]$ két bázis V -ben. Ha a V tér

$\mathbf{x}$ vektorának koordináta mátrixa $[\mathbf{e}]$ bázisra vonatkozóan $x_{[\mathbf{e}]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]}$, akkor ugyan

azon $\mathbf{x}$ vektor $[\mathbf{u}]$ bázisra vonatkozó koordinátái az alábbi képpen számolhatók:

$$x_{[\mathbf{u}]} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x}_{[\mathbf{e}]}$$

ahol az $\mathbf{U}$ mátrix oszlopai az $[\mathbf{u}]$ bázis vektorainak az $[\mathbf{e}]$ bázisra vonatkozó mátrixai. Az $\mathbf{U}$ mátrixot áttérési mátrixnak nevezzük.

Bizonyítás: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{[\mathbf{e}]} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]} + \cdots +$

$$x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]} = \mathbf{E}_{[\mathbf{e}]} \mathbf{x}_{[\mathbf{e}]}$$

$$x = x_{[\mathbf{u}]} = x'_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]} + x'_2 \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]} + \cdots + x'_n \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}_{[\mathbf{e}]} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}_{[\mathbf{u}]} =$$

$\mathbf{U} \mathbf{x}_{[\mathbf{u}]}$

Tehát $\mathbf{E}_{[\mathbf{e}]} x_{[\mathbf{e}]} = \mathbf{U} x_{[\mathbf{u}]}$. Ezt rendezve kapjuk a tétel állítását: $\mathbf{U}^{-1} x_{[\mathbf{e}]} = x_{[\mathbf{u}]}$

8.2 Lineáris leképezések mátrixa bázisváltás esetén

Tétel: Ha az $L : V^n \rightarrow W^k$ lineáris leképezés mátrixa a rögzített $[\mathbf{a}] \in V^n$ és $[\mathbf{b}] \in W^k$ bázisokra $\mathbf{A}_{[\mathbf{a}][\mathbf{b}]}$, akkor ugyanezen leképezés $\mathbf{A}_{[\mathbf{a}'][\mathbf{b}]}$ mátrixa az $[\mathbf{a}'] \in V^n$ és a $[\mathbf{b}'] \in W^k$ bázisokra következő képlettel számolható:

Áttérési formula: $\mathbf{A}_{[\mathbf{a}'][\mathbf{b}']} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$, ahol $\mathbf{T}$ a képtér, $\mathbf{S}$ a kiindulási tér áttérési mátrixa.

Bizonyítás: Induljunk ki a lineáris leképezésből: $\mathbf{A}_{[a][b]}\mathbf{x}_{[a]} = \mathbf{y}_{[b]}$.
Helyettesítsük be az $\mathbf{x}_{[a]}$ és $\mathbf{y}_{[b]}$ helyébe a régi koordináta mátrix új bázissal és új koordináta mátrix segítségével kifejezett alakját: $\mathbf{x}_{[e]} = \mathbf{U}\mathbf{x}_{[u]}$
 $\mathbf{A}_{[a][b]}(\mathbf{S}\mathbf{x}_{[a']}) = \mathbf{T}\mathbf{y}_{[b']}$, amiből $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_{[a][b]}(\mathbf{S}\mathbf{x}_{[a']}) = \mathbf{y}_{[b']}$

Tétel: Ha az $L : V^n \longrightarrow W^n$ lineáris transzformáció rögzített $[a] \in V^n$ bázisra vonatkoztatva $\mathbf{A}_{[a]}$, akkor ugyanezen transzformáció $\mathbf{A}_{[a']}$ mátrixa az $[a'] \in V^n$ bázisra, a következő képlettel számolható: $\mathbf{A}_{[a']} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_{[a]}\mathbf{S}$, ahol $\mathbf{S}$ a kiindulási tér áttérési mátrixa.

8.3 Diagonizálás, hasonló mátrixok

Tétel: Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve e bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, melynek főátlójában a sajátértékek állnak: $\mathbf{A}_{[a']} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}_{[a]}\mathbf{S} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha $\exists$ olyan $\mathbf{S}$ mátrix, amire $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}$.

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix diagonizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel: A hasonlóság az $n \times n$ -es mátrixoknál ekvivalencia reláció.

Bizonyítás: Reflexív, szimmetrikus, tranzitív.

Tétel: Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlők. Továbbá, ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$ -hez, $(\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T})$, és $\mathbf{A}$ sajátvektora $\mathbf{s}$, akkor $\mathbf{B}$ ugyanazon sajátértékéhez tartozó sajátvektor $\mathbf{T}\mathbf{s}$.

Bizonyítás: $\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{s} = \lambda\mathbf{s}$
 $\mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{s} = \lambda(\mathbf{T}\mathbf{s})$

Tétel: Diagonalizálhatóság elégséges feltétele: Ha valamely $\mathbf{A}$ kvadrikus mátrix sajátértékei mind különbözők, akkor a mátrix diagonizálható.

Bizonyítás: Különböző sajátértékek esetén a sajátvektorok lineárisan függetlenek, tehát bázist alkotnak

Tétel: Az $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa

Tétel: Ha valamely $\mathbf{A}$ kvadrikus mátrix sajátértékei által meghatározott alterek dimenzióinak összege n , akkor a mátrix diagonizálható.