

Lineáris Algebra II

Erdélyi Áron

2018.09.11.

Tartalomjegyzék

1	Vektorterek	2
1.1	Vektorrendszer és mátrix rangja, egyenletrendszer megoldhatósága	2
2	Bázis Transzformáció	3
2.1	Áttérés más bázisokra	3
2.2	Lineáris leképezések mátrixa bázisváltás esetén	3
2.3	Diagonalizálás, hasonló mátrixok	3
2.4	Kvadratikus alakok diagonalizálása	5
2.4.1	Kvadratikus alakok	5
2.4.2	Kvadratikus alak diagonalizálása, főtengetel tétel	6
3	Kúpszeletek:	7
3.1	Kúpszeletek és az ellipszis, hiperbola, parabola ekvivalenciája	7
3.1.1	Ellipszis	7
3.1.2	Hiperbola	7
3.1.3	Parabola	7
4	Komplex számok	8
4.1	Komplex szám fogalma, műveletek	8
4.2	A komplex számok algebrai alakja	8
4.2.1	A komplex számok trigonometrikus alakja	8
4.2.2	Műveletek trigonometrikus alakban	8
4.2.3	Gyökvonás komplex számokból	9
4.3	Egységgyökök, primitív egységgyökök	9
4.4	Komplex számok exponenciális alakja	10
4.5	Az algebra alaptétele	11
5	Euklideszi terek	12
5.0.1	Metrikus tér	12
5.0.2	Normált tér	12
5.0.3	Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség	13
5.1	Ortonormált bázis	13
5.1.1	Szög fogalmának általánosítása, ortogonális vektorok	13
5.1.2	Ortogonalis bázis létezése	13
5.2	Valós euklideszi terek transzformációi	14
5.2.1	Szimmetrikus transzformáció:	14
5.2.2	Ortogonalis transzformáció	14
5.3	Komplex euklideszi tér	15
5.3.1	Komplex skalárszorzat	15
5.3.2	A komplex euklideszi terek speciális transzformációi	15

1 Vektorterek

1.1 Vektorrendszer és mátrix rangja, egyenletrendszer megoldhatósága

Definíció: A vektorrendszer rangján a vektorok által generált altér dimenzióját értjük. Mátrix sor-rangján a sorvektorok rangját, oszloprangján az oszlopvektorok rangját, determinánsrangján a belőle kiválasztható legnagyobb méretű nem nulla determináns méretét értjük.

Tétel: Mátrix sor-, oszlop-, és determinánsrangja megegyezik. E tétel miatt elegendő egyszerűen a mátrix rangjáról beszélni, jelölése: $\text{rang}(\mathbf{A})$.

Következmény: Az $n \times m$ -es mátrixok rangja legfeljebb $\min(n, m)$ lehet.

Tétel: Ha A $n \times n$ típusú mátrix, akkor

- $\mathbf{A}$ akkor és csak akkor reguláris, ha rangja n .
- $\text{rang}(\mathbf{A}) = n \Leftrightarrow \mathbf{A}$ is reguláris $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ -nek egyetlen megoldása van.
- $\text{rang}(\mathbf{A}) < n \Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ -nak van nem triviális megoldása.

Tétel: Ha $\mathbf{A}$ $m \times n$ -es mátrix, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, vagyis az együttható mátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával.

Bizonyítás: Az egyenletrendszert a következő alakban írjuk: $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$.

Ha a rangok egyenlők, az egyenletrendszer megoldható:

Ha $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$, akkor bármely $r+1$ darab oszlopvektor összefüggő. Legyenek $\mathbf{A}$ független vektorai $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$. Ezekhez $\mathbf{b}$ -t hozzátéve összefüggő rendszert kapunk. Mivel $\mathbf{b}$ "rontotta" el a függetlenséget, ezért $\mathbf{b}$ kifejezhető az $\mathbf{a}_i$ -k lineáris kombinációjával, amelyben a skalár együttható x_i -k az egyenletrendszer megoldásai, vagyis:

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n.$$

Az állítás másik része: ha az egyenletrendszer megoldható, akkor a rangok egyenlők.

Legyen egy megoldás: $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$, és $\text{rang}(\mathbf{A}) = r$.

Azt kell bizonyítani, hogy $\text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$, vagyis hogy bármely $r+1$ oszlopvektora lineárisan összefügg, és van r lineárisan független oszlopa. Ezen utóbbi $\mathbf{A}$ rangja miatt teljesül.

Ha az $r+1$ vektor csak $\mathbf{a}$ -kból áll, akkor $\mathbf{A}$ rangja miatt ezek összefüggők.

Ha az $r+1$ vektor egyike a $\mathbf{b}$ vektor, akkor két eset van:

1. Az r darab $\mathbf{a}_i$ vektor összefüggő, ekkor $\mathbf{b}$ -t hozzátéve is összefüggő marad, ezért a rang nem változik.
2. Az r darab $\mathbf{a}_i$ vektor lineárisan független. Ekkor bármely más $\mathbf{a}_j$ -t hozzátéve összefüggő lesz, különben $\mathbf{A}$ rangja $r+1$ lenne. A hozzávett $\mathbf{a}_j$ -k azonban az ismert tétel szerint kifejezhetők az eredeti $\mathbf{a}_i$ -kkel. Ezeket a $\mathbf{b}$ előállításába helyettesítve azt kapjuk, hogy $\mathbf{b}$ kifejezhető az r darab $\mathbf{a}_i$ lineárisan független vektorral, tehát az r darab $\mathbf{a}_i$ vektor és $\mathbf{b}$ lineárisan összefüggő, ezért a rang nem változik.

Következmény: Ha n az ismeretlenek száma, r a rang, akkor $n-r$ a rendszer úgy nevezett szabadsági foka, ennyi ismeretlent szabadon választhatunk, a Gauss eliminációnál tanultak alkalmazásával.

Tétel: Ha az $\mathbf{A}$ mátrix rangja, és a kibővített mátrix rangja egyenlő az ismeretlenek számával akkor pontosan egy megoldás van, amint a fenti bizonyítás e feltétel melletti megismétlésével könnyen látható.

Következmény: Homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az együttható mátrix rangja az ismeretlenek számánál kisebb.

2 Bázis Transzformáció

2.1 Áttérés más bázisokra

Tétel: Legyen $V \neq \{0\}$ vektortér, $[e]$ és $[u]$ két bázis V -ben. Ha V vektortér x vektorának koordináta

mátrixa $x_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]}$ az $[e]$ bázisra vonatkozik, akkor ugyanazon x vektor $[u]$ bázisban felírt koordináta

mátrixa az alábbi képletből számolható:

$$x_{[u]} = U_{[e]}^{-1} x_{[e]},$$

ahol az U mátrix oszlopai az $[u]$ bázis vektorainak az $[e]$ bázisra vonatkozó koordinátamátrixai. Az U mátrixot áttérési mátrixnak hívjuk.

Bizonyítás: Az x vektor $[e]$ szerinti eredeti koordináta mátrixa:

$$x_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[e]} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[e]} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{[e]} = E_{[e]} x_{[e]}.$$

Ha felírjuk ugyan ezt a vektort az $[u]$ bázis szerint:

$$x_{[u]} = x'_1 \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix}_{[e]} + x'_2 \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix}_{[e]} + \dots + x'_n \begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix}_{[e]} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}_{[e]} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}_{[u]} = U_{[e]} x_{[u]}.$$

Mivel a két koordináta mátrix egyenlő, ezért: $E x_{[e]} = U_{[e]} x_{[u]}$. A baloldalat megszorozva U^{-1} -el kapjuk: $U_{[e]}^{-1} x_{[e]} = x_{[u]}$.

2.2 Lineáris leképezések mátrixa bázisváltás esetén

Tétel: Ha az $L : V^n \rightarrow W^k$ lineáris leképezés mátrixa rögzített $[a] \in V^n$ és $[b] \in W^k$ bázisokra $A_{[a][b]}$, akkor ugyanezen leképezés $A_{[a'][b']}$ mátrixa az $[a'] \in V^n$ és a $[b'] \in W^k$ bázisokra a következő képpen számolható:

$$A_{[a'][b']} = T^{-1} A_{[a][b]} S,$$

Ahol T a képtér, és S a kiindulási tér áttérési mátrixa.

Bizonyítás: Az $A_{[a][b]} x_{[a]} = y_{[b]}$ képletből kiindulva, alkalmazzuk a bázistranszformáció képletét:

$$A_{[a][b]} (S x_{[a']}) = T y_{[b']} \longrightarrow T^{-1} A_{[a][b]} (S x_{[a']}) = y_{[b']}.$$

Tétel: Ha az $L : V^n \rightarrow V^n$ lineáris transzformáció mátrixa rögzített $[a] \in V^n$ bázisra vonatkoztatva $A_{[a]}$, akkor ugyanezen transzformáció $A_{[a']}$ mátrixa az $[a'] \in V^n$ bázisra következő képlettel számolható:

$$A_{[a']} = S^{-1} A_{[a]} S,$$

ahol S a kiindulási tér áttérési mátrixa.

Bizonyítás: Az előző tételbe helyettesítsük az T -t S -sel.

2.3 Diagonalizálás, hasonló mátrixok

Tétel: Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve e bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, ahol a főátlóban a sajátértékek állnak.

$$A_{[a']} = S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Bizonyítás:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 | \mathbf{s}_2 | \dots | \mathbf{s}_n] \rightarrow \mathbf{AS} = [\mathbf{As}_1 | \mathbf{As}_2 | \dots | \mathbf{As}_n], \quad \mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \rightarrow \mathbf{SD} = [\lambda_1 \mathbf{s}_1 | \lambda_2 \mathbf{s}_2 | \dots | \lambda_n \mathbf{s}_n].$$

Mivel $\mathbf{SD} = \mathbf{AS}$, ezért $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS}$.

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik egy olyan $\mathbf{S}$ mátrix, amellyel fennáll, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{BS}$.

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel: A hasonlóság az $n \times n$ -es mátrixok körében ekvivalencia reláció.

Bizonyítás:

- Reflexív: $\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{AE}$.
- Szimmetrikus: Ha $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC} \rightarrow [\mathbf{C}^{-1}]^{-1}\mathbf{AC}^{-1} = \mathbf{B}.$$

- Tranzitív: Ha $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ és $\mathbf{B} \cong \mathbf{C}$, akkor $\mathbf{A} \cong \mathbf{C}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{BC}, \mathbf{B} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{CV} \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{CV})\mathbf{U} = (\mathbf{VU})^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{VU}).$$

Tétel: Hasonló mátrixok sajátértékei páronként egyenlők. Továbbá, ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$ -hez, és $\mathbf{A}$ sajátvektora $\mathbf{s}$, akkor $\mathbf{B}$ ugyanazon sajátértékéhez tartozó sajátvektora $\mathbf{Ts}$.

Bizonyítás: $\mathbf{As} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{s} = \lambda\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{T}\mathbf{s}) = \lambda(\mathbf{T}\mathbf{s})$.

Tétel: Diagonalizálhatóság elégséges feltétele: Ha valamely kvadrátikus ($n \times n$) mátrix sajátértékei mind különbözők, akkor a mátrix diagonalizálható.

Bizonyítás: Különböző sajátértékek esetén a sajátvektorok lineárisan függetlenek, ezért bázist alkotnak.

Tétel: Az $\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa.

Bizonyítás:

- Ha a sajátvektorok bázist alkotnak, akkor áttérve erre a bázisra már bizonyítottuk, hogy olyan diagonális mátrixot kapunk, ahol a főátlóban a sajátértékek állnak.
- Ha az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, vagyis hasonló egy diagonális mátrixhoz, akkor azt fogjuk bizonyítani, hogy a diagonális mátrix elemei $\mathbf{A}$ sajátértékei, és $\mathbf{S}$ elemei az $\mathbf{A}$ sajátvektorai. Az, hogy a sajátvektorok bázist alkotnak onnan tudhatjuk, hogy $\mathbf{S}$ invertálható, tehát $\det(\mathbf{S}) \neq 0$, ezért a sajátvektorok függetlenek. Mivel bármely független vektorrendszer bázis, ha elemszáma egyenlő a dimenzióval, csak azt kell bizonyítani, hogy $\mathbf{S}$ oszlopai valóban sajátvektorok. Legyen $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 | \mathbf{s}_2 | \dots | \mathbf{s}_n]$. Akkor a hasonlósági képletből kiindulva:

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{AS} \rightarrow \mathbf{SD} = \mathbf{AS}$$

A két mátrix egyenlőségéből $\mathbf{As}_i = \lambda\mathbf{s}_i$, tehát a diagonális elemek valóban a sajátértékek, és az áttérési mátrix elemei valóban a sajátvektorok.

Tétel: Ha valamely $\mathbf{A}$ ($n \times n$) típusú mátrix sajátaltérinek dimenzióinak összege éppen n , akkor a mátrix diagonalizálható.

(Geometria multiplicitás = algebrai multiplicitás).

2.4 Kvadratikus alakok diagonalizálása

2.4.1 Kvadratikus alakok

Definíció: Legyen a V vektortér a valós test felett. Az $L : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést bilineáris függvénynek nevezzük, ha mindkét változójában lineáris. L minden $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ vektorpárjához egyértelműen hozzárendel egy valós számot, amit $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ -vel jelölünk.

1. Lineáris:

$$(a) \quad L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) + L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3).$$

$$(b) \quad L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3).$$

2. Homogén:

$$(a) \quad L(\lambda \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \lambda L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

$$(b) \quad L(\mathbf{v}_1, \lambda \mathbf{v}_2) = \lambda L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ vektorok.

Definíció: Az L bilineáris függvénynek a $[\mathbf{b}] = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ bázis szerinti $\mathbf{L}$ mátrixán azt az $n \times n$ -es mátrixot értjük, melyben az i -dik sor j -dik eleme $l_{ij} = L(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$.

Tétel: Ha $L : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris függvény, akkor $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$, ahol $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ és $\mathbf{A}$ a bilineáris függvény mátrixa.

Bizonyítás:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \mathbf{b}_n, \quad \mathbf{y} = y_1 \mathbf{b}_1 + y_2 \mathbf{b}_2 + \dots + y_n \mathbf{b}_n.$$

Ezeket behelyettesítve és alkalmazva a bilineáris függvények tulajdonságait:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= L(x_1 \mathbf{b}_1 + x_2 \mathbf{b}_2 + \dots + x_n \mathbf{b}_n, y_1 \mathbf{b}_1 + y_2 \mathbf{b}_2 + \dots + y_n \mathbf{b}_n) = \\ &= x_1 y_1 L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) + x_1 y_2 L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) + \dots + x_1 y_n L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n) + \\ &+ x_2 y_1 L(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) + x_2 y_2 L(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2) + \dots + x_2 y_n L(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_n) + \\ &\quad \vdots \\ &+ x_n y_1 L(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_1) + x_n y_2 L(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_2) + \dots + x_n y_n L(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n) = \\ &= [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) & L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) & \dots & L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_n) \\ L(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) & L(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2) & \dots & L(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_1) & L(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_2) & \dots & L(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \end{aligned}$$

Definíció: Az L bilineáris függvény szimmetrikus, ha $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$.

Tétel: Az L bilineáris függvény akkor és csak akkor szimmetrikus, ha a mátrixa szimmetrikus.

Bizonyítás: A definícióból következik. Az $\mathbf{L}$ bilineáris leképezés mátrixának l_{ij} -edik eleme $L(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$. Ekkor ha $L(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = L(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_i)$, akkor $l_{ij} = l_{ji}$, tehát a mátrix szimmetrikus.

Definíció: Az $L : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris függvényhez tartozó $Q(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}, \mathbf{x}) : V \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az L kvadratikus alakjának nevezzük.

Tétel: Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisak.

Bizonyítás: Bizonyítás 3 dimenzióra:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{s}_1 &= \lambda_1 \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{A} \mathbf{s}_2 &= \lambda_2 \mathbf{s}_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 &= \lambda_1 \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{A} \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 &= \lambda_2 \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2. \end{aligned}$$

Mivel $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, ezért $\mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 = 0$, tehát a sajátvektorok merőlegesek egymásra.

Bizonyítás: $\mathbf{A}\mathbf{s}_1 = \lambda_1\mathbf{s}_1$ -ből $\langle \mathbf{A}\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$

$\mathbf{A}\mathbf{s}_1 = \lambda_2\mathbf{s}_1$ -ből $\langle \mathbf{A}\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1 \rangle$

Ezért $0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$, és mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ezért $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle = 0$, vagyis a sajátvektorok valóban ortogonálisak.

Definíció: Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha $\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, ahol $\mathbf{S}$ ortogonális, $\mathbf{D}$ diagonális mátrix.

2.4.2 Kvadratikus alak diagonalizálása, főtengety tétel

Tétel: (Főtengety tétel): A $\mathbf{Q} = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ kvadratikus alakhoz tekintsük az $\mathbf{S}$ ortogonális transzformációt, amelynek $\mathbf{S}$ mátrixában az oszlopok a $\mathbf{Q}$ szimmetrikus mátrix ortonormált sajátvektorai. Áttérve ezen ortonormált sajátvektorok bázisára, vagyis alkalmazva az $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{u}$ koordináta transzformációt, a Q kvadratikus alak a következőképpen írható: $Q = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u} = \sum_i \lambda_i \mathbf{u}_i^2$, ahol λ_i -k az $\mathbf{Q}$ mátrix sajátértékei. Ezt a transzformációt főtengety transzformációnak nevezzük.

Definíció: A $Q = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}$ kvadratikus alak $\mathbf{Q} \in T^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixának n különböző sajátértékeit a Q kvadratikus alak főtengetyeinek nevezzük. Két dimenzióban a megfelelő kúpszelet szimmetria tengelyei a főtengetyek.

Definíció: A Q kvadratikus alak

- pozitív definit, ha minden $x \neq 0$ helyettesítésre $Q > 0$.
- pozitív szemidefinit, ha minden x -re $Q \geq 0$.
- indefinit, ha mind pozitív, mind negatív értékeket is felvesz.

Tétel: Az $n \times n$ -es Q mátrix akkor és csak akkor

- pozitív definit, ha minden sajátértéke pozitív.
- pozitív szemidefinit, ha minden sajátértéke pozitív, vagy nulla.

Bizonyítás: A $Q = \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u} = \sum_i \lambda_i \mathbf{u}_i^2$ összefüggésből az állítás következik.

Tétel: Q akkor és csak akkor pozitív definit, ha a bal felső négyzetes mátrixok aldeterminánsai mind pozitívak.

Tétel: (Spektrál tétel): Valamely négyzetes mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

Bizonyítás:

1. $\mathbf{A}$ szimmetrikus $\Rightarrow$ Ortogonálisan diagonalizálható:

Mivel $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, ezért a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek, de legalább is ortogonálisak.

$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, mert szimmetrikus, $\mathbf{D}$ diagonális mátrix, $\mathbf{S}$ pedig ortogonális, azaz $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T$.

A diagonalizálást $\mathbf{A}^T$ -re felírva:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = (\mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S})^T = (\mathbf{S}^{-1})^T\mathbf{D}\mathbf{S}^T = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}.$$

2. $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható $\Rightarrow$ Szimmetrikus:

Ortogonalisan diagonalizálható, tehát $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$. Ez csak akkor teljesülhet, ha $\mathbf{S}^T = \mathbf{S}^{-1}$. Mivel $\mathbf{D} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, ezért:

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1})^T = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{A},$$

Tehát $\mathbf{A}$ szimmetrikus.

3 Kúpszeletek:

Egy egyenes körkúpot a csúcsára nem illeszkedő síkkal elmet szve különböző görbéket kapunk síkmetszetként, aszerint, hogy a sík a kúp tengelyével mekkora szöget zár be.

Ha a bezárt szög megegyezik a kúp félnyílásszögével, azaz a sík egy alkotóval párhuzamos, akkor parabola; ha kisebb, mint félnyílásszög, akkor hiperbola; ha nagyobb, mint félnyílásszög, akkor ellipszis; ha pedig a sík a tengelyre merőleges, akkor kör lesz a síkmetszet.

Definíció: Az ellipszis azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának összege állandó, mely állandó nagyobb az adott pontok távolságánál

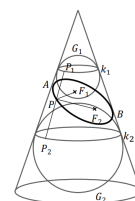
Definíció: A hiperbola azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának különbsége állandó, mely állandó kisebb az adott pontok távolságánál.

Definíció: A parabola azon pontok mértani helye a síkban, amik egy adott egyenestől és egy adott, az egyenesre nem illeszkedő ponttól egyenlő távolságra vannak.

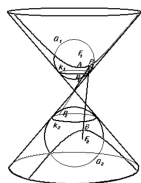
3.1 Kúpszeletek és az ellipszis, hiperbola, parabola ekvivalenciája

3.1.1 Ellipszis

Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba olyan gömböket, amik érintik a kúpot és a metszősíkot is. A G_1 gömb a kúp palástját k_1 körben, a síkot F_1 pontban érinti. A G_2 gömb a kúpot k_2 körben, a metszősíkot F_2 pontban érinti. A P ponton áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket a P_1 és P_2 pontokban metszi. Teljesül rájuk, hogy $PP_1 = PF_1$ és $PP_2 = PF_2$, mivel ezek a szakaszok a gömbhöz húzott érintőszakaszok egy külső pontból. Ugyanakkor PP_1 és PP_2 egy közös alkotón vannak és ezek hosszának összege a forgásszimmetria miatt állandó. Tehát egy tetszőleges P pontnak a fókuszoktól vett távolságainak összege állandó, ezért ez ellipszis.



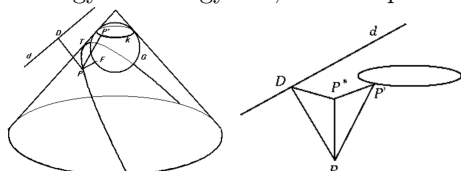
3.1.2 Hiperbola



Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba olyan gömböket, amik érintik a kúpot és a metszősíkot is. A G_1 gömb a kúp palástját k_1 körben, a síkot F_1 pontban érinti. A G_2 gömb a kúpot k_2 körben, a metszősíkot F_2 pontban érinti. A P ponton áthaladó alkotó a k_1 és k_2 köröket a P_1 és P_2 pontokban metszi. Teljesül rájuk, hogy $PP_1 = PF_1$ és $PP_2 = PF_2$, mivel ezek a szakaszok a gömbhöz húzott érintőszakaszok egy külső pontból. Ugyanakkor P_1 és P_2 egy közös alkotón vannak és a forgásszimmetria miatt P_1P_2 szakasz hossza állandó és P ugyanazon az egyenesen van, ezért PP_1 és PP_2 szakaszok különbségének abszolút értéke állandó. Tehát egy tetszőleges P pontnak a fókuszoktól vett távolságainak különbségének abszolút értéke állandó, ezért ez hiperbola.

3.1.3 Parabola

Legyen P a síkmetszet egy tetszőleges pontja. Illesszünk a kúpba egy olyan érintőgömböt G , ami egyúttal a síkot is érinti. A kúpot k körben, a síkot F pontban érinti a G gömb. P -ből a gömbhöz húzott érintőszakaszok PF és PP' , amik egyenlő hosszúságúak. A metszősík és k síkja d egyenesben metszik egymást. P -ből merőlegest állítva d -re és k síkjára kapjuk a D és a P^* talppontokat. PD a metszősíkban van és párhuzamos azzal az alkotóval, amivel a sík is párhuzamos. Így a DPP^* és a P^*PP' szög is váltószöge egy-egy olyan szögnek, melynek egyik szára a kúp tengelye, másik szára pedig egy alkotó; a két szög tehát egyenlő. Ezért a kapott $PP'P^*$ derékszögű háromszög egybevágó a PP^*D derékszögű háromszöggel (egy oldaluk közös és a rajta fekvő szögeik egyenlők). Tehát az átfogók egyenlő hosszúak: $DP = PP'$, másrésztől $PP' = PF$. Tehát egy tetszőleges P pont távolsága a fókuszról és a vezéregyenestől egyenlő, ezért ez parabola.



4 Komplex számok

4.1 Komplex szám fogalma, műveletek

Definíció: Legyen $\mathbb{C}$ a valós számpárok halmaza: $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$. A $\mathbb{C}$ -n két műveletet értelmezünk: egy összeadás, és egy szorzás nevűt. A szokásos módon $+$ és $\cdot$ jelekkel jelöljük ezeket. A $\mathbb{C}$ halmaz elemei a műveletekkel együtt alkotják a komplex számokat.

Definíció: Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, ha első és második elemeik egymással páronként egyenlők: $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

Következmény: $(a, b) \neq (b, a)$, kivéve, ha $a = b$.

Definíció: Összeadás: $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C}$.

Definíció: Szorzás: $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$.

Tétel: A $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ alakú számok testet alkotnak az előző műveletekre nézve.

4.2 A komplex számok algebrai alakja

Tétel: Az $(a, 0)$ komplex számok és a valós számok között egy-egy értelmű, művelettartó leképezés létesíthető. Másképpen fogalmazva, az $(a, 0)$ komplex számok izomorfak a valós számokkal.

Bizonyítás: Konstruktív módon megadjuk az izomorfiát biztosító egy-egyértelmű leképezést. A hozzárendelés módja: $(a, 0) \in \mathbb{C} \leftrightarrow a \in \mathbb{R}$.

Tétel: Minden komplex szám felírható olyan kéttagú összegként, ahol az első tag mindkét tényezőjének van izomorf képe a valós számok között, a másodiknak pedig egyik tényezője rendelkezik e tulajdonsággal: $(a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1)$

Bizonyítás: A kijelölt műveleteket elvégezve adódik az állítás.

Definíció: A $\mathbf{z} = (a, b)$ komplex szám algebrai alakja $\mathbf{z} = (a, b) = a + b\mathbf{i}$, ahol $\mathbf{i}^2 = -1$.

Definíció: A $\mathbf{z} = a + b\mathbf{i}$ komplex szám abszolút értéke $|\mathbf{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Számolás algebrai alakban:

- Összeadás: $(a + b\mathbf{i}) + (c + d\mathbf{i}) = (a + c) + (b + d)\mathbf{i}$.
- Szorzás: $(a + b\mathbf{i})(c + d\mathbf{i}) = ac + ad\mathbf{i} + bc\mathbf{i} + bd\mathbf{i}^2 = (ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i}$.
- Osztás:

$$\frac{a + b\mathbf{i}}{c + d\mathbf{i}} = \frac{a + b\mathbf{i}}{c + d\mathbf{i}} \cdot \frac{c - d\mathbf{i}}{c - d\mathbf{i}} = \frac{(ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i}}{c^2 + d^2}.$$

Definíció: A $\mathbf{z} = a + b\mathbf{i}$ komplex szám konjugáltja a $\bar{\mathbf{z}} = a - b\mathbf{i}$ komplex szám.

4.2.1 A komplex számok trigonometrikus alakja

Definíció: A $\mathbf{z}$ komplex szám trigonometrikus alakja $\mathbf{z} = r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)$.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{b}{a}.$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi.$$

4.2.2 Műveletek trigonometrikus alakban

Tétel: Szorzás: $\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i} \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + \mathbf{i} \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + \mathbf{i} \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 \{ (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \mathbf{i} (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) \} = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i} \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Következmény: Moivre formula: $\mathbf{z}^k = r^k (\cos(k\varphi) + \mathbf{i} \sin(k\varphi))$.

Tétel: Osztás: $\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbf{i} \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Bizonyítás: A szorzáshoz hasonlóan bizonyítjuk.

4.2.3 Gyökvonás komplex számokból

Definíció: A $\mathbf{z}$ komplex számot a $\mathbf{z}^* \neq 0$ komplex szám n -edik gyökének nevezzük, ha $\mathbf{z}^n = \mathbf{z}^*$:

$$\sqrt[n]{\mathbf{z}^*} = \mathbf{z} \Leftrightarrow \mathbf{z}^n = \mathbf{z}^*.$$

Definíció: $w(\mathbf{z}) = x + \mathbf{i}y = \sqrt{a + \mathbf{i}b}$ komplex számokon értelmezett omplex értékű x függvény értéke az a komplex szám, aminek négyzete $a + \mathbf{i}b$, továbbá vagy $x > 0$, vagy $x = 0$, vagy $y \geq 0$.

4.3 Egységgyökök, primitív egységgyökök

Definíció: n -edik (komplex) egységgyököknek nevezzük a $\mathbf{z}$ komplex számot, ha $\mathbf{z}^n = 1$.

Másképpen: az $x^n - 1 = 0$ úgynevezett binom egyenlet komplex számok körében vett megoldásait n -edik egységgyököknek nevezzük. A valós megoldások: 1, ha n páratlan, és ± 1 , ha n páros.

Jelölés: $\epsilon_k^n = \cos \frac{2k\pi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{2k\pi}{n}$, $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$.

Tétel: Az összes n -edik egységgyök előáll az első; $\epsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{2\pi}{n}$ egységgyök hatványaiként.

Bizonyítás: A moivre formulából azonnal következik.

Tétel: Az n -edik egységgyökök csoportot alkotnak a komplex számok szokásos szorzására nézve.

Bizonyítás:

1. Zárttság:

$$\begin{aligned} (\epsilon_k \epsilon_l)^n &= \left(\cos \frac{(k+l)2\pi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{(k+l)2\pi}{n} \right)^n = \cos \frac{(k+l)n2\pi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{(k+l)n2\pi}{n} = \\ &= \cos((k+l)2\pi) + \mathbf{i} \sin((k+l)2\pi) = 1. \end{aligned}$$

2. Egység: Az $1 = 1(\cos \frac{0}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{0}{n})$.

3. Inverz: $\epsilon_k \epsilon_j = 1(\cos \frac{0}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{0}{n})$ alapján: $\frac{k2\pi}{n} + \frac{j2\pi}{n} = \frac{n2\pi}{n}$, ahonnan $j = n - k$. Tehát $\epsilon_k^{-1} = \epsilon_{n-k}$.

Definíció 1: Azt az ϵ_k n -edik egységgyököt, amelynek hatványai az összes többi egységgyököt előállítják, primitív egységgyöknek nevezzük.

Definíció 2: Az az egységgyök, amelynek n -dik hatványa 1, és semelyik ennél kisebb hatványa nem 1, primitív egységgyök.

Tétel: Definíció 1 $\rightarrow$ Definíció 2.

Bizonyítás: Indirekt módon tegyük fel, hogy vannak egyenlők is az ϵ_k hatványai között, pl: $\epsilon_k^j = \epsilon_k^l$, azaz

$$\frac{\epsilon_k^j}{\epsilon_k^l} = \epsilon_k^{j-l} = 1.$$

Mivel $j - l < n$, ezért ez azt jelentené, hogy ϵ_k -hoz nem az n lenne a legkisebb olyan szám, amire n -edik egységgyök. Ez ellentmondás, tehát az eredeti feltevésünk igaz.

Tétel: Ha ϵ_k n -edik primitív egységgyök, akkor k és n nem relatív príme (nincs közös osztójuk).

Bizonyítás: A primitív egységgyökök hatványaival minden egységgyök előállítható, így az első is:

$$\begin{aligned}\epsilon_k^j &= \epsilon_1 \\ \cos \frac{jk2\pi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{jk2\pi}{n} &= \cos \frac{2\pi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{2\pi}{n} \\ \frac{jk2\pi}{n} &= \frac{2\pi}{n} + u2\pi \\ \frac{jk \frac{2\pi}{n} - \frac{2\pi}{n}}{u} &= 2\pi \\ \frac{jk - 1}{u} &= n \\ jk - 1 &= nu \\ jk - nu &= 1.\end{aligned}$$

Tehát ha lenne k -nak és n -nek közös osztója, akkor az osztója lenne 1-nek is, ami lehetetlen.

Tétel: Ha n és k relatív príme, akkor ϵ_k n -edik egységgyök.

Bizonyítás: A 2. definíció teljesülését bizonyítjuk: ha k relatív prím n -hez, akkor n az a legkisebb szám, amire ϵ_k n -edik egységgyök. Indirekt módszerrel bizonyítunk. Tegyük fel, hogy ϵ_k -t $j < n$ hatványra emeljük, és 1-et kapunk. A moivre-tétel szerint ez azt jelenti, hogy

$$\epsilon_k^j = \cos \frac{jk2\pi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{jk2\pi}{n} \neq \cos 0 + \mathbf{i} \sin 0.$$

A 0 úgy jöhetne ki, hogy a $\frac{jk2\pi}{n}$ szög a 2π egész számú többszöröse lenne. Mivel k relatív prím n -hez, ez csak úgy lehetne, ha n osztója lenne j -nek, de ez lehetetlen, hiszen $n > j$.

Definíció 3: Ha ϵ_k n -edik egységgyök, továbbá n, k relatív príme, akkor ϵ_k primitív n -edik egységgyök.

Tétel: Definíció 2 $\rightarrow$ Definíció 1 $\rightarrow$ Definíció 3 $\rightarrow$ Definíció 2. Mivel a bizonyításban körbeértünk, beláttuk a 3 definíció egyenértékűségét.

4.4 Komplex számok exponenciális alakja

Definíció:

$$\mathbf{z} = re^{\mathbf{i}\varphi}$$

alakot, ahol r a $\mathbf{z}$ komplex szám abszolút értéke, és φ az argumentuma, a komplex szám exponenciális alakjának nevezzük.

Számolás exponenciális alakban:

•

$$\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2 = r_1 e^{\mathbf{i}\varphi_1} r_2 e^{\mathbf{i}\varphi_2} = r_1 r_2 e^{\mathbf{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

•

$$\mathbf{z}^n = (r e^{\mathbf{i}\varphi})^n = r^n e^{n\mathbf{i}\varphi}.$$

•

$$\sqrt[n]{\mathbf{z}} = \sqrt[n]{r e^{\mathbf{i}\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{\mathbf{i}\frac{\varphi + k2\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

•

$$\frac{\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2} = \frac{r_1 e^{\mathbf{i}\varphi_1}}{r_2 e^{\mathbf{i}\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{\mathbf{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

4.5 Az algebra alaptétele

Tétel: (Az algebra alaptétele:) Az n -ed fokú komplex együtthatós polinomnak pontosan n darab komplex gyöke van.

Tétel: Ha a $\mathbf{z}$ komplex szám gyöke egy polinomnak, akkor konjugáltja is gyöke.

5 Euklideszi terek

Definíció: Az $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvényt, melynek függvényértékét $s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ -nal jelöljük, skalárszorzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall \mathbf{x} \in V$ esetén $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$, és $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Szimmetrikus: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ -re $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$.
3. Homogén: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ és $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.
4. Lineáris: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ -re $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

Definíció: A skalárszorzattal ellátott tereket Euklideszi tereknek nevezzük.

Tétel: Minden véges dimenziós vektortérben megadható skalárszorzat.

Bizonyítás: Konstruktív, megadunk egy skalárszorzatot.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

1. Pozitív definit:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0.$$

2. Szimmetrikus:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

3. Homogén:

$$\langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda x_i y_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

4. Lineáris:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle.$$

5.0.1 Metrikus tér

Definíció: A H halmazt metrikus térnek nevezzük, ha van olyan metrikának nevezett $d : H \times H \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kétváltozós függvény, amelyre a következők teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. Szimmetrikus: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Definíció: Diszkrét metrikának nevezik a következő függvényt:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 0, & \text{ha } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}.$$

5.0.2 Normált tér

Definíció: A V vektorteret normált-nak nevezzük, ha van olyan $n : V \rightarrow \mathbb{R}$ egyváltozós függvény, az úgynevezett norma (jelölése: $n(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$), amelyre a következők teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall \mathbf{x} \in V$ -re $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{x}\| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Homogén: $\forall \mathbf{x} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ -re $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ esetén $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Tétel: Minden normált tér metrikus tér.

Tétel: Konstruktív, megadunk egy metrikát: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Erről kell belátni, hogy rendelkezik-e a metrika tulajdonságaival.

1. Pozitív definit: $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. Szimmetria: $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, hiszen mindegy, hogy a vektor melyik irányba mutat, a nagysága ugyan az lesz.
3. Háromszög egyenlőtlenség: $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$. Ez teljesül $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ -re.

Tétel: Minden skalárszorzas tér normált tér.

Bizonyítás: Konstruktív, megadunk egy normát $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Ez rendelkezik a norma tulajdonságaival.

5.0.3 Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség

Tétel: (Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség): $|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$.

Bizonyítás: Tekintük az $\langle \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \rangle$ skalárszorzatot. $0 \leq \langle \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \rangle$ a pozitív definitésg miatt.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle + \langle \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle + \langle \lambda \mathbf{b}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + 2\langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle + \langle \lambda \mathbf{b}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda^2 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle + 2\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle. \end{aligned}$$

Ez λ -ra nézve egy kétismeretlenes másodfokú egyenlőtlenség. Mivel ennek a függvénynek legfeljebb 1 gyöke lehet, a diszkrimináns nem pozitív, azaz

$$4(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \leq 0 \Rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle^2 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle,$$

Amiből

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|.$$

Tétel: Minden Euklideszi tér metrikus tér.

Bizonyítás: Konstruktív, megadunk egy metrikát: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle}$. Teljesünek az előírt tulajdonságok.

5.1 Ortonormált bázis

5.1.1 Szög fogalmának általánosítása, ortogonális vektorok

Definíció: Euklideszi térben két vektor, az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ által beárt α szöget a következőképpen lehet értelmezni. Legyen $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ egy skalárszorzat V -ben, és valamely $\mathbf{x}$ vektor normája $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Ekkor

$$\cos \alpha = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}.$$

Definíció: Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ vektor ortogonális a $\mathbf{b}$ vektorra, ha $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$.

5.1.2 Ortogonális bázis létezése

Tétel: Ortogonális, nem nulla vektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítás: A függetlenség definíciójából indulunk ki:

$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{x}_i = 0$ csak akkor, ha $\forall \lambda_i = 0$. Vegyük rendre az $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ vektorokkal való skalárszorzatot.

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n = 0 \quad / \cdot \mathbf{x}_j \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Ezzel azt kapjuk, hogy $\lambda_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 0$. A skalárszorzat pozitív definit tulajdonsága miatt ez csak akkor teljesül, ha $\lambda_i = 0$.

Tétel: Minden euklideszi térben van ortogonális bázis.

Mivel minden tér saját magának az altere, az általánosság megszorítása nélkül a bizonyítást elegendő alterekre bemutatni.

Tétel: Minden altérben van ortogonális bázis.

Bizonyítás: Konstruktív, azt bizonyítjuk, hogy minden független rendszerből kiindulva, így bázisból is, tudunk ugyanolyan elemszámú ortogonális rendszert konstruálni. Gram-Schmidt ortogonalizáció: Legyen $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ egy független rendszer. Ebből képezzük $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ ortogonális rendszert a következőképpen:

$$\mathbf{c}_1 := \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{c}_n := \mathbf{b}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_i \rangle}{\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i \rangle} \mathbf{c}_i.$$

A konstrukció miatt a kapott rendszer ortogonális.

Definíció: Ortonormált a vektorrendszer, ha páronként ortogonális, és minden elemének normája 1.

Következmény: Minden euklideszi térnek van ortonormált bázisa.

Bizonyítás: Konstruktívan, normáljuk a Gram-Schmidt ortogonalizációból kapott bázist.

Tétel: Az euklideszi tér valamely bázisa ortonormált $\Leftrightarrow$ Egy vektor koordinátáját a következő képpen kapjuk meg:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad \lambda_i = \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_i \rangle$$

5.2 Valós euklideszi terek transzformációi

5.2.1 Szimmetrikus transzformáció:

Definíció: Egy transzformációt szimmetrikusnak nevezünk, ha van olyan bázis, amelyre nézve a transzformáció mátrixa szimmetrikus.

Lemma: Ha a leképezés $\mathbf{A}$ mátrixa szimmetrikus, és $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{y}^T \mathbf{x}$, akkor $\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Bizonyítás:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle = (\mathbf{A}\mathbf{y})^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Tétel: Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

Bizonyítás: $\mathbf{A}\mathbf{s}_1 = \lambda_1 \mathbf{s}_1$ -ből $\langle \mathbf{A}\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$

$\mathbf{A}\mathbf{s}_1 = \lambda_1 \mathbf{s}_1$ -ből $\langle \mathbf{A}\mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1 \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1 \rangle$

Ezért $0 = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle$, és mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ezért $\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \rangle = 0$, vagyis a sajátvektorok valóban ortogonálisak.

5.2.2 Ortogonális transzformáció

Definíció: Egy transzformáció ortogonális, ha van olyan bázis, melyben mátrixa ortogonális. (A $\mathbf{G}$ mátrix ortogonális, ha $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{E}$).

Tétel: Az ortogonális transzformáció megőrzi az $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ skalárszorzatot.

Bizonyítás:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = (\mathbf{A}\mathbf{b})^T (\mathbf{A}\mathbf{a}) = \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{a} = \mathbf{b}^T \mathbf{E} \mathbf{a} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

Tétel: Az ortogonális transzformáció távolságtartó, normatartó, szögtartó, ha e függvényeket a skalárszorzatból származtatjuk.

Bizonyítás: Mivel az ortogonális transzformáció skalárszorzzattartó, ezért ha a távolságot, normát és a szöget a skalárszorzzatból vezetjük le, akkor a transzformáció nyilván megtartja ezeket is.

Tétel: (Determinánok szorzás tétele): $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egyaránt $n \times n$ típusú mátrixok.

Tétel: Ortogonális mátrix determinánsának abszolút értéke 1.

Bizonyítás: $1 = \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})^2$.

Tétel: Ortogonális transzformáció sajátértékeinek abszolútértéke 1.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, akkor $(\mathbf{Ax})^T = (\lambda\mathbf{x})^T$. A két egyenletet összeszorozva:

$$(\mathbf{Ax})^T \mathbf{Ax} = (\lambda\mathbf{x})^T \lambda\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = (\lambda^2 \mathbf{x}^T) \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda^2 \mathbf{x}^T \mathbf{x},$$

amiből valóban $\lambda^2 = 1$.

5.3 Komplex euklideszi tér

5.3.1 Komplex skalárszorzzat

Definíció: A $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt skalárszorzzatnak nevezzük, ha a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. Pozitív definit: $\forall \mathbf{z} \in V$ -re $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \geq 0$, $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} = 0$.

2. Szimmetrikus: $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$ -re $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle = \overline{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1 \rangle}$.

3. Homogén:

(a) $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$ -re $\langle \lambda \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$.

(b) $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in V$ -re $\langle \mathbf{z}_1, \lambda \mathbf{z}_2 \rangle = \lambda \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$.

4. Lineáris:

(a) $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in V$ -re $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 \rangle = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle + \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle$.

(b) $\forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \in V$ -re $\langle \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle + \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle$.

5.3.2 A komplex euklideszi terek speciális transzformációi

Valós speciális mátrixok:	Komplex speciális mátrixok:
Szimmetrikus: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$	Hermitikus: $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^T$
Atiszimmetrikus: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$	Ferdén hermitikus: $\mathbf{A} = -\overline{\mathbf{A}}^T$
Ortogonalis: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$	Unitér: $\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}}^T$

Tétel: Hermitikus mátrixok sajátértékei valósak.

Bizonyítás: $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$ balról megszorozva $\bar{\mathbf{x}}^T$ -tal:

$$\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Ax} = \bar{\mathbf{x}}^T \lambda \mathbf{x} = \lambda \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} = \lambda \sum_{k=1}^n |\mathbf{x}_k|^2.$$

A jobboldal valós szám, ezért:

$$\lambda = \frac{\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{Ax}}{\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}}.$$

Azt kell csak belátni, hogy nem csak a nevező, de a számláló is valós. Ezt úgy fogjuk bizonyítani, hogy tudjuk, hogy a komplex szám akkor és csak akkor egyenlő a konjugáltjával, ha csak valós része van. Azt tudjuk, hogy a számláló is egyetlen komplex szám, hiszen a skalárszorzatnak ez volt a definíciója, így a szám megegyezik a "transzponáltjával".

$$\bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Ax}) = (\bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Ax}))^T = (\mathbf{Ax})^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \overline{\mathbf{Ax}} = \overline{\bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Ax})}.$$

Következés képpen a sajátérték, λ is valós.

Tétel: A ferdén szimmetrikus, vagy ferdén hermitikus mátrix sajátértékei vagy nullék, vagy (tisztán) képzetesek.

Bizonyítás: Az előzőhöz hasonlóan, a bizonyítás lényege, hogy a komplex szám akkor és csak akkor képzetes, ha egyenlő a konjugáltja (-1) szeresével.

$$\lambda = \frac{\bar{\mathbf{x}} \mathbf{A}^T \mathbf{x}}{\bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}}$$

$$\bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Ax}) = (\bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Ax}))^T = (\mathbf{Ax})^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (-\bar{\mathbf{A}}) \bar{\mathbf{x}} = -\bar{\mathbf{x}}^T (\mathbf{Ax}).$$

Eszerint valóban a 0, illetve képzetes szám lehet sajátérték.

Tétel: Unitér (ortogonális) mátrix sajátértékeinek abszolút értéke 1.

Bizonyítás: A bizonyítás analóg a valós esetben tanult szimmetrikus mátrixra vonatkozó hasonló állítás bizonyításával:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \\ \overline{(\mathbf{Ax})}^T = \overline{\lambda \mathbf{x}}^T \end{array} \right\} \text{a két egyenlet összeszorozva:}$$

$$\overline{(\mathbf{Ax})}^T (\mathbf{Ax}) = \overline{\lambda \mathbf{x}}^T \lambda \mathbf{x}$$

$$\overline{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{A}}^T (\mathbf{Ax}) = \lambda \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x}$$

$$\bar{\mathbf{x}}^T (\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{A}) \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x} = \lambda^2 \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{x},$$

amiből $\lambda^2 = 1$.