

# Analízis I. Vizsga Jegyzet

Erdélyi Áron

2018.09.12.

# Tartalomjegyzék

|          |                                                       |          |
|----------|-------------------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Tétel</b>                                          | <b>3</b> |
| 1.1      | Természetes számok . . . . .                          | 3        |
| 1.2      | Teljes indukció . . . . .                             | 3        |
| 1.3      | Valós számok bevezetése, axiómák . . . . .            | 3        |
| 1.3.1    | Műveletekre vonatkozó axiómák . . . . .               | 3        |
| 1.3.2    | Rendezési relációra vonatkozó axiómák . . . . .       | 3        |
| 1.3.3    | Archimédészi axióma . . . . .                         | 3        |
| 1.3.4    | Cantor-féle axióma . . . . .                          | 3        |
| 1.4      | Cantor féle közös-pont tétel . . . . .                | 4        |
| 1.5      | Halmazok korlátossága . . . . .                       | 4        |
| 1.6      | Infimum és supremum, kétfajta definíció . . . . .     | 4        |
| 1.6.1    | Legnagyobb alsó korlát . . . . .                      | 4        |
| 1.6.2    | Legkisebb felső korlát . . . . .                      | 4        |
| 1.7      | Létezés feltétele . . . . .                           | 4        |
| <b>2</b> | <b>Tétel</b>                                          | <b>5</b> |
| 2.1      | Topológiai alapfogalmak . . . . .                     | 5        |
| 2.1.1    | Környezet . . . . .                                   | 5        |
| 2.1.2    | Belső pont . . . . .                                  | 5        |
| 2.1.3    | Külső pont . . . . .                                  | 5        |
| 2.1.4    | Határpont . . . . .                                   | 5        |
| 2.1.5    | Nyílt és zárt halmazok . . . . .                      | 5        |
| 2.2      | Háromszög egyenőtlenség, általános eset . . . . .     | 5        |
| 2.3      | Bernoulli egyenlőtlenség . . . . .                    | 5        |
| 2.4      | Számtani és mértani közép, egyenlőtlenség . . . . .   | 5        |
| 2.4.1    | Számtani és mértani közép . . . . .                   | 5        |
| 2.4.2    | Számtani és mértani közepek egyenlőtlensége . . . . . | 5        |
| 2.5      | Számsorozat, alaptulajdonságok . . . . .              | 6        |
| 2.5.1    | Számsorozat . . . . .                                 | 6        |
| 2.5.2    | Sorozat korlátossága . . . . .                        | 6        |
| 2.5.3    | Sorozat monotonitása . . . . .                        | 6        |
| 2.6      | Határérték . . . . .                                  | 7        |
| 2.6.1    | Határérték definíciója . . . . .                      | 7        |
| 2.6.2    | Határérték általános definíciója . . . . .            | 7        |
| 2.7      | Divergencia, típusai . . . . .                        | 7        |
| 2.7.1    | Típusai . . . . .                                     | 7        |
| 2.8      | Konvergencia és korlátosság kapcsolata . . . . .      | 7        |
| <b>3</b> | <b>Tétel</b>                                          | <b>8</b> |
| 3.1      | Határérték tulajdonságai . . . . .                    | 8        |
| 3.2      | Cauchy-sorozat, konvergenciája . . . . .              | 8        |
| 3.2.1    | Cauchy-sorozat . . . . .                              | 8        |
| 3.2.2    | Cauchy-sorozat konvergenciája . . . . .               | 8        |
| 3.3      | Rész-sorozat . . . . .                                | 8        |
| 3.4      | Monoton részsorozat létezése . . . . .                | 8        |
| 3.5      | Nullsorozat, tulajdonságok . . . . .                  | 9        |
| 3.5.1    | Nullsorozat . . . . .                                 | 9        |
| 3.5.2    | Nullsorozat tulajdonságai . . . . .                   | 9        |
| 3.6      | Torlódási pont, kapcsolat a határértékkal . . . . .   | 9        |
| 3.6.1    | Torlódási pont . . . . .                              | 9        |
| 3.6.2    | Torlódási pont kapcsolata a határértékkal . . . . .   | 9        |
| 3.7      | Limsup és liminf . . . . .                            | 9        |

|           |                                                                          |           |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b>  | <b>Tétel</b>                                                             | <b>10</b> |
| 4.1       | Bolzano-Weierstrass tétel . . . . .                                      | 10        |
| 4.2       | Számtani-átlag-sorozat határértéke . . . . .                             | 10        |
| 4.3       | Az $e$ szám értelmezése, kétféle előállítása . . . . .                   | 10        |
| 4.4       | Nevezetes sorozat határértékek . . . . .                                 | 10        |
| 4.5       | Határérték monotonitása . . . . .                                        | 10        |
| 4.6       | Rendőrelv sorozatokra . . . . .                                          | 11        |
| <b>5</b>  | <b>Tétel</b>                                                             | <b>12</b> |
| 5.1       | Végtelen sor . . . . .                                                   | 12        |
| 5.2       | Végtelen sor konvergenciája, szükséges feltétel konvergenciára . . . . . | 12        |
| 5.2.1     | Végtelen sorok szükséges feltétele konvergenciára . . . . .              | 12        |
| 5.3       | Divergencia teszt . . . . .                                              | 12        |
| 5.4       | Végtelen mértani sor, konvergencia feltétele, sor összege . . . . .      | 12        |
| 5.4.1     | Mértani sor összege . . . . .                                            | 12        |
| 5.5       | Koch görbe, kerülete és területe . . . . .                               | 12        |
| 5.5.1     | Kerülete . . . . .                                                       | 12        |
| 5.5.2     | Területe . . . . .                                                       | 12        |
| <b>6</b>  | <b>Tétel</b>                                                             | <b>13</b> |
| 6.1       | Cauchy kritérium sorokra . . . . .                                       | 13        |
| 6.2       | Összehasonlító kritériumok végtelen sorokra . . . . .                    | 13        |
| 6.2.1     | Majoráns kritérium . . . . .                                             | 13        |
| 6.2.2     | Minoráns kritérium . . . . .                                             | 13        |
| 6.3       | Abszolút konvergens sor . . . . .                                        | 13        |
| 6.3.1     | Kapcsolataa konvergenciával . . . . .                                    | 13        |
| 6.4       | Hányados kritérium, gyengített változat . . . . .                        | 13        |
| 6.4.1     | Gyengített változat . . . . .                                            | 13        |
| <b>7</b>  | <b>Tétel</b>                                                             | <b>14</b> |
| <b>8</b>  | <b>Tétel</b>                                                             | <b>15</b> |
| <b>9</b>  | <b>Tétel</b>                                                             | <b>16</b> |
| <b>10</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>17</b> |
| <b>11</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>18</b> |
| <b>12</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>19</b> |
| <b>13</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>20</b> |
| <b>14</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>21</b> |
| <b>15</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>22</b> |
| <b>16</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>23</b> |
| <b>17</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>24</b> |
| <b>18</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>25</b> |
| <b>19</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>26</b> |
| <b>20</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>27</b> |
| <b>21</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>28</b> |
| <b>22</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>29</b> |
| <b>23</b> | <b>Tétel</b>                                                             | <b>30</b> |

# 1 Tétel

## 1.1 Természetes számok

A természetes számok halmazán ( $\mathbb{N}$ ) két művelet van értelmezve, az összeadás és a szorzás, illetve egy  $\leq$  rendezési reláció. Két fontos tulajdonsága van a halmaznak, hogy van legkisebb elem (1) és minden elem után van közvetlenül következő.

## 1.2 Teljes indukció

Adottak az  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  állítások. Ekkor a teljes indukció bizonyítási elve:

1. Belátjuk, hogy  $A_1$  teljesül.
2. Belátjuk, hogy ha  $A_n$  teljesül valamilyen  $n \in \mathbb{N}$  esetén, akkor  $A_{n+1}$  is.

Ezzel beláttuk az  $A_n$  állításokat.

## 1.3 Valós számok bevezetése, axiómák

A valós számok halmazának ( $\mathbb{R}$ ) elemeit megfeleltetjük a számegyenes pontjainak. A halmazon értelmezve van két művelet, az összeadás, a szorzás, valamint értelmezünk egy  $\leq$  rendezési relációt.

### 1.3.1 Műveletekre vonatkozó axiómák

1. Az összeadás asszociatív.
2. Az összeadásnak van egységeleme (0).
3. Az összeadásra nézve minden elemnek létezik inverzeleme. Ez a szám ellentettje.
4. Az összeadás kommutatív.
5. A szorzás asszociatív.
6. A szorzásnak van egységeleme (1).
7. A szorzásnak az összeadás egységelemén kívül minden elemre nézve létezik inverzeleme. Ez a szám reciproka.
8. A szorzás kommutatív.
9. A szorzás az összeadásra nézve disztributív szabályt alkot.

### 1.3.2 Rendezési relációra vonatkozó axiómák

1. A reláció reflexív.
2. A reláció antiszimmetrikus.
3. A reláció tranzitív.
4. Ha  $x \leq y$  akkor  $\forall z \in \mathbb{R}$  esetén  $x + z \leq y + z$ .
5. Ha  $x \leq y$  és  $0 \leq z$  esetén  $xz \leq yz$ .

### 1.3.3 Archimédész-i axióma

A valós számok halmazában nincsen legnagyobb elem.

### 1.3.4 Cantor-féle axióma

Legyen adott korlátos és zárt, egymásba skatulyázott intervallumok egy sorozata, melyekre  $I_{n+1} \subseteq I_n$ . Ekkor  $\exists c \in \mathbb{R}$ , amire  $c \in I_n \forall n$  esetén.

## 1.4 Cantor féle közös-pont tétel

Tegyük fel, hogy a Cantor-féle axióma teljesül, illetve, hogy  $\forall \epsilon > 0$ -hoz  $\exists I_k$  intervallum, amelyre  $|I_k| < \epsilon$ . Ekkor a közös-pont egyértelmű.

**Bizonyítás** Tegyük fel, hogy két ilyen közös pont van, azaz legyen  $x, y \in I_n \forall n$  esetén. Tudjuk, hogy  $x - y < |I_n|$ . Ezért mivel  $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$ , ezért  $x - y = 0$ , tehát  $x = y$ .

## 1.5 Halmazok korlátossága

Adott  $H \subset \mathbb{R}$  halmaz korlátos, ha  $\exists K \in \mathbb{R}$ , amelyre  $\forall x \in H$  esetén  $K \geq |x|$ .

## 1.6 Infimum és supremum, kétfajta definíció

### 1.6.1 Legnagyobb alsó korlát

Legyen  $H$  egy alulról korlátos, nem üres halmaz. Megmutatható, hogy az alsó korlátok között létezik legnagyobb. A halmaz legnagyobb alsó korlátját infimumnak nevezzük.

Más szóval az  $s \in \mathbb{R}$  szám a  $H$  infimuma, ha:

1.  $s < x, \forall x \in H$  esetén.
2. Ha  $s'$  egy tetszőleges alsó korlátja  $H$ -nak, akkor  $s' < s$ .

### 1.6.2 Legkisebb felső korlát

Legyen  $H$  egy felülről korlátos, nem üres halmaz. Megmutatható, hogy a felső korlátok között létezik legkisebb. A halmaz legkisebb felső korlátját supremumnak nevezzük.

Más szóval az  $s \in \mathbb{R}$  szám a  $H$  supremuma, ha:

1.  $s > x, \forall x \in H$  esetén.
2. Ha  $s'$  egy tetszőleges felső korlátja  $H$ -nak, akkor  $s' > s$ .

## 1.7 Létezés feltétele

Tetszőleges nem üres alulról korlátos halmaznak  $\exists$  infimuma.

**Bizonyítás** Legyen  $a_1$  egy alsó korlát. Ha  $a_1 \in H$ , akkor kész a bizonyítás. Tehát legyen  $a_1 \notin H$ , és legyen  $b_1 \in H$  tetszőleges halmazbeli elem. Legyen  $I_1 = [a_1; b_1]$  és definiáljuk a  $c_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$  számot.

Ha  $c_1$  alsó korlát, akkor legyen  $a_2 := c_1$  és  $b_2 := b_1$ . Ha  $c_1$  nem alsó korlát, akkor legyen  $a_2 := a_1$  és  $b_2 := c_1$ . Legyen továbbá  $I_2 = [a_2; b_2]$ .

Ezt a konstrukciót folytatva egy egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumrendszert kapunk, amelyre  $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$ , hiszen minden lépésben az intervallum hossza a felére csökken.

Tehát a Cantor-féle közös-pont tétel miatt létezik egy egyértelmű közös-pont. Ez a közös-pont kisebb vagy egyenlő, mint minden  $b_k$ , ezért alsó korlát, valamint nagyobb vagy egyenlő az összes  $a_k$  alsó korlát, tehát valóban létezik infimum.

## 2 Tétel

### 2.1 Topológiai alapfogalmak

#### 2.1.1 Környezet

Egy  $x_0$  valós szám környezetén az  $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon)$  nyílt intervallumot értjük, ahol  $\epsilon > 0$  tetszőleges.

#### 2.1.2 Belső pont

Az  $x_0 \in H$  pont a  $H$  halmaz belső pontja, ha  $\exists \epsilon > 0$ , hogy  $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon) \subseteq H$ .  
A belső pontok halmazát az  $\text{int}(H)$  jelöli.

#### 2.1.3 Külső pont

Az  $x_0 \in R$  pont a  $H$  halmaz külső pontja, ha  $\exists \epsilon > 0$ , amire  $(x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon) \cap H = \emptyset$ .  
A külső pontok halmazát az  $\text{ext}(H)$  jelöli.

#### 2.1.4 Határpont

Az  $x_0 \in R$  pont a  $H$  halmaz határpontja, ha se nem külső, se nem belső pontja.  
Tehát  $\forall \epsilon > 0 : (x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon)$  környezetében belső és külső pontok is vannak.  
A határpontok halmazát  $\delta(H)$  jelöli.

#### 2.1.5 Nyílt és zárt halmazok

A  $H$  halmaz **nyílt**, ha minden pontja belső pont.  
A  $H$  halmaz **zárt**, ha minden határpontját tartalmazza.

### 2.2 Háromszög egyenőtlenség, általános eset

Legyen  $a, b \in R$   $|a + b| \leq |a| + |b|$

**Bizonyítás**  $\pm a \leq |a|$  és  $\pm b \leq |b|$ .

Ebből következik, hogy  $\pm(a + b) \leq |a| + |b|$ , amiből  $|a + b| \leq |a| + |b|$

### 2.3 Bernoulli egyenlőtlenség

Tetszőleges  $n \in N$  és  $h \in R$  esetén,  $(1 + h)^n \geq 1 + hn$  teljesül.  
(Egyenlőség csak akkor teljesül, ha  $n=0$ , vagy  $n=1$ , vagy  $h=0$ )

### 2.4 Számtani és mértani közép, egyenlőtlenség

#### 2.4.1 Számtani és mértani közép

Tekintsünk  $n$  nemnegatív valós számot,  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ . Ezek számtani közepe:

$$A_n := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

Ezek mértani közepe:

$$G_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}$$

#### 2.4.2 Számtani és mértani közepek egyenlőtlensége

$$A_n \geq G_n$$

Egyenlőség csak akkor teljesül, ha  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Bizonyítás** Először egy gyengébb állítást bizonyítsunk.

Legyen  $n \geq 2 \in \mathbb{N}$ , és legyenek az  $x_k \geq 0 \in \mathbb{R}$  olyan számok, amelyek között van legalább kettő különböző és

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = 1.$$

Ekkor

$$\prod_{k=1}^n x_k < 1.$$

Alkalmazzuk a teljes indukciót!  $n = 2$  esetén az állítás triviális. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül valamilyen  $n$ -re. Kéne, hogy  $n + 1$ -re is teljesüljön.

Tekintsük az  $x_k$  számokat, ahol  $k = 1, 2, \dots, n + 1$  és legyen  $x_k := 1 + t_k$ . Legyen továbbá az  $x_k$  számok számtani közepe 1. Ez azt jelenti, hogy  $\sum_{k=1}^n t_k = 0$ , azaz van közöttük pozitív és negatív is, hiszen nem mind egyforma. Az átláthatóság sérülése nélkül feltehetjük, hogy  $t_n < 0 < t_{n+1}$ . Legyen ekkor  $x_n^* = 1 + t_n + t_{n+1} > 1 + t_n + t_{n+1} + t_n t_{n+1} = x_n x_{n+1}$ .

Ekkor azt látjuk, hogy

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n^* = \sum_{k=1}^{n-1} (1 + t_k) + 1 + t_n + t_{n+1} = n + \sum_{k=1}^{n+1} t_k = n$$

azaz az  $x_1, x_2, \dots, x_n^*$  számtani átlaga 1 és nem mind egyforma. Ekkor az indukciós feltevés miatt a szorzatuk valóban kisebb, mint 1.

Könnyen látható, hogyha az összes  $x_k$  szám egyenlő, akkor  $x_k = 1$ , így a szorzatuk is 1. Tehát megfogalmazhatjuk tetszőleges  $x_k \geq 0$  számokra ahol  $k = 1, 2, \dots, n$ , és ha

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = 1$$

teljesül, akkor

$$\prod_{k=1}^n x_k \leq 1.$$

Legyenek adottak az  $a_k$  számok, ahol  $k = 1, 2, \dots, n$ . Legyen továbbá

$$A = \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}$$

és legyenek  $x_k = \frac{a_k}{A}$ . Ekkor a számtani közepe 1, így

$$\prod_{k=1}^n x_k = \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{A^n} \leq 1$$

Azaz

$$\prod_{k=1}^n a_k \leq A^n$$

Amiből kapjuk a bizonyítandót.

## 2.5 Számsorozat, alaptulajdonságok

### 2.5.1 Számsorozat

A számsorozaton egy olyan hozzárendelést értünk, ahol minden  $n \in \mathbb{N}$ -hez hozzárendelünk egy valós számot. Az  $(a)$  sorozat  $n$ -edik elemét  $a_n$  jelöli, az egész sorozatot  $(a_n)$ -el jelöljük.

### 2.5.2 Sorozat korlátossága

Az  $(a_n)$  sorozat korlátos, ha  $\exists K \in \mathbb{R}$ , amire  $|a_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$  esetén.

### 2.5.3 Sorozat monotonitása

Az  $(a_n)$  sorozat **monoton növekvő**, ha  $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Az  $(a_n)$  sorozat **monoton csökkenő**, ha  $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ .

## 2.6 Határérték

Arra vagyunk kíváncsiak, hogy  $n$  növelésével, mi lesz  $a_n$ -el.

### 2.6.1 Határérték definíciója

Legyen  $(a_n)$  egy sorozat. Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat konvergens és határértéke az  $A$  szám, ha  $\forall \epsilon > 0$ -hoz  $\exists N = N(\epsilon)$  küszöbindex, melyre  $\forall n \geq N$  esetén  $|a_n - A| < \epsilon$ .

Jelölése:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

### 2.6.2 Határérték általános definíciója

Azt mondjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , ha  $A$ -nak  $\forall U$  környezetéhez megadható egy  $N = N(U)$  küszöbindex, melyre  $\forall n \geq N$  esetén  $a_n \in U$ .

## 2.7 Divergencia, típusai

Ha  $(a_n)$  nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.

### 2.7.1 Típusai

1. Az  $(a_n)$  sorozat a  $+\infty$ -be divergál, ha  $\forall K \in \mathbb{R}$  korláthoz  $\exists N = N(K)$  küszöbindex, hogy ha  $n \geq N$ , akkor  $a_n > K$ .  
Jele:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .
2. Hasonlóan, az  $(a_n)$  sorozat a  $-\infty$ -hez divergál, ha  $\forall k$ -hoz  $\exists N = N(k)$  küszöbindex, hogy ha  $n \geq N$ , akkor  $a_n < k$ .  
Jele  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .
3. Egy másik fajta divergencia, ha a sorozat elemei több pont körül torlórak.  
Például  $a_n = (-1)^n$ .

## 2.8 Konvergenca és korlátosság kapcsolata

Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

**Bizonyítás** Rögzítsünk egy  $\epsilon$ -t, és egy hozzátartozó  $n_0$  küszöbindexet. Legyen továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ . Ekkor az  $(a_n)$  sorozatnak az  $(A - \epsilon; A + \epsilon)$  intervallumon kívül véges sok eleme van, így ennek a véges sok elemnek létezik minimuma és maximuma, tehát létezik

$$m := \min\{a_n | n < n_0\} \quad M := \max\{a_n | n < n_0\}.$$

Ekkor felső korlátnak jó lesz  $\max(M, A + \epsilon)$ , alsó korlátnak pedig  $\min(m, A - \epsilon)$ .

### 3 Tétel

#### 3.1 Határérték tulajdonságai

Legyen adott két konvergens sorozat  $a_n$  és  $b_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$   $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ .  
Ekkor:

1. Tetszőleges  $c \in \mathbb{R}$  esetén  $(ca_n)$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = cA$ .
2.  $(a_n + b_n)$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$ .
3.  $(a_n b_n)$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|$
5. Tegyük fel, hogy  $A \neq 0$  és  $a_n \neq 0$ . Ekkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$
6. Az előző feltételekkel  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}$

#### 3.2 Cauchy-sorozat, konvergenciája

##### 3.2.1 Cauchy-sorozat

Azt mondjuk, ahogy  $(a_n)$  eleget tesz a Cauchy feltételnek, ha  $\forall \epsilon > 0$ -hoz  $\exists N = N(\epsilon)$  küszöbindex, melyre teljesül, hogy  $\forall n, m \geq N$  esetén  $|a_n - a_m| < \epsilon$ .  
Ezeket a sorozatokat Cauchy-sorozatoknak nevezzük.

##### 3.2.2 Cauchy-sorozat konvergenciája

$(a_n)$  konvergens  $\Leftrightarrow (a_n)$  Cauchy-sorozat.

#### Bizonyítás

1. Először azt bizonyítjuk, hogy ha  $(a_n)$  konvergens, akkor Cauchy-sorozat.  
Legyen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  és legyen  $\epsilon > 0$  tetszőleges. Ekkor az  $\frac{\epsilon}{2}$ -höz  $\exists N = N(\frac{\epsilon}{2})$  küszöbindex, melyre  $n, m \geq N$  esetén  $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}, |a_m - A| < \frac{\epsilon}{2}$ . Ekkor

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

2. Másodszor azt bizonyítsuk, hogy ha  $(a_n)$  Cauchy-sorozat, akkor konvergens.  
Először lássuk be, hogy a Cauchy-sorozat korlátos!  
Tudjuk, hogy valamilyen rögzített  $n_0$  küszöbindex után  $|a_n - a_m| < \epsilon$ , azaz  $a_n \in (a_m - \epsilon; a_m + \epsilon)$ .  
Ekkor ezen az intervallumon kívül csak véges sok eleme van a sorozatnak, tehát

$$K := \max\{|a_m| + \epsilon \cup \{|a_k| \mid k < n_0\}\}$$

jó korlát. Tehát az  $(a_n)$  Cauchy-sorozat korlátos, emiatt van konvergens részsorozata.

Legyen ez a részsorozat  $(a_{n_k})$  ahol  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$ .

Tudjuk, hogy valamilyen küszöbindex után  $|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$   $|a_{n_k} - A| < \frac{\epsilon}{2}$  teljesül.

Ekkor  $|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| = |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \epsilon$ .

#### 3.3 Rész-sorozat

Adott az  $(a_n)$  sorozat. Egy indexsorozatot úgy definiálunk, hogy  $\forall k \in \mathbb{N}$  számhoz hozzárendelünk egy  $n_k$ -val jelölt indexet, hogy  $n_1 < n_2 < \dots < n_k, \dots$  teljesüljön.

A részsorozat elemei  $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$  lesznek.

#### 3.4 Monoton részsorozat létezése

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

**Bizonyítás** A bizonyításhoz először definiáljuk a csúcspontot!

A sorozat egy  $a_n$  elemét csúcspontnak nevezzük, ha  $a_n \geq a_m, \forall m > n$ . Tehát a csúcspont nagyobb, vagy egyenlő, mint az utána következő összes elem.

Két eset létezik:

1. Ha végtelen csúcspont van, akkor legyenek ezek indexei  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ . Ekkor az  $(a_{n_k})$  részsorozat monoton fogyó.
2. Ha véges sok csúcs van, akkor legyen  $n$  az utolsó csúcs indexe, ha nincs csúcs, akkor  $n = 0$ . Definiáljuk  $n_1$ -t, mint  $n_1 := n + 1$ . Ekkor mivel  $a_{n_1}$  nem csúcs, ezért van nála nagyobb elem.  $a_{n_2} > a_{n_1}$ , ahol  $n_2 > n_1$ . Így tudunk növekvő részsorozatot konstruálni.

### 3.5 Nullsorozat, tulajdonságok

#### 3.5.1 Nullsorozat

Az  $(a_n)$  konvergens sorozatot nullsorozatnak nevezzük, ha határértéke 0, azaz  $\forall \epsilon > 0$ -hoz  $\exists N = N(\epsilon)$  küszöbindex, hogy  $\forall n \geq N$ -re  $|a_n| < \epsilon$ .

#### 3.5.2 Nullsorozat tulajdonságai

1.  $(a_n)$  konvergens és határértéke  $A \iff b_n = a_n - A$  nullsorozat.
2. Tegyük fel, hogy  $(a_n)$  nullsorozat, és  $(b_n)$  korlátos sorozat. Ekkor az  $(a_n b_n)$  is nullsorozat.
3. Tegyük fel, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , és legyen

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{a_n} & \text{ha } a_n > 0 \\ 0 & \text{ha } a_n \leq 0 \end{cases}$$

Ekkor  $(b_n)$  nullsorozat.

4.  $(a_n)$  pontosan akkor nullsorozat, ha  $(|a_n|)$  nullsorozat.
5. Legyen  $(a_n)$  nullsorozat, és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ . Ekkor  $(a_n b_n)$  határértéke lehet 0, konstans, vagy  $\pm \infty$ .

### 3.6 Torlódási pont, kapcsolat a határértékkel

#### 3.6.1 Torlódási pont

Adott  $(a_n)$  sorozatban  $t \in \mathbb{R}$  torlódási pont, ha  $\forall \epsilon > 0$ -ra a  $(t - \epsilon; t + \epsilon)$  intervallum végtelen sok elemét tartalmazza az  $(a_n)$  sorozatnak.

#### 3.6.2 Torlódási pont kapcsolata a határértékkel

Ha az  $(a_n)$  sorozat konvergens, akkor egyetlen torlódási pontja van.

### 3.7 Limsup és liminf

Ha a torlódási pontok halmaza felülről korlátos, akkor ennek a legkisebb felső korlátját limes suprumnak nevezzük.

Jelölése:  $\limsup(a_n)$ .

Hasonlóképpen ha a torlódási pontok halmaza alulról korlátos, akkor ennek a legnagyobb alvó korlátját limes infimumnak nevezzük.

Jelölése:  $\liminf(a_n)$ .

## 4 Tétel

### 4.1 Bolzano-Weierstrass tétel

Minden korlátos  $(a_n)$  sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

**Bizonyítás** Tudjuk, hogy minden sorozatnak van monoton részsorozata. Ha ez mégkorlátos is, akkor konvergens is.

### 4.2 Számtani-átlag-sorozat határértéke

Adott  $(a_n)$  nullsorozat. Legyen

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

Ekkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ .

**Bizonyítás** Legyen  $\epsilon > 0$

$$|A_n| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|$$

Az  $\frac{\epsilon}{2}$ -höz  $\exists N = N(\epsilon)$  küszöbindex, hogy ha  $n \geq N$ , akkor  $|a_n| < \frac{\epsilon}{2}$ . Ezekre az indexekre

$$|A_n| \leq \frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_N| + \dots + |a_n|}{n} \leq \frac{N}{n} K + \frac{\epsilon}{2} \frac{n - N}{n} < \frac{N}{n} K + \frac{\epsilon}{2}$$

ahol  $|a_n| \leq K$  korlát.

Ha  $n \geq \frac{2NK}{\epsilon} = N_1$ , akkor  $\frac{N}{n} K \leq \epsilon$ . Tehát, ha  $n \geq N_1$ , akkor  $|A_n| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

Ezzel az állítást beláttuk.

### 4.3 Az e szám értelmezése, kétféle előállítása

Az Euler-féle számot, az  $e$ -t úgy definiáljuk, hogy  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ , illetve  $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  (Taylor-sor).

### 4.4 Nevezetes sorozat határértékek

1.  $\alpha \in \mathbb{R}$   $a_n = n^\alpha$  esetén  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha =$

- (a)  $\infty$  ha  $\alpha > 0$
- (b)  $1$ , ha  $\alpha = 0$
- (c)  $0$ , ha  $\alpha < 0$

2.  $a_n = a^n$  sorozatnál:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n =$

- (a)  $\infty$ , ha  $a > 1$
- (b)  $1$ , ha  $a = 1$
- (c)  $0$ , ha  $|a| < 1$
- (d)  $\nexists$ , ha  $a \leq -1$

3.  $a_n = \sqrt[n]{a}$ ,  $a > 0$  sorozatra:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

4.  $a_n = \sqrt[n]{n}$  sorozat határértéke:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

### 4.5 Határérték monotonitása

Legyen  $a_n \leq b_n$  valamilyen küszöbindex után. Ekkor, ha léteznek a határértékek,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

#### 4.6 Rendőrelv sorozatokra

Legyen  $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  valamilyen küszöbindex után. Legyen továbbá  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ . Ekkor, ha léteznek a határértékek,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ .

**Bizonyítás** Legyen  $\epsilon > 0$  tetszőleges, valamint legyen  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ .

Ekkor  $\exists N_1$  küszöbindex, melyre  $n \geq N_1$  esetén  $|a_n - A| < \epsilon$ . Speciálisan  $a_n > A - \epsilon$ .

Hasolnóan  $\exists N_2$ , melyre  $|c_n - A| < \epsilon$ ,  $\forall n \geq N_2$ . Speciálisan  $c_n < A + \epsilon$ .

Ekkor  $n \geq \max(N_1, N_2)$  esetén:

$$A - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \epsilon$$

Ebből kapjuk a bizonyítandót.

## 5 Tétel

### 5.1 Végtelen sor

Sor alatt valós számok összegét értjük, ahol az összeadandók számavégletlen:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ . Formálisan, végtelen sor alatt, egy  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  alakú végtelen összeget értünk.

### 5.2 Végtelen sor konvergenciája, szükséges feltétel konvergenciára

A  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  végtelensor konvergens, ha részletösszegek sorozata,  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  konvergens.

Ekkor mondjuk azt, hogy a sor összege:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

Ha a részletösszegek sorozata  $(s_n)$  nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a végtelen sor divergens.

#### 5.2.1 Végtelen sorok szükséges feltétele konvergenciára

Ha  $(\sum a_n)$  konvergens, akkor  $(a_n)$  nullsorozat. Ez fordítva nem igaz.

### 5.3 Divergencia teszt

Ha  $(a_n)$  nem nullsorozat, akkor  $(\sum a_n)$  divergens.

**Bizonyítás** Mivel  $(\sum a_n)$  szükségesfeltétele, hogy  $(a_n)$  nullsorozat legyen, kapjuk is a bizonyítandót.

### 5.4 Végtelen mértani sor, konvergencia feltétele, sor összege

Legyen  $a_n = aq^{n-1}$ , ekkor  $(\sum a_n)$  mértani sor.

#### 5.4.1 Mértani sor összege

Adott  $a_n = aq^{n-1}$  mértani sor. Ekkor  $|q| < 1$  esetén

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-q}.$$

**Bizonyítás** Tudjuk, hogy  $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$ . Ekkor ha  $|q| < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

### 5.5 Koch görbe, kerülete és területe

A kiindulás egy szabályos háromszög. Minden lépésben:

1. Osszuk az oldalt 3 egyenlő részre
2. Minden középső szakaszra illesszünk egy szabályos háromszöget.

#### 5.5.1 Kerülete

Legyen  $a$  az kiindulási háromszög egy oldalánakhossza. Minden lépésben minden oldal az előttelező hossz  $\frac{4}{3}$ -a lesz, tehát a kerülete  $K = 3a \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{4}{3})^n = \infty$ .

#### 5.5.2 Területe

Legyen  $T$  az alap háromszög területe. Az első lépés után oldalanként 1 új háromszög lesz, aminek a területe az előzőterület  $\frac{1}{9}$ -e. A következő lépésben oldalanként 4 új háromszög jön létre, amiknek a területe az előzőháromszögek  $\frac{1}{9}$ -e. Tehát összeadva:

$$T_{\infty} = T + 3 \frac{T}{9} + 3 \frac{T}{81} + 3 \frac{T}{729} + \dots = T + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{9} \sum_{k=0}^n (\frac{4}{9})^k = T + \frac{T}{3} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{8T}{5}.$$

## 6 Tétel

### 6.1 Cauchy kritérium sorokra

A  $(\sum a_n)$  végtelen sor teljesíti Cauchy-kritériumot, ha  $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$  küszöbindex, melyre  $\forall n > m \geq N$  esetén

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \epsilon$$

### 6.2 Összehasonlító kritériumok végtelen sorokra

#### 6.2.1 Majoráns kritérium

Adott két sor, melyekre  $0 \leq b_n \leq a_n$  teljesüleg küszöbindex után. Tegyük fel, hogy  $(\sum a_n)$  konvergens. Ekkor  $(\sum b_n)$  is konvergens.

#### 6.2.2 Minoráns kritérium

Adott két sor, melyekre  $a_n \leq b_n$  egy küszöbindex után. Tegyük fel, hogy  $(\sum a_n)$  divergens. Ekkor  $(\sum b_n)$  is divergens.

### 6.3 Abszolút konvergens sor

Azt mondjuk, hogy  $(\sum a_n)$  abszolút konvergens, ha  $(\sum |a_n|)$  konvergens.

#### 6.3.1 Kapcsolata a konvergenciával

Ha  $(\sum a_n)$  abszolút konvergens, akkor konvergens is.

**Bizonyítás** Tegyük fel, hogy  $(\sum |a_n|)$  konvergens. Ekkor felírható a Cauchy-kritérium:

$$\left| \sum_{m+1}^n a_n \right| \leq \sum_{m+1}^n |a_n|.$$

Majorálva kijön a konvergencia.

### 6.4 Hányados kritérium, gyengített változat

1. Tegyük fel, hogy  $\exists q < 1$ , amire  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$  teljesül  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén. Ekkor abszolút konvergens.
2. Tegyük fel, hogy  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  teljesül. Ekkor a sor divergens.

**Bizonyítás**

1. Tudjuk, hogy  $q < 1$  és, hogy  $\left| \frac{a_2}{a_1} \right| \leq q$ ,  $\left| \frac{a_3}{a_2} \right| \leq q$ ,  $\dots \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ .  
Ezeket összeszorozva:  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_1} \right| \leq q^n \implies |a_{n+1}| \leq q^n |a_1|$ .  
Ez azt jelenti, hogy majorálni tudjuk egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sorral, ami nyilván konvergens.
2. A divergencia teszt miatt egyből kapjuk a bizonyítandót.

#### 6.4.1 Gyengített változat

Tegyük fel, hogy létezik a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A$  határérték. Ekkor, ha

1.  $A < 1$ , a sor abszolút konvergens.
2.  $A > 1$ , a sor divergens.
3.  $A = 1$ , a sor lehet konvergens és divergens is.

## 7 Tétel

## 8 Tétel

## 9 Tétel

## 10 Tétel

## 11 Tétel

## 12 Tétel

## 13 Tétel

## 14 Tétel

## 15 Tétel

## 16 Tétel

## 17 Tétel

## 18 Tétel

## 19 Tétel

## 20 Tétel

## 21 Tétel

## 22 Tétel

## 23 Tétel