

Analízis szigorlati tételsor

Vághy Mihály

Tartalomjegyzék

1. Tétel	6
1.1. Cantor-féle közöspont tétel	6
1.2. Teljes indukció	6
1.2.1. Példa teljes indukcióra	6
1.3. Számítási és mértani közép közti egyenlőtlenség	6
1.4. Háromszög egyenlőtlenség	6
1.5. Infimum	6
1.5.1. Tétel	7
1.6. Szuprémum	7
1.6.1. Tétel	7
1.7. Másodrendű Taylor formula	7
2. Tétel	8
2.1. Mértani sor	8
2.1.1. Mértani sor összege	8
2.2. Végtelen számsor összege	8
2.3. Divergencia-teszt	8
2.4. Hányadoskritérium (d'Alembert féle)	8
2.5. Gyökkritérium (Cauchy féle)	9
2.6. Abszolút konvergencia	9
2.7. Feltételes konvergencia	9
2.8. Leibniz-típusú sor	9
2.8.1. Tétel	9
2.9. Kétváltozós függvény felületének felszíne	10
3. Tétel	11
3.1. Függvény határértéke véges pontban	11
3.2. Egyoldali határérték	11
3.3. Átviteli elv	11
3.4. Határérték fogalom kiterjesztése	11
3.5. Weierstrass tétel	12
3.6. Heine-tétel	12
3.7. Kétváltozós függvény határértéke	12
3.8. Folytonosság pontban	12
4. Tétel	13
4.1. Differenciálási szabályok	13
4.2. Monoton függvények jellemzése	13
4.3. L'Hospital-szabály	14
4.4. Lányszabály	14
5. Tétel	16
5.1. Integrálszámítás első alaptétele	16
5.2. Középérték tételek	16
5.3. Taylor-polinom	16
5.3.1. Tulajdonságai	16
5.4. Lagrange-féle maradéktag	17
5.4.1. Tétel	17
5.5. Lagrange-féle középértéktétel	17

6. Tétel	18
6.1. Newton-Leibniz-formula	18
6.2. Riemann-integrál	18
6.3. Riemann-integrál tulajdonságai	18
6.4. Elégséges feltételek integrálhatóságra	19
6.4.1. Tétel	19
6.4.2. Tétel	19
6.4.3. Tétel	19
6.5. Primitív függvény	19
6.6. Vonalintegrál	19
6.6.1. Vonalintegrál tulajdonságai	20
6.6.2. Vonalintegrál kiszámítása	20
6.7. Cauchy féle alaptétel analitikus függvény integráljáról	20
7. Tétel	21
7.1. Parciális integrálás	21
7.1.1. Parciális integrálás alapesetei	21
7.2. Hatványfüggvény integrálja a $(0, 1]$ intervallumon	21
7.3. Feltételes szélsőérték feladat megfogalmazása	21
7.4. Lagrange-féle multiplikátor szabály	22
8. Tétel	23
8.1. Folytonosság pontban	23
8.2. Sorozatfolytonosság pontban	23
8.3. Szakadási helyek	23
8.4. Homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása	23
8.5. Inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása	23
8.6. IDE megoldásai	24
8.6.1. Állandók variálása	24
9. Tétel	26
9.1. Az e szám	26
9.1.1. Sorozat határértéke	26
9.1.2. Sor összege	26
9.2. Hatványsor	26
9.3. Konvergencia-tartomány	26
9.4. Konvergenciasugár	26
9.4.1. Konvergenciasugár meghatározása	26
9.5. Taylor sor	27
9.6. Elemi függvények Taylor sora	27
9.6.1. e^x	27
9.6.2. $\sin x$	27
9.6.3. $\cos x$	27
10. Tétel	28
10.1. Fourier transzformáció	28
10.2. Hatványfüggvény integrálja az $[1, \infty)$ intervallumon	28
10.3. Valós függvény gráfjának hossza	28
10.4. Fourier transzformáció alaptulajdonságai	28
10.5. Inverz Fourier transzformáció	30
10.6. Parseval egyenlőség	30

11. Tétel	31
11.1. Polárkoordináták	31
11.2. Egyváltozós valós függvény esetén lokális szélsőérték szükséges feltétele	31
11.3. Egyváltozós valós függvény esetén lokális szélsőérték elégséges feltétele	31
11.4. Szükséges feltétel szélsőértékre többváltozós függvényre	31
11.5. Stacionárius pont	31
11.6. Nyeregpon	32
11.7. Elégséges feltétel szélsőértékre kétváltozós függvények esetén I.	32
11.8. Elégséges feltétel szélsőértékre kétváltozós függvények esetén II.	32
12. Tétel	33
12.1. Parciális deriváltak kétváltozós függvényre	33
12.2. Bolzano tétel egyváltozós függvényekre	33
12.3. Bolzano tétel kétváltozós függvényekre	33
12.3.1. Parciális derivált geometriai jelentése	33
12.4. Magasabb rendű parciális deriváltak	33
12.4.1. Másodrendű parciális deriváltak	33
12.4.2. n -edrendű parciális deriváltak	34
12.5. Parciális deriváltak sorrendje	34
12.6. Érintő sík	34
12.7. Iránymenti derivált	34
12.7.1. Tétel	34
13. Tétel	36
13.1. Helyettesítés integrálban egyváltozós függvényekre	36
13.2. Konkáv és konvex függvények, ezek jellemzése	36
13.2.1. Tétel	36
13.3. Függvényrendszer	36
13.4. Jacobi mátrix	36
13.5. Függvényrendszer invertálhatósága	36
13.6. Kettős integrálban helyettesítés polárkoordinátákkal	36
13.7. Hengerkoordináták, és a koordináta-transzformáció Jacobi determinánsa	37
14. Tétel	38
14.1. Integrálfüggvény	38
14.2. Integrálszámítás második alaptétele	38
14.3. Integrál középértéktétel	38
14.4. Kétváltozós függvény integrálása téglalapon	38
14.5. Síkbeli normáltartomány	39
14.6. Kettős integrál normáltartományon	39
14.7. Helyettesítés integrálban általános koordináta-transzformációval	39
15. Tétel	40
15.1. Rendőrlv	40
15.2. Bolzano-Weierstrass tétel számsorozatokra	40
15.2.1. Csúcselem	40
15.2.2. Lemma	40
15.3. Számsorozat torlódási pontja	40
15.4. Kétváltozós valós értékű függvény integrálja vonal mentén	40
15.5. Vektormező vonalintegrálja vonal mentén	41
15.6. Potenciálos vektormező	41
15.6.1. Tétel	41
15.7. Potenciálkeresés	41
15.7.1. Potenciál létezésének szükséges és elégséges feltétele	41

16. Tétel	42
16.1. Differenciálhányados	42
16.2. Derivált geometriai és fizikai jelentés	42
16.3. Folytonosság és deriválhatóság kapcsolata	42
16.4. Teljes deriválhatóság	42
16.5. Kapcsolat a parciális deriváltakkal	43
16.6. Komplex függvény deriválhatósága	43
16.7. Cauchy-Riemann egyenletek	43
17. Tétel	45
17.1. Számsorozat határértéke	45
17.2. Divergens sorozat	45
17.2.1. Típusai	45
17.3. Cauchy kritérium	45
17.3.1. Tétel	45
17.4. Cauchy-féle integrálformula analitikus függvényekre	46
17.5. Taylor sorfejtés komplex analitikus függvényre	46
17.6. Laurent sorfejtés	46
18. Tétel	47
18.1. Gömbi polárkoordináták	47
18.2. Elsőrendű szeparábilis DE megoldása	47
18.3. Gömbi polárkoordináta-transzformáció Jacobi determinánsa	47
18.4. Magasabb rendű homogén lineáris DE megoldásai	47
18.5. Állandó együttható HLDE alapegyenletei, karakterisztikus polinom	48
18.5.1. Első eset	48
18.5.2. Második eset	48
18.5.3. Harmadik eset	48
18.5.4. Negyedik eset	49
19. Tétel	50
19.1. Fourier sor	50
19.2. Számtani átlag sorozat	50
19.2.1. Tétel	50
19.2.2. Tétel	50
19.3. Trigonometrikus függvényrendszer	51
19.3.1. Tétel	51
19.4. Fourier sor komplex alakja	52
19.5. Komplex függvény kanonikus alakja	52
19.6. Exponenciális függvény	52
19.7. Logaritmus függvény	52

1. Tétel

1.1. Cantor-féle közöspont tétel

Adottak az $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots \subset \mathbb{R}$ egymásba skatulyázott, zárt intervallumok, melyekre

$$I_{n+1} \subset I_n.$$

Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$, akkor $\exists! x \in \mathbb{R}$ amire $x \in I_n \forall n$ esetén.

1.2. Teljes indukció

Adottak az $A_1, \dots, A_n, \dots$ állítások. A bizonyítási elv:

1. Belátjuk, hogy A_1 teljesül.
2. Belátjuk, hogy ha A_n teljesül valamilyen $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor A_{n+1} is.

Ezzel bebizonyítottuk az A_n állításokat.

1.2.1. Példa teljes indukcióra

Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (ez az A_n állítás).

1. $n = 1$ esetén $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ (tehát A_1 teljesül).
2. Tegyük fel, hogy valamilyen n -re teljesül az állítás. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = n+1 + \sum_{k=1}^n k = n+1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

(Tehát ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is.)

Ezzel beláttuk az állítást, az indukciós eljárást befejeztük.

1.3. Számítási és mértani közép közti egyenlőtlenség

Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0 \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Egyenlőség, ha $\forall i, j \quad a_i = a_j$.

1.4. Háromszög egyenlőtlenség

Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Egyenlőség, ha $\forall i, j \quad a_i = a_j$.

1.5. Infimum

Adott H alulról korlátos halmaz. Ekkor a legnagyobb alsó korlát a halmaz infimuma, $\inf(H)$

1.5.1. Tétel

Adott H alulról korlátos halmaznak létezik infimuma.

Bizonyítás

Legyen a_1 az alsó korlát. Ha $a_1 \in H$ akkor kész vagyunk. Tehát legyen $a_1 \notin H$, és legyen $b_1 \in H$ egy tetszőleges elem, ahol $b_1 > a_1$. Legyen $I_1 = [a_1, b_1]$ és definiáljuk a $c_1 := \frac{a_1+b_1}{2}$ számot.

Ha c_1 alsó korlát, akkor legyen $a_2 := c_1$ és $b_2 := b_1$. Ha c_1 nem alsó korlát, akkor legyen $a_2 := a_1$ és $b_2 := c_1$. Legyen továbbá $I_2 = [a_2, b_2]$.

Ezt a lépést a végtelenségig ismételve egy egymásba skatulyázott, zárt intervallumrendszert kapunk, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$, hiszen minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Tehát a Cantor-féle közöspont tétel miatt létezik egy darab közös pont. Ez a közös pont kisebb vagy egyenlő, mint a b_k számok, tehát biztosan alsó korlát. Továbbá nagyobb vagy egyenlő az összes a_k számnál, így nincs nála nagyobb alsó korlát. Tehát valóban létezik infimum.

1.6. Szuprémum

Adott H felülről korlátos halmaz. Ekkor a legkisebb felső korlát a halmaz szuprémuma, $\sup(H)$.

1.6.1. Tétel

Adott H felülről korlátos halmaznak létezik szuprémuma.

Bizonyítás

Az infimum analógiájára.

1.7. Másodrendű Taylor formula

Tegyük fel, hogy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ kétszer differenciálható $(x_0, y_0) \in \text{int}D$ -ben. Ekkor

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) + L_2$$

ahol L_2 a Lagrange-féle maradéktag.

Bizonyítás

Legyen $F : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ függvény és

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y \\ F''(t) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2. \end{aligned}$$

Felírva F -re a másodrendű Taylor formulát

$$F(1) - F(0) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) + L_2$$

azonban $F(1) - F(0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Ezzel kapjuk is a bizonyítandót.

2. Tétel

2.1. Mértani sor

Legyen $a_n = aq^{n-1}$, ekkor $(\sum a_n)$ egy mértani sor.

2.1.1. Mértani sor összege

Adott $a_n = aq^{n-1}$ mértani sor. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \nexists, & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

2.2. Végtelen számsor összege

Adott egy (a_n) sorozat, ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

egy végtelen sor.

2.3. Divergencia-teszt

Ha (a_n) nem nullsorozat, akkor $(\sum a_n)$ divergens.

2.4. Hányadoskritérium (d'Alembert féle)

1. Tegyük fel, hogy $\exists q < 1$, amire

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$

teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a sor abszolút konvergens.

2. Tegyük fel, hogy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$$

teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a sor divergens.

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right| \leq q \quad \left| \frac{a_3}{a_2} \right| \leq q \quad \dots \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q.$$

Ezeket összeszorozva kapjuk, hogy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_1} \right| \leq q^n \implies |a_{n+1}| \leq q^n |a_1|.$$

Ez azt jelenti, hogy a sort majorálhatjuk egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sorral, ami nyilván konvergens.

2. A divergencia-teszt miatt egyből kapjuk a bizonyítandót.

2.5. Gyökkritérium (Cauchy féle)

1. Tegyük fel, hogy $\exists 0 < q < 1 \in \mathbb{R}$, melyre $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor a $(\sum a_n)$ sor abszolút konvergens.
2. Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$. Ekkor a $(\sum a_n)$ sor divergens.

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy

$$|a_n| \leq q^n < 1$$

azaz a sort majorálhatjuk egy 1-nél kisebb kvóciensű mértani sorral, ami nyilván konvergens.

2. A divergencia-teszt miatt egyből kapjuk a bizonyítandót.

2.6. Abszolút konvergencia

Azt mondjuk, hogy a $(\sum a_n)$ sor abszolút konvergens, ha $(\sum |a_n|)$ konvergens.

2.7. Feltételes konvergencia

Azt mondjuk, hogy a $(\sum a_n)$ feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

2.8. Leibniz-típusú sor

Azt mondjuk, hogy $(\sum a_n)$ Leibniz-típusú sor, ha az (a_n) sorozatra

1. oszcilláló sorozat, azaz $a_n \cdot a_{n+1} < 0$ teljesül $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén
2. $(|a_n|)$ monoton fogyó
3. (a_n) nullsorozat.

2.8.1. Tétel

A Leibniz-típusú sorok konvergenssek.

Bizonyítás

Legyen $a_1 > 0$. Ekkor a páratlan indexű tagok pozitívak, a páros indexű tagok pedig negatívak. Legyen továbbá

$$\alpha_k := \sum_{i=1}^{2k} a_i$$

$$\beta_k := \sum_{i=1}^{2k-1} a_i$$

$$I_k := [\alpha_k, \beta_k].$$

Ekkor az I_k intervallumsorozat teljesíti a Cantor-féle közspont tétel feltételeit, így létezik egy közös pont, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2.9. Kétváltozós függvény felületének felszíne

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, ahol $R \subset \mathbb{R}^2$. A felület

$$S = \left\{ (x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R \right\}.$$

A felszínt síkdarabkákval közelítjük (egyváltozós függvényvel analóg módon, ahol hűrokkal közelítettűnk). A keresett felszín

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 (x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 (x, y)} \, d(x, y).$$

3. Tétel

3.1. Függvény határértéke véges pontban

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy x_0 olyan $U_{x_0} = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezete, amire

$$U_{x_0} \setminus \{x_0\} \subset D$$

teljesül. Ekkor $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall x \in D$, $0 < |x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

teljesül.

3.2. Egyoldali határérték

Adott az $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és tegyük fel, hogy $\exists U_{x_0} = (x_0 - r, x_0) \subset D$ ($\exists U_{x_0} = (x_0, x_0 + r) \subset D$). Ekkor f baloldali (jobboldali) határértéke az x_0 pontban α , azaz

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \alpha \right)$$

ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ($\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$) esetén

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

teljesül.

3.3. Átviteli elv

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ($x_n \neq x_0$) esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n > x_0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall (x_n) \subset D$ sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n < x_0$ esetén

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

3.4. Határérték fogalom kiterjesztése

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény.

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \alpha$ ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists K \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > K \in D$ ($\forall x < K \in D$) esetén $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ teljesül.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} = \pm\infty$, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists \delta > 0$, melyre $\forall 0 < |x - x_0| < \delta$ esetén $f(x) > K$ ($f(x) < K$) teljesül.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez $\exists L \in \mathbb{R}$, melyre $\forall x > L \in D$ esetén $f(x) > K$ ($f(x) < K$).

3.5. Weierstrass tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor R_f korlátos és zárt.

Bizonyítás

Tegyünk fel, hogy f felülről nem korlátos. Ekkor $\forall n$ -hez $\exists x_n \in [a, b]$, melyre $f(x_n) > n$. Ez az (x_n) sorozat korlátos, hiszen $a \leq x_n \leq b$, így a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata, melyre

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$$

ahol $\xi \in [a, b]$. Mivel a függvény folytonos, sorozatfolytonos is, tehát

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Azonban ez ellentmondás, hiszen $f(x_{n_k}) > n_k$. Tehát valóban korlátos.

Legyen $\beta = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Ekkor nyilván $\forall n$ -hez $\exists x_n \in [a, b]$, melyre

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta$$

azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \beta.$$

Azonban a Bolzano-Weierstrass tétel miatt $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozat, amelyre

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$$

ahol $\xi \in [a, b]$. Azonban a sorozatfolytonosság miatt

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

Tehát $\beta = f(\xi)$, azaz $\beta = \max \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$.

3.6. Heine-tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.

3.7. Kétváltozós függvény határértéke

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ függvény, és legyen $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ torlódási pont D_f -ben. Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $(x, y) \in S$, $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ esetén $|f(x, y) - L| < \varepsilon$.

3.8. Folytonosság pontban

Adott f kétváltozós függvény és $(x_0, y_0) \in D_f$. Ekkor f folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta > 0$, melyre $\forall (x, y) \in D_f$, $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ esetén $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

4. Tétel

4.1. Differenciálási szabályok

Legyenek f és g differenciálható függvények.

1. Hányados deriváltja
Legyen $g(x) \neq 0$.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

2. Kompozíció deriváltja
Legyen f differenciálható $g(x)$ -ben.

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

3. Inverz deriváltja
Legyen f szigorúan monoton, és legyen $f'(x) \neq 0$.

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

4. Szorzat deriváltja

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy

$$\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

illetve

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Ezekből azonnal következik a bizonyítandó.

- 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0))g'(x_0) \end{aligned}$$

- 3.

$$(f(f^{-1}(x)))' = f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))' = 1 \implies (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

4.2. Monoton függvények jellemzése

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény.

1. f monoton növekvő akkor és csak akkor, ha $f'(x) \geq 0$ teljesül $\forall x \in D$ esetén.
2. f monoton fogyó akkor és csak akkor, ha $f'(x) \leq 0$ teljesül $\forall x \in D$ esetén.

4.3. L'Hospital-szabály

Adott $g, f : I \mapsto \mathbb{R}$ differenciálhatóak az $x_0 \in \text{int}(I)$ pont egy U_{x_0} környezetében. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (\text{vagy } \pm \infty).$$

Ekkor ha létezik a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

határérték, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás

Legyen $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

A Cauchy-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi$ x és x_0 között, amire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Így valóban

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

4.4. Láncszabály

1. Kétváltozós belső függvény, egyváltozós külső függvény.

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és

$$F(x, y) = f(\varphi(x, y)).$$

Tegyük fel, hogy φ differenciálható (x, y) -ban, illetve f differenciálható $\varphi(x, y)$ -ban. Ekkor F is differenciálható, és

$$\nabla F(x, y) = \left(f'(\varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), f'(\varphi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right) = f'(\varphi(x, y)) \nabla \varphi(x, y).$$

2. Két darab egyváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.

Legyen $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi, \psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, és

$$F(t) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Tegyük fel, hogy φ, ψ differenciálhatók t -ben, illetve f differenciálható $(\varphi(t), \psi(t))$ -ben. Ekkor F is differenciálható, és

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t).$$

3. Két darab kétváltozós belső függvény, kétváltozós külső függvény.

Legyen $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, illetve $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Ekkor $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, és

$$F(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)).$$

Tegyük fel, hogy φ, ψ differenciálhatók (x, y) -ban, illetve f differenciálható $(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ -ban. Ekkor F is differenciálható, és

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y)$$

azaz

$$\nabla F(x, y) = \nabla f(u, v) \begin{pmatrix} \nabla \varphi(x, y) \\ \nabla \psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

5. Tétel

5.1. Integrálszámítás első alaptétele

Adottak $g, f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvények, melyekre $f'(x) = g'(x) \forall x \in (a, b)$ esetén. Ekkor

$$f(x) = g(x) + c.$$

5.2. Középérték tételek

1. Rolle-tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b) -n differenciálható függvény, ahol $f(a) = f(b)$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire

$$f'(\xi) = 0.$$

2. Lagrange-féle középérték-tétel

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b) -n differenciálható függvény. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás

Legyen

$$h(x) := \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a).$$

Ekkor $h(a) = f(a)$ és $h(b) = f(b)$. Emiatt a

$$g(x) := f(x) - h(x)$$

függvényhez a Rolle-tétel miatt $\exists \xi \in (a, b)$, amire

$$g'(\xi) = f'(\xi) - h'(\xi) = 0 \implies f'(\xi) = h'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3. Cauchy-féle középérték-tétel

Legyen $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos, (a, b) -n differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy $g(a) \neq g(b)$ és $g'(x) \neq 0$. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$ amire

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

5.3. Taylor-polinom

Tegyük fel, hogy az f függvény n -szer differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban. Ekkor

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

az f függvény x_0 -hoz tartozó n -edik Taylor-polinomja.

5.3.1. Tulajdonságai

Pontosan egy olyan $P_n(x)$ polinom létezik, amire

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

ha $k \leq n$ és

$$P_n^{(n+1)}(x_0) = 0$$

ez a polinom pedig $T_n(x)$.

Bizonyítás

Könnyen látható, hogy

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0).$$

Az egyértelműség azonnal következik abból, hogyha két azonos fokszámú polinom minden deriváltja megegyezik, akkor az együtthatóik páronként megegyeznek, így a két polinom azonos.

5.4. Lagrange-féle maradéktag

Az $L_n(x) := f(x) - T_n(x)$ a Lagrange-féle maradéktag.

5.4.1. Tétel

Legyen f $(n+1)$ -szer differenciálható x_0 egy U_{x_0} környezetében. Ekkor $\forall x \in U_{x_0}$ -hoz $\exists \xi$ x és x_0 között, amire

$$L_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

5.5. Lagrange-féle középértéktétel

Adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in \text{int}D$, és U egy olyan környezete, ahol f differenciálható és $U \subset D$. Ekkor $\forall (x, y) \in U$ -hoz $\exists \theta \in (0, 1)$, melyre

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

ahol $\Delta x = x - x_0$, illetve $\Delta y = y - y_0$.

Bizonyítás

Legyen

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$$

ahol $F : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor $F(0) = f(x_0, y_0)$ és $F(1) = f(x, y)$. A Lagrange-féle középértéktétel miatt $\exists \theta \in (0, 1)$, melyre

$$F'(\theta) = F(1) - F(0).$$

Továbbá a láncszabály miatt

$$F'(t) = \nabla f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy θ -ra

$$F'(\theta) = F(1) - F(0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Éppen ezt kellett bizonyítanunk.

6. Tétel

6.1. Newton-Leibniz-formula

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen f egy primitív függvénye F . Ekkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b = F(x) \Big|_a^b.$$

Bizonyítás

Legyen $\mathcal{F}_n$ egy felosztása $[a, b]$ -nek. Ekkor f primitív függvényének megszorítása a részintervallumokon $F : [x_{k-1}, x_k] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor a Lagrange-féle középérték-tétel miatt $\exists \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, melyre

$$F'(\xi_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f(\xi_k).$$

Ekkor írjuk fel azt a Riemann-összeget, melyben ezeket a ξ_k számokat választjuk ki. Ekkor

$$\sigma(\mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(b) - F(a).$$

Világos, hogy ekkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = F(b) - F(a).$$

6.2. Riemann-integrál

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény. Azt mondjuk, hogy f Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, ha

$$\sup \{s(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathbb{F}\} = \inf \{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sup \{s(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathbb{F}\} = \inf \{S(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}.$$

6.3. Riemann-integrál tulajdonságai

1.

$$\int_b^a f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

2.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx + \beta \int_a^b g(x) \, dx$$

3.

$$\int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx$$

4.

$$\begin{aligned} f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b] &\implies \int_a^b f(x) \, dx \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] &\implies \int_a^b f(x) \, dx \geq 0 \end{aligned}$$

5.

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \implies \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$$

6.

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

6.4. Elégséges feltételek integrálhatóságra

6.4.1. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos és monoton függvény integrálható.

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f monoton növekvő. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \delta(\mathcal{F}) = (f(b) - f(a)) \delta(\mathcal{F}).$$

Ekkor $\delta(\mathcal{F}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ esetén $o(\mathcal{F}) < \varepsilon$.

6.4.2. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény integrálható.

Bizonyítás

A Heine-tétel miatt a függvény egyenletesen is folytonos. Ekkor $\forall \frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ esetén $\exists \delta$, melyre $\forall |x_k - x_{k-1}| < \delta$ esetén $|f(x_k) - f(x_{k-1})| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Ekkor

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

6.4.3. Tétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos, és véges sok szakadási helytől eltekintve folytonos függvény integrálható.

Bizonyítás

Legyen szakadási pont $x^* \in [a, b]$. Legyen továbbá

$$[a, b] = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [a, x^* - \delta] \cup (x^* - \delta, x^* + \delta) \cup [x^* + \delta, b].$$

Ekkor f folytonos az I_1 és I_3 intervallumokon, azaz $\exists \mathcal{F}_1$ felosztás, melyre $o(\mathcal{F}_1) < \frac{\varepsilon}{3}$, illetve $\exists \mathcal{F}_3$, melyre $o(\mathcal{F}_3) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor az I_2 intervallumon egy $\mathcal{F}_2$ felosztásra

$$o(\mathcal{F}_2) = (M - m)2\delta \leq 4K\delta$$

ahol $M := \sup \{f(x) | x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)\}$, $m := \inf \{f(x) | x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)\}$, és $|f(x)| \leq K$. Ekkor $\delta < \frac{\varepsilon}{12K}$ esetén $o(\mathcal{F}_2) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor

$$o(\mathcal{F}) = o(\mathcal{F}_1) + o(\mathcal{F}_2) + o(\mathcal{F}_3) < \varepsilon.$$

6.5. Primitív függvény

Adott egy $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$. Ekkor az $F : I \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény az f primitív függvénye, ha $\forall x \in I$ esetén

$$F'(x) = f(x)$$

teljesül.

6.6. Vonalintegrál

Legyen az L görbe egy felosztása $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, illetve legyen a k -adik ív tetszőleges pontja ξ_k . Ekkor

$$\int_L f(z) dz = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta_n \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (z(t_k) - z(t_{k-1}))$$

ahol δ_n a leghosszabb ív hossza. Ha a görbe zárt, akkor az $\oint_L$ jelölést használjuk.

6.6.1. Vonalintegrál tulajdonságai

1. Linearitás

$$\int_L (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_L f dz + \beta \int_L g dz$$

2.

$$\int_{-L} f dz = - \int_L f dz$$

3. Ha $L = L_1 + L_2$, ahol $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, akkor

$$\int_L f dz = \int_{L_1} f dz + \int_{L_2} f dz.$$

4. Ha f folytonos, akkor létezik $\int_L f dz$.5. Ha f korlátos és $|f(z)| \leq M \forall z \in L$ esetén, akkor

$$\left| \int_L f dz \right| \leq Ms(L).$$

6.6.2. Vonalintegrál kiszámításaLegyen az L görbe paraméteres megadása

$$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t) + iy(t)) (x'(t) + iy'(t)) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(r(t)e^{i\theta(t)}) (r'(t)e^{i\theta(t)} + ir(t)e^{i\theta(t)}\theta'(t)) dt. \end{aligned}$$

6.7. Cauchy féle alaptétel analitikus függvény integráljáról

Tegyük fel, hogy $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $L \subset D$ egy sima, zárt görbe. Ekkor ha az $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ függvény analitikus, akkor

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

7. Tétel

7.1. Parciális integrálás

Adottak $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ekkor

$$\int f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, dx$$

$$\int_a^b f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx.$$

7.1.1. Parciális integrálás alapesetei

1.

$$\int \text{polinom} \cdot e^x \, dx$$

Ekkor legyen $f'(x) = e^x$ és $g(x) = \text{polinom}$.

2.

$$\int \text{polinom} \cdot \begin{cases} \sin x \\ \cos x \\ \text{sh } x \\ \text{ch } x \end{cases} \, dx$$

Ekkor legyen $f'(x)$ a trigonometrikus függvény és $g(x)$ a polinom.

3.

$$\int e^x \cdot \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases} \, dx$$

Ekkor legyen $f'(x)$ és $g(x) = \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases}$.

7.2. Hatványfüggvény integrálja a $(0, 1]$ intervallumon

Tudjuk, hogy a hatványfüggvény primitív függvénye

$$\int \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \begin{cases} \ln |x|, & \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

1. $\alpha = 1$ esetén

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \ln |x| \Big|_0^1 = \infty.$$

2. $\alpha \neq 1$ esetén

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_0^1 = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & 1-\alpha > 0 \\ \infty, & 1-\alpha < 0. \end{cases}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

7.3. Feltételes szélsőérték feladat megfogalmazása

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós differenciálható függvény és $\varphi(x, y) = 0$ feltétel. A feladat, hogy megkeressük a

$$\min_{\varphi(x,y)=0} f(x, y) \quad \max_{\varphi(x,y)=0} f(x, y)$$

szélsőérték helyeket és szélsőértékeket.

7.4. Lagrange-féle multiplikátor szabály

Adott f kétváltozós, differenciálható függvény, melynek tekintsük a megszorítását az $\{(x, y) \mid \varphi(x, y) = 0\}$ halmazon. Legyen $F: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \varphi(x, y).$$

Ekkor ha (x_0, y_0) -ban feltételes szélsőértéke van f -nek a $\varphi(x, y) = 0$ feltétel mellett, akkor $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$, melyre

$$\nabla F(x_0, y_0, \lambda_0) = 0.$$

8. Tétel

8.1. Folytonosság pontban

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $\forall |x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

8.2. Sorozatfolytonosság pontban

Adott $f : X \mapsto \mathbb{R}$ folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\forall (x_n) \subset X$ sorozatra, melyre $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

teljesül.

8.3. Szakadási helyek

1. Az f függvénynek elsőfajú szakadása van x_0 -ban, ha léteznek a

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) < \infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) < \infty$$

határértékek. Ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$$

akkor megszüntethető a szakadás.

2. Az f függvénynek másodfajú szakadása van x_0 -ban, ha nem elsőfajú a szakadás.

8.4. Homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

Legyen

$$y' = a(x)y$$

és legyen

$$A(x) = \int a(x) dx.$$

Ekkor

$$y(x) = ce^{A(x)}$$

valamilyen $c \in \mathbb{R}$ konstanssal.

Bizonyítás

Vegyük észre, hogy az $y' = a(x)y$ egy szeparábilis differenciálegyenlet így

$$\frac{y'}{y} = a(x) \implies \int \frac{y'}{y} dx = \ln |y| = \int a(x) dx = A(x) + c.$$

Ebből azonnal kapjuk, hogy

$$|y| = e^{A(x)+c} \implies y = ce^{A(x)}$$

ahol c előjele tetszőleges, ezért elhagyható az abszolútértékjel.

8.5. Inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

Legyen

$$y' = a(x)y + b(x)$$

és legyen

$$A(x) = \int a(x) dx.$$

Ekkor

$$y(x) = ce^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)} dx.$$

8.6. IDE megoldásai

Adott $L[y] = f(x)$ IDE. Ha y_1, y_2 megoldások, akkor $y = y_1 - y_2$ megoldása az $L[y] = 0$ HDE-nek. Ha y_1 megoldása a HDE-nek és y_2 megoldása az IDE-nek, akkor $y = y_1 + y_2$ megoldása az IDE-nek.

8.6.1. Állandók variálása

Adott

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x).$$

Legyenek az $L[y] = 0$ homogén differenciálegyenlet alapmegoldásai az $y_1, y_2, \dots, y_n$ függvények. Ekkor a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k(x) y_k(x)$$

ahol

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \int W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}^T dx \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}.$$

ahol W a Wronski mátrix. Ekkor az általános megoldás

$$y(x) = y_p(x) + \sum_{k=1}^n c_k y_k(x).$$

Bizonyítás

Állítsuk az γ_k, y_k függvényekre a következő feltételeket

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \gamma'_k y'_k &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k^{(n-1)} &= f \end{aligned}$$

azaz

$$W \begin{pmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \vdots \\ \gamma'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}.$$

Ekkor $y_p = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k$ esetén

$$y'_p = \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k + \sum_{k=1}^n \gamma_k y'_k = \sum_{k=1}^n \gamma_k y'_k.$$

Hasonlóan

$$y_p^{(m)} = \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k^{(m-1)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(m)} = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(m)}$$

illetve

$$y_p^{(n)} = \sum_{k=1}^n \gamma'_k y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)} = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k^{(n)}.$$

Ebből

$$L[y_p] = f + \sum_{k=1}^n \gamma_k L[y_k] = f.$$

Tehát $y_p = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_k$ valóban megoldása az IDE-nek. Mivel $W \neq 0$, így a feltételekből azonnal következik, hogy

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \int W^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}^T d \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}.$$

9. Tétel

9.1. Az e szám

9.1.1. Sorozat határértéke

Az e szám az alábbi sorozat határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

9.1.2. Sor összege

Az e szám az alábbi sor összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

9.2. Hatványsor

Hatványsoron egy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

sorot értünk, ahol x_0 rögzített valós szám.

9.3. Konvergencia-tartomány

Adott

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

hatványsor. Ennek konvergencia-tartománya

$$\mathcal{H} = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n < \infty \right. \right\}.$$

9.4. Konvergenciasugár

Adott hatványsor konvergenciasugara

$$\rho := \sup \{ |x - x_0| \mid x \in \mathcal{H} \}.$$

Ha $\mathcal{H} = \{x_0\}$, akkor $\rho := 0$.

Ha $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, akkor $\rho := \infty$.

9.4.1. Konvergenciasugár meghatározása

Adott $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ hatványsor. Ekkor ha létezik a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \gamma$$

vagy a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \gamma$$

határérték, akkor $\rho = \frac{1}{\gamma}$.

Bizonyítás

1. A végtelen sorokra vonatkozó gyengített hányadoskritérium miatt ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x - x_0)^{n+1}}{c_n(x - x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x - x_0| = \gamma |x - x_0| < 1$$

akkor a sor konvergens. Ekkor azonban

$$|x - x_0| < \frac{1}{\gamma} \implies x_0 - \frac{1}{\gamma} < x < x_0 + \frac{1}{\gamma}.$$

Azt látjuk, hogy valóban $\rho = \frac{1}{\gamma}$.

2. A végtelen sorokra vonatkozó gyengített gyökkritérium miatt ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n(x - x_0)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} |x - x_0| = \gamma |x - x_0| < 1$$

akkor a sor konvergens. Ekkor azonban

$$|x - x_0| < \frac{1}{\gamma} \implies x_0 - \frac{1}{\gamma} < x < x_0 + \frac{1}{\gamma}.$$

Azt látjuk, hogy valóban $\rho = \frac{1}{\gamma}$.

9.5. Taylor sor

Legyen adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ függvény, mely egy $x_0 \in (a, b)$ pontban végtelen sokszor differenciálható. Ekkor az f függvény x_0 körüli Taylor sora

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

9.6. Elemi függvények Taylor sora

9.6.1. e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Bizonyítás

Mivel $(e^x)^{(k)} = e^x$, 0 körüli sorbafejtéssel azonnal kapjuk az állítást.

9.6.2. $\sin x$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$(\sin x)^{(4k+1)} = \cos x \quad (\sin x)^{(4k+2)} = -\sin x \quad (\sin x)^{(4k+3)} = -\cos x \quad (\sin x)^{(4k)} = \sin x.$$

Ekkor 0 körüli sorbafejtéssel kapjuk is a bizonyítandót.

9.6.3. $\cos x$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy

$$(\cos x)^{(4k+1)} = -\sin x \quad (\cos x)^{(4k+2)} = -\cos x \quad (\cos x)^{(4k+3)} = \sin x \quad (\cos x)^{(4k)} = \cos x.$$

Ekkor 0 körüli sorbafejtéssel kapjuk is a bizonyítandót.

10. Tétel

10.1. Fourier transzformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor a függvény Fourier transzformáltja $\hat{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$

$$\mathcal{F}(f, s) = \hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx.$$

10.2. Hatványfüggvény integrálja az $[1, \infty)$ intervallumon

Tudjuk, hogy a hatványfüggvény primitív függvénye

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \ln|x|, & \alpha = 1 \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

1. $\alpha = 1$ esetén

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \ln|x| \Big|_1^\infty = \infty.$$

2. $\alpha \neq 1$ esetén

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^\infty = \begin{cases} \infty, & 1-\alpha > 0 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & 1-\alpha < 0. \end{cases}$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \infty, & \alpha \leq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1. \end{cases}$$

10.3. Valós függvény gráfjának hossza

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény gráfjának hossza az $[a, b]$ intervallumon

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

10.4. Fourier transzformáció alaptulajdonságai

1. Ha f páros, akkor

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(st) dt.$$

2. Ha f páratlan, akkor

$$\hat{f}(s) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin(st) dt.$$

3. $\hat{f}$ folytonos

4. Linearitás

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g, s) = \alpha \mathcal{F}(f, s) + \beta \mathcal{F}(g, s)$$

5. Átskálázás

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(f(x), \frac{s}{a}\right) \quad (a \neq 0)$$

6. Időeltolás

$$\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s} \mathcal{F}(f(x), s)$$

7. Frekvenciaeltolás

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s - k)$$

Bizonyítás

1. Tudjuk, hogy

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

Ekkor ha f páros, akkor

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(st) dt.$$

2. Tudjuk, hogy

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

Ekkor ha f páratlan, akkor

$$\hat{f}(s) = -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

3. Az egyenletes konvergenciából következik.

4. Az integrálás linearitásából következik.

5.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(ax), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-isx} dx \stackrel{\substack{\frac{1}{a}y=x \\ \frac{1}{a}dy=dx}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\operatorname{sgn} a \infty}^{\operatorname{sgn} a \infty} f(y) e^{-i \frac{s}{a} y} \frac{1}{a} dy = \\ &= \frac{1}{|a| \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i \frac{s}{a} y} dy = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}\left(f(x), \frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x - x_0), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-isx} dx \stackrel{\substack{y=x-x_0 \\ dy=dx}}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-is(y+x_0)} dy = e^{-isx_0} \mathcal{F}(f(x), s) \end{aligned}$$

7.

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(s-k)x} dx = \mathcal{F}(f(x), s - k)$$

10.5. Inverz Fourier transzformáció

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, abszolút integrálható függvény, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx < \infty$$

melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s) e^{isx} \, ds.$$

10.6. Parseval egyenlőség

Tegyük fel, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| \, dx < \infty \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| \, dx < \infty.$$

Ekkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2 \, ds.$$

11. Tétel

11.1. Polárkoordináták

Adott $P(x, y)$ pont a síkon. Ennek a pontnak a polárkoordinátái (r, θ) , ahol r az origótól vett távolság, θ pedig az x -tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \frac{y}{x}$$

illetve

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta.$$

11.2. Egyváltozós valós függvény esetén lokális szélsőérték szükséges feltétele

Ha f -nek lokális szélsőértéke van $x_0 \in \text{int}(D_f)$ -ben, akkor

$$f'(x_0) = 0.$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy x_0 -ban lokális minimuma van a függvénynek. Ez azt jelenti, hogy $\exists U_{x_0}$ környezet, melyre $f(x_0) \leq f(x)$ teljesül $\forall x \in U_{x_0}$ esetén. Világos, hogy ekkor $x < x_0$ esetén

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Azonban $x > x_0$ esetén

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Ekkor $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, amiből $f'(x_0) = 0$.

11.3. Egyváltozós valós függvény esetén lokális szélsőérték elégséges feltétele

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ kétszer differenciálható, és legyen $f'(x_0) = 0$ valamilyen x_0 -ra. Ekkor x_0 lokális szélsőérték, ha $f''(x_0) \neq 0$. Továbbá x_0 lokális maximum (minimum), ha $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).

Ha $f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ előjelet vált x_0 -ban, akkor x_0 lokális szélsőérték.

11.4. Szükséges feltétel szélsőértékre többváltozós függvényre

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor $x_0 \in S$ lokális minimum (maximum), ha $\exists U$ környezete, ahol $\forall x \in U$ esetén

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \left(f(x) \leq f(x_0) \right).$$

Ha $U = D_f$, akkor x_0 globális szélsőérték.

Szükséges feltétele a szélsőérték létezésének, hogy $\nabla f = 0$ legyen.

Bizonyítás

Legyen $f_1(x) = f(x, x_2, \dots, x_n)$ az n -változós függvény egyik metszetfüggvénye. Ekkor ha y_0 szélsőérték, akkor $f'_1(y_0) = 0$ kell, azonban $f'_1(y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(y_0)$. Hasonlóan belátható, hogy $\forall \frac{\partial f}{\partial x_k}(y_0) = 0$ szükséges.

11.5. Stacionárius pont

Azt mondjuk, hogy (x, y) stacionárius pontja f -nek, ha

$$\nabla f(x, y) = (0, 0).$$

11.6. Nyeregpont

Azt mondjuk, hogy (x, y) nyeregpont, ha stacionárius pont, de nem szélsőérték.

11.7. Elégséges feltétel szélsőértékre kétváltozós függvények esetén I.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható (x_0, y_0) -ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $\det H > 0$ esetén (x_0, y_0) -ban lokális szélsőérték van, ami

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ esetén maximum

(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ esetén minimum

2. $\det H = 0$ esetén további vizsgálat szükséges

3. $\det H < 0$ esetén (x_0, y_0) nyeregpont.

11.8. Elégséges feltétel szélsőértékre kétváltozós függvények esetén II.

Tegyük fel, hogy f kétszer differenciálható (x_0, y_0) -ban, és $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Ekkor

1. $H > 0$ esetén (x_0, y_0) lokális minimumhely

2. $H < 0$ esetén (x_0, y_0) lokális maximumhely

3. ha H szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.

4. ha H indefinit, akkor (x_0, y_0) nyeregpont.

12. Tétel

12.1. Parciális deriváltak kétváltozós függvényre

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen $(x_0, y_0) \in \text{int}S$. Ekkor a függvény x szerinti parciális deriváltja az (x_0, y_0) pontban

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóan a függvény y szerinti parciális deriváltja az (x_0, y_0) pontban

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

12.2. Bolzano tétel egyváltozós függvényekre

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $f(a) < f(b)$. Ekkor $\forall c \in (f(a), f(b))$ -hez $\exists \xi \in (a, b)$, amire $f(\xi) = c$.

Bizonyítás

Legyen $c_1 := \frac{a+b}{2}$. Legyen továbbá

$$a_2 := a_1 \quad b_2 := c_1$$

ha $f(c_1) > c$, és

$$a_2 := c_1 \quad b_2 := b_1$$

ha $f(c_1) < c$. Hasonlóan konstruáljuk az $I_k := [a_k, b_k]$ intervallsorozatot. Nyilván az I_k intervallsorozat teljesíti a Cantor-féle közspont tétel feltételeit, így létezik egy közös pont, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(\xi).$$

Tehát $f(\xi) \leq c \leq f(\xi)$. Emiatt nyilván $f(\xi) = c$.

12.3. Bolzano tétel kétváltozós függvényekre

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol S összefüggő. Legyen $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$, melyekre $a = f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2) = b$. Ekkor $\forall c \in (a, b)$ számhoz $\exists (x_0, y_0) \in S$, melyre $f(x_0, y_0) = c$.

12.3.1. Parciális derivált geometriai jelentése

Rögzített y_0 mellett definiáljuk az $f_1(x) = f(x, y_0)$ függvényt. Ekkor $f'_1(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$, tehát a definiált metszetfüggvény meredekségét kapjuk meg. Ez azt jelenti, hogy a parciális deriváltak a felület érintősíkjának x és y irányú meredekségét adják meg.

12.4. Magasabb rendű parciális deriváltak

12.4.1. Másodrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy f kétváltozós függvény kétszer differenciálható az értelmezési tartomány (x, y) belső pontjában. Ekkor a másodrendű parciális deriváltak a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ parciális deriváltjai az (x, y) pontban. A másodrendű parciális

deriváltak

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

12.4.2. n -edrendű parciális deriváltak

Tegyük fel, hogy f kétváltozós függvény n -szer differenciálható az értelmezési tartomány (x, y) belső pontjában. Az n -edrendű parciális deriváltak

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^k \partial x^m} \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^m}$$

alakúak, ahol $k + m = n$.

12.5. Parciális deriválások sorrendje

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$, és legyen $(x_0, y_0) \in \text{int} D_f$. Tegyük fel, hogy $\exists U$ környezete (x_0, y_0) -nak, amiben $\exists \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ és folytonosak az (x_0, y_0) pontban. Ekkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

teljesül $\forall (x, y) \in U$ esetén.

12.6. Érintősík

Ha az f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor az ehhez a ponthoz tartozó érintősík egyenlete

$$S : \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Ekkor a sík normálvektora

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right).$$

12.7. Iránymenti derivált

Adott f kétváltozós függvény és $\alpha \in [0, 2\pi)$. Ekkor az α irányú iránymenti derivált (ha létezik a határérték)

$$D_\alpha f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

Adott $v(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ irány esetén, ahol $\|v\| = 1$, az iránymenti derivált

$$D_v(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varrho v_1, y_0 + \varrho v_2) - f(x_0, y_0)}{\varrho}.$$

12.7.1. Tétel

Ha f differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor itt létezik az iránymenti derivált tetszőleges $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén, és

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x_0, y_0) = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)v.$$

Bizonyítás

A differenciálhatóság miatt

$$f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0) = \varrho \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varrho \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(|\varrho|).$$

Ekkor

$$\frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{o(|\varrho|)}{\varrho}$$

így nyilván

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \varrho \cos \alpha, y_0 + \varrho \sin \alpha) - f(x_0, y_0)}{\varrho} = \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

13. Tétel

13.1. Helyettesítés integrálban egyváltozós függvényekre

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény, és $\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan monoton, differenciálható függvény, melyre

$$\varphi(\alpha) = a \quad \varphi(\beta) = b.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

13.2. Konvex és konkáv függvények, ezek jellemzése

Egy $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény $(a, b) \subset D$ -ben konvex (konkáv), ha $\forall a \leq x_1 < x_2 \leq b$ és $\forall t \in [0, 1]$ esetén

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

teljesül. Egy f függvény konkáv, ha $-f$ konvex.

13.2.1. Tétel

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor f konvex (konkáv) $I \subset D$ -ben akkor és csak akkor, ha $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) $\forall x \in D$ esetén.

13.3. Függvényrendszer

Adottak $\Phi, \Psi : D \mapsto \mathbb{R}$, ahol $D \subset \mathbb{R}^2$. Legyen továbbá $\Phi(x, y) = \xi$ és $\Psi(x, y) = \eta$. Ekkor $F : D \mapsto \mathbb{R}^2$ egy függvényrendszer vagy vektormező, melyre

$$F(x, y) = (\Phi(x, y), \Psi(x, y)) = (\xi, \eta).$$

13.4. Jacobi mátrix

Ha a Φ, Ψ függvények differenciálhatóak, akkor F is differenciálható, és a derivált a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \Phi(x, y) \\ \nabla \Psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

13.5. Függvényrendszer invertálhatósága

Tegyük fel, hogy a Φ, Ψ függvények injektívek. Ekkor az F leképezés invertálható, és az inverz rendszer alakja

$$x = g(\xi, \eta)$$

$$y = h(\xi, \eta).$$

13.6. Kettős integrálban helyettesítés polárkoordinátákkal

Az áttérés során az (x, y) koordinátákról térünk át az (r, θ) koordinátákra, ahol r az origótól vett távolság, θ pedig az x -tengellyel bezárt szög. Ekkor

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

így a Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

amiből a Jacobi determináns $D(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$.

Legyen adott $f : D \mapsto \mathbb{R}$ függvény és T az integrálás tartománya. Legyen továbbá a koordinátatranszformáció után az integrálási tartomány T' . Az integrál

$$\iint_T f(x, y) \, d(x, y) = \iint_{T'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, d(r, \theta).$$

13.7. Hengerkoordináták, és a koordináta transzformáció Jacobi determinánása

Egy (x, y, z) pont hengerkoordinátái (r, θ, z) ahol (r, θ) a pont vetületének polárkoordinátái és

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z.$$

A Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi determinánása (harmadik sor szerint kifejtve)

$$D(r, \theta, z) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r.$$

14. Tétel

14.1. Integrálfüggvény

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor az f integrálfüggvénye $F : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

14.2. Integrálszámítás második alaptétele

Adott függvény integrálfüggvénye folytonos. Ha f folytonos x_0 egy környezetében, akkor F differenciálható, és

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Bizonyítás

Tudjuk, hogy f korlátos, így legyen $|f(x)| \leq K$. Ekkor

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) \, dt \right| \leq K|x - x_0|$$

tehát F Lipschitz-folytonos, így folytonos is.

Legyen továbbá x_0 rögzített. Ekkor

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t) \, dt}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \xi \in (x, x_0)}} f(\xi) = f(x_0).$$

14.3. Integrál közéértéktétel

Adott $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ integrálható, folytonos függvény. Ekkor $\exists \xi \in [a, b]$, melyre

$$f(\xi) = \kappa = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b - a}.$$

Bizonyítás

A Weierstrass-tétel miatt tudjuk, hogy $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a, b]$, melyre

$$m = f(\xi_1) \quad M = f(\xi_2).$$

Ekkor a Bolzano-tétel miatt $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2)$, melyre

$$f(\xi) = \kappa.$$

14.4. Kétváltozós függvény integrálása téglalapon

Legyen $R = [a, b] \times [c, d]$. Ekkor

$$\iint_R f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

14.5. Síkbeli normáltartomány

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ x szerinti normáltartomány, ha $\exists[a, b]$, továbbá $\exists \Phi_1 \leq \Phi_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [\Phi_1(x), \Phi_2(x)] \right\}.$$

Hasonlóan $R \subset \mathbb{R}^2$ y szerinti normáltartomány, ha $\exists[c, d]$, továbbá $\exists \Psi_1 \leq \Psi_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvények, melyekre

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d], x \in [\Psi_1(y), \Psi_2(y)] \right\}.$$

14.6. Kettős integrál normáltartományon

Legyen R egy x szerinti normáltartomány. Ekkor

$$\iint_R f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

Hasonlóan, ha R egy y szerinti normáltartomány, akkor

$$\iint_R f(x, y) \, d(x, y) = \int_c^d \int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

14.7. Helyettesítés integrálban általános koordináta-transzformációval

Legyen $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen

$$x = \Phi(u, v)$$

$$y = \Psi(u, v)$$

invertálható és differenciálható függvényrendszer. Legyen továbbá

$$R' = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (\Phi(u, v), \Psi(u, v)) \in R \right\}.$$

Ekkor

$$\iint_R f(x, y) \, d(x, y) = \iint_{R'} f(\Phi(u, v), \Psi(u, v)) D(u, v) \, d(u, v)$$

ahol $D(u, v)$ a Jacobi determináns.

15. Tétel

15.1. Rendőrelv

Legyen $a_n < b_n < c_n$ valamilyen küszöbindex után. Legyen továbbá

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Ekkor (ha léteznek a határértékek)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

15.2. Bolzano-Weierstrass tétel számsorozatokra

Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

15.2.1. Csúcselem

Adott (a_n) sorozatban a_m csúcselem, ha $\forall n > m$ esetén $a_n \leq a_m$.

15.2.2. Lemma

Minden sorozatnak van monoton részsorozata.

Bizonyítás

Legyen először az (a_n) sorozatnak végtelen sok csúcseleme. Ekkor legyen e csúcselemek indexe n_k ahol $n_i < n_j$ ha $i < j$. Ekkor az (a_{n_k}) sorozat monoton fogyó.

Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozatnak csak véges sok csúcseleme van. Legyen ekkor az utolsó csúcs indexe n , és legyen $n_1 := n + 1$. Mivel a_{n_1} már nem lehet csúcs, ezért létezik nála nagyobb elem, legyen ez a_{n_2} . Mivel a_{n_2} sem csúcs, ennél is létezik nagyobb elem. Ezt a végtelenségig folytatva tudunk konstruálni egy (a_{n_k}) monoton növő sorozatot.

Bizonyítás

Beláttuk, hogy korlátos sorozatnak létezik monoton részsorozata. Mivel ez a részsorozat korlátos és monoton, konvergens is. Ezzel beláttuk a Bolzano-Weierstrass tételt.

15.3. Számsorozat torlódási pontja

Az adott (a_n) sorozatban $t \in \mathbb{R}$ torlódási pont, ha $\forall \varepsilon > 0$ -ra a $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ intervallum végtelen sok elemét tartalmazza az (a_n) sorozatnak.

15.4. Kétváltozós valós értékű függvény integrálja vonal mentén

Adott $f : R \mapsto \mathbb{R}$ kétváltozós függvény és

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \right\} \in R$$

sima görbe, ahol $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Ekkor f Γ görbe menti vonalintegrálja

$$\int_{\Gamma} f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt.$$

15.5. Vektormező vonalintegrálja vonal mentén

Adott $F : R \mapsto \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

vektormező és

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \right\} \in R$$

sima görbe. Ekkor a vektormező vonalintegrálja

$$\int_{\Gamma} F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left(f(\gamma(t)) \dot{x}(t) + g(\gamma(t)) \dot{y}(t) \right) \, dt.$$

15.6. Potenciális vektormező

Azt mondjuk, hogy F potenciális vektormező, ha $\exists f$ differenciálható függvény, melyre $F = \nabla f$.

15.6.1. Tétel

Adott F potenciális vektormező, aminek potenciálja f és adott

$$\Gamma = \left\{ \gamma(t) \mid t \in [a, b] \right\}$$

sima görbe. Ekkor

$$\int_{\Gamma} F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

15.7. Potenciálkeresés

Adott

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}$$

vektormező. Ahhoz, hogy F potenciális legyen

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

kell. Ekkor g -t integrálva x szerint, illetve h -t integrálva y szerint kapjuk a $G(x, y), H(x, y)$ függvényeket. Ezen függvények közös része lesz a keresett potenciál.

15.7.1. Potenciál létezésének szükséges és elégséges feltétele

Adott F vektormező és Γ zárt, sima görbe. Ekkor F potenciális akkor és csak akkor, ha

$$\oint_{\Gamma} F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} = 0.$$

Bizonyítás

(Csak szükségesség)

Tegyük fel, hogy F potenciális, potenciálja f . Ekkor

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} F(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t)) \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t)) \dot{y}(t) \right) \, dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0. \end{aligned}$$

16. Tétel

16.1. Differenciálhányados

Azt mondjuk f differenciálható x_0 -ban, ha létezik

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

azaz létezik és véges a differenciálhányados.

16.2. Derivált geometriai és fizikai jelentés

A differenciálhányados a függvény grafikonjának adott $(x_0, f(x_0))$ pontjához tartozó érintő meredekségét adja meg.

Legyen adott $s(t)$ útfüggvény. Ekkor t_0 időpillanatban a pillanatnyi sebesség $v(t_0) = \dot{s}(t_0)$.

16.3. Folytonosság és deriválhatóság kapcsolata

Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor folytonos x_0 -ban.

Bizonyítás

f differenciálhatósága azt jelenti, hogy

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

azaz $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$f'(x_0) - \varepsilon \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x_0) + \varepsilon.$$

Ekkor

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq K$$

ahol

$$K = \max \{ |f'(x_0) - \varepsilon|, |f'(x_0) + \varepsilon| \}.$$

Ekkor nyilván

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0|.$$

Ez azt jelenti, hogy $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$$

tehát valóban folytonos.

16.4. Teljes differenciálhatóság

Adott $f : S \mapsto \mathbb{R}$ és legyen $(x_0, y_0) \in \text{int}D_f$. Azt mondjuk, hogy a függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, ha $\exists A, B, C \in \mathbb{R}$, melyekre

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

teljesül elegendően kicsi $\Delta x, \Delta y$ esetén, ahol A, B, C függetlenek Δx -től és Δy -től.

16.5. Kapcsolat a parciális deriváltakkal

Ha f differenciálható az $(x_0, y_0) \in \text{int}D_f$ pontban, akkor

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad C = f(x_0, y_0).$$

Bizonyítás

1. Legyen $\Delta x = \Delta y = 0$. Ekkor valóban

$$f(x_0, y_0) = C.$$

2. Legyen $\Delta y = 0$. Ekkor

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) = A\Delta x + f(x_0, y_0) + o(|\Delta x|).$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}$$

amiből nyilván

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} \right) = A.$$

3. Az előzőhöz analóg módon kapjuk, hogy

$$B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

16.6. Komplex függvény differenciálhatósága

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. Ekkor f differenciálható a $z_0 \in \text{int}D_f$ pontban, ha

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} < \infty.$$

16.7. Cauchy-Riemann egyenletek

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ komplex függvény. f differenciálható a $z_0 \in \text{int}D_f$ pontban akkor és csak akkor, ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Bizonyítás

Tegyük fel, hogy f differenciálható a z_0 pontban. Ekkor

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) + iv(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + r, y_0) - u(x_0, y_0)}{r} + i \lim_{r \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + r, y_0) - v(x_0, y_0)}{r} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) + iv(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{is} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + s) - u(x_0, y_0)}{is} + i \lim_{s \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + s) - v(x_0, y_0)}{is} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ebből azonnal kapjuk az állítást.

Most tegyük fel, hogy a függvény kielégíti a Cauchy-Riemann egyenleteket. Ekkor

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{r+is \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + r, y_0 + s) + iv(x_0 + r, y_0 + s) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{r + is} = \\
 &= \lim_{r+is \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}r + \frac{\partial u}{\partial y}s + i\frac{\partial v}{\partial x}r + i\frac{\partial v}{\partial y}s + o(|h|)}{r + is} = \lim_{r+is \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}r - \frac{\partial v}{\partial x}s + i\frac{\partial v}{\partial y}r + i\frac{\partial u}{\partial x}s + o(|h|)}{r + is} = \\
 &= \lim_{r+is \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(r + is) + \frac{\partial v}{\partial x}(-s + ir) + o(|h|)}{r + is} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).
 \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy a határérték létezik, így a függvény differenciálható.

17. Tétel

17.1. Számsorozat határértéke

Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > n_0$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

egyértelmű.

17.2. Divergens sorozat

Ha (a_n) nem konvergens, akkor divergens.

17.2.1. Típusai

1. Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm \infty$$

ha $\forall K \in \mathbb{R}$ -hez ($\forall k \in \mathbb{R}$ -hez) $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n > n_0$ esetén $a_n > K$ ($a_n < k$).

2. Divergens az olyan (a_n) sorozat, melynek több torlódási pontja van (de adott esetben korlátos lehet a sorozat). Ilyen például az $a_n = (-1)^n$ sorozat.

17.3. Cauchy kritérium

Azt mondjuk, hogy az (a_n) Cauchy sorozat, vagy teljesíti a Cauchy kritériumot, hogyha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists n_0$ küszöbindex, melyre $\forall n, m > n_0$ esetén

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

teljesül.

17.3.1. Tétel

Az (a_n) sorozat akkor és csak akkor konvergens, hogyha teljesíti a Cauchy kritériumot.

Bizonyítás

Legyen (a_n) konvergens. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor Cauchy sorozat.

Tudjuk, hogy valamilyen küszöbindex után

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |a_m - A| < \varepsilon.$$

Legyen (a_n) Cauchy sorozat. Azt fogjuk belátni, hogy ekkor konvergens.

Először lássuk be, hogy egy Cauchy sorozat korlátos!

Tudjuk, hogy valamilyen n_0 küszöbindex után $|a_n - a_m| < \varepsilon$, azaz $a_n \in (a_m - \varepsilon, a_m + \varepsilon)$. Ekkor ezen az intervallumon kívül csak véges sok eleme van a sorozatnak, azaz

$$K := \max \{ (|a_m| + \varepsilon) \cup \{|a_k| \mid k < n_0\} \}$$

jó korlát. Tehát az (a_n) Cauchy sorozat korlátos, emiatt van konvergens részsorozata. Legyen a részsorozat (a_{n_k}) ahol $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = A$. Tudjuk, hogy valamilyen küszöbindex után

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

teljesül. Ekkor

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| = |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

17.4. Cauchy-féle integrálformula analitikus függvényekre

Legyen $D \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő tartomány és $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitikus függvény. Adott $z_0 \in \text{int}D$ és $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0 -t. Ekkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Bizonyítás

$$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_L \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \oint_L \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$$

Mivel f differenciálható, így korlátos z_0 környezetében, így a Cauchy-féle alaptétel miatt

$$\oint_L \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0.$$

Ekkor

$$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_L \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) 2\pi i$$

amiből kapjuk a bizonyítandót.

17.5. Taylor sorfejtés komplex analitikus függvényre

Legyen $f : D \mapsto \mathbb{C}$ függvény, amely differenciálható z_0 környezetében. Ekkor f z_0 -ban Taylor sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0 -t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

17.6. Laurent sorfejtés

Legyen f analitikus egy

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \in (r, R)\}$$

körgyűrűben. Ekkor ebben a körgyűrűben f Laurent sorba fejthető és

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

ahol $L \subset D$ olyan görbe, amely körbeveszi z_0 -t és

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

18. Tétel

18.1. Gömbi polárkoordináták

Egy (x, y, z) pont gömbi polárkoordinátái (r, θ, φ) , ahol r az origótól vett távolság, θ a pontba mutató vektor vetületének az x -tengellyel bezárt szöge, φ pedig a pontba mutató vektor z -tengellyel bezárt szöge.

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \varphi$$

18.2. Elsőrendű szeparábilis DE megoldása

Egy differenciálegyenlet szeparábilis, ha a jobboldala

$$f(x, y) = h(x)g(y)$$

vagy

$$f(x, y) = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}$$

alakú, azaz

$$y' = h(x)g(y)$$

vagy

$$y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}.$$

Bizonyítás

Legyen $y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}$. Ekkor

$$\beta(y)y' = \alpha(x) \implies \int \beta(y)y' dx = \int \alpha(x) dx.$$

Bevezetve a

$$B(y) = \int \beta(y) dy \quad A(x) = \int \alpha(x) dx$$

primitív függvényeket

$$B(y) = A(x) + c$$

ebből pedig y kifejezhető.

18.3. Gömbi polárkoordináta-transzformáció Jacobi determinánsa

A Jacobi mátrix

$$\mathcal{J}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

A Jacobi determinánsa (utolsó sor szerint kifejtve)

$$\begin{aligned} D(r, \theta, \varphi) &= \cos \varphi (r^2 \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin^2 \theta) + \\ &+ r \sin \varphi (r \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + r \sin^2 \varphi \sin^2 \theta) = r^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + r^2 \sin^3 \varphi = r^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

18.4. Magasabb rendű homogén lineáris DE megoldásai

Az $L[y] = \sum_{k=0}^n a_{n-k} y^{(k)} = 0$ egyenletnek létezik n darab lineárisan független megoldása, melyekre az összes többi megoldás ezek lineáris kombinációja.

18.5. Állandó együttható HLDE alapmegoldásai, karakterisztikus polinom

Ebben az esetben

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

A HDE megoldásait $y = e^{\lambda x}$ alakban keresve

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} P(\lambda) = 0 \implies P(\lambda) = 0.$$

18.5.1. Első eset

Tegyük fel, hogy P n különböző gyöke mind valós, legyenek a gyökök $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ekkor az alapmegoldások

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ y_2(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

illetve az általános megoldás

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x} \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

18.5.2. Második eset

Tegyük fel, hogy P m darab gyöke k_m -szeres gyök, ahol nyilván $\sum_{j=1}^m k_j = n$. Ekkor az alapmegoldások

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{\lambda_1 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1}(x) &= x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ y_{k_1+1}(x) &= e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1+k_2}(x) &= x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x} \\ &\vdots \\ y_{k_1+k_2+\dots+1}(x) &= e^{\lambda_m x} \\ &\vdots \\ y_n(x) &= x^{k_m-1} e^{\lambda_m x} \end{aligned}$$

illetve az általános megoldás

$$y(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{k_j-1} c_{jl} x^l e^{\lambda_j x}.$$

18.5.3. Harmadik eset

Tegyük fel, hogy az egyenletnek gyöke a $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex szám. Ekkor tudjuk, hogy $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ is gyök. A két alapmegoldás

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{\lambda x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) \\ u_2(x) &= e^{\bar{\lambda} x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy alapmegoldások lineáris kombinációja is megoldás, ezért a fenti megoldásokból definiáljuk az új, valós alapmegoldásokat

$$y_1(x) = \frac{u_1(x) + u_2(x)}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$
$$y_2(x) = \frac{u_1(x) - u_2(x)}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

18.5.4. Negyedik eset

Többszörös komplex gyököknél hasonlóan kell eljárni, mint többszörös valós gyököknél.

19. Tétel

19.1. Fourier sor

Az $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ $[-\pi, \pi]$ -n integrálható függvény Fourier sora

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

ahol a Fourier együtthatók

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

A sort közelíthetjük az n -edik Fourier polinommal

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right).$$

19.2. Számtani átlag sorozat

Adott (a_n) sorozat számtani átlag sorozata az

$$A_n := \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

19.2.1. Tétel

Ha (a_n) nullsorozat, akkor (A_n) is nullsorozat.

Bizonyítás

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|A_n| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Legyen az (a_n) sorozatnál az $\frac{\varepsilon}{2}$ számhoz tartozó küszöbindex n_1 . Legyen továbbá a $n_2 = \frac{2n_1 K}{\varepsilon}$ ahol $|a_n| \leq K$. Világos, hogy létezik ilyen K , hiszen a sorozat konvergens. Ekkor

$$|A_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k| = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_1} |a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_1+1}^n |a_k| \leq \frac{n_1}{n} \cdot K + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - n_1}{n} < \frac{n_1}{n} \cdot K + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Világos, hogy $n \geq \max(n_1, n_2) = \max\left(n_1, \frac{2n_1 K}{\varepsilon}\right)$ esetén

$$|A_n| < \frac{n_1}{n} \cdot K + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

19.2.2. Tétel

Ha (a_n) konvergens, akkor (A_n) is konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Bizonyítás

Felhasználva az előző tételt egyből kapjuk a bizonyítandót.

19.3. Trigonometrikus függvényrendszer

Definiáljuk az alábbi függvényrendszert, ahol minden függvény $[-\pi, \pi]$ megszorítását nézzük

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 1 \\ \varphi_1 &= \sin x & \varphi_2 &= \cos x \\ &\vdots & &\vdots \\ \varphi_{2k-1} &= \sin(kx) & \varphi_{2n} &= \cos(kx) \\ &\vdots & &\vdots\end{aligned}$$

Tekintsük továbbá a

$$\mathcal{C} = \left\{ f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos} \right\}$$

halmazt az alábbi skalárszorozattal, illetve normával

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx \\ \|f\| &= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, dx}.\end{aligned}$$

Ekkor $\mathcal{C}$ vektortér az összeadásra, illetve a fent definiált skalárszorozatra nézve.

19.3.1. Tétel

A (φ_n) függvényrendszer ortogonális a $\mathcal{C}$ vektortérben.

Bizonyítás

1. $n = m = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \varphi_m(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dx = 2\pi$$

2. $n = m \neq 0$ Vegyük észre, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \varphi_m(x) \, dx = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) \, dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) \, dx \end{cases}.$$

Könnyen láthatjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) \, dx.$$

Ugyanakkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2(x) + \cos^2(x)) \, dx = 2\pi.$$

Ebből

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \varphi_m(x) \, dx = \pi.$$

3. $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \varphi_m(x) \, dx = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{m+1}{2}x\right) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{n-m}{2}x\right) - \cos\left(\frac{n+m+2}{2}x\right)}{2} \, dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cos\left(\frac{m}{2}x\right) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{n+m+1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{m-n}{2}x\right)}{2} \, dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \sin\left(\frac{m+1}{2}x\right) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{n+m+1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{n-m}{2}x\right)}{2} \, dx \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \cos\left(\frac{m}{2}x\right) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(\frac{n+m}{2}x\right) + \cos\left(\frac{n-m}{2}x\right)}{2} \, dx \end{cases}.$$

Ebből láthatjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(x) \varphi_m(x) \, dx = 0.$$

19.4. Fourier sor komplex alakja

Legyen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus, szakaszonként folytonosan differenciálható függvény, melynek csak elsőfajú szakadása van, ahol

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Ekkor

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}$$

ahol

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

19.5. Komplex függvény kanonikus alakja

Adott $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$. Ekkor a függvény kanonikus alakja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ahol $u, v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

19.6. Exponenciális függvény

Az exponenciális függvény

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

1. A függvény analitikus és $(e^z)' = e^z$.

2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

3. A függvény $2\pi i$ szerint periodikus.

19.7. Logaritmus függvény

A logaritmus függvény $z \neq 0$ esetén

$$\ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

A logaritmus főértéke $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arg z$.

1.

$$e^{\operatorname{Ln} z} = z$$

2. $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén

$$\ln(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3.

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} z = \frac{1}{z}$$