Szigorlati tételek Lineáris algebra és Diszkrét matematika tárgyakból

2017

A **vastag betűs fogalmak, tételek**, különösen fontosak. Ezek **megértése és alkalmazni tudása** nélkül nem adható elégséges osztályzat. A (B) betű pedig azt jelzi, hogy a jó, és jeles osztályzathoz kell a bizonyítást tudni.

1.A. Vektoralgebra
A 3 dimenziós vektorok tere. Lineáris kombináció fogalma. **Síkbeli felbontási tétel (B).** Térbeli felbontási tétel. **Lineáris kombináció, koordináta fogalma.** Speciális műveletek: **skaláris szorzat, vektoriális szorzat és erre vonatkozó tételek, geometriai jelentésük.** Sík normálvektoros egyenlete (B). Pont és sík távolsága. Vektor összetevőkre bontása és merőleges kiegészítő.
1.D. Hálók.
Háló kétfajta definíciója. Tarski hálóelméleti fixpont tétele (a kimondásban szereplő definíciók) (B).

2.A. Lineáris függetlenség, összefüggőség.
Lineáris függetlenség, összefüggőség fogalma. Vektorokból elvéve, hozzávéve, hogyan változik e tulajdonság (B). **Bázis és generátorrendszer fogalma.** Példák a legfeljebb másodfokú, és az m x n –es mátrixok vektorteréből.
2.D. Struktúrák
Struktúra, művelet, műveleti tulajdonságok, inverzelem, egységelem fogalma. Asszociatív művelet esetén ezen elemek **egyértelműsége (B).** Halmazok és ítéletkalkulus struktúrája: hálók. **Kétfajta definíció ismertetése,** ekvivalenciájuk.

3. A Lineáris tér.
Lineáris tér (vektortér) fogalma. Axiómák következményei. Vektorrendszer függetlensége és rangja. **Bázis, koordináták, dimenzió.** Dimenzió ekvivalens megfogalmazásai. Kicserélési tétel (B).
3. D. Néhány fontos struktúra
Csoport, kommutatív csoport, gyűrű, test, kapcsolatuk. Példák: a komplex számok és részhalmazainak struktúrája (komplex, valós, racionális, irracionális, egész, természetes számok halmaza és az értelmezett műveletek), n x m – es, és n x n-es mátrixok struktúrája. Komplex egységgyökök struktúrája (B**).**

4.A. Mátrix algebra
Mátrixok struktúrája. Műveletek (Inverz mátrix fogalma, számítási módszerei is). **Egyenletrendszerek megoldása inverz** mátrix segítségével. **Inverz mátrix képlete**, e képlet levezetése (B). Mátrix polinomok. **Cayley-Hamilton tétel kimondása és példán keresztül illusztrálása.** Mátrix-vektor szorzat mint lineáris kombináció.
4.D. Síkba rajzolható gráfok
Síkba rajzolható gráf fogalma, színezése. Kromatikus szám. Egyszerű becslések és példák (teljes gráf, páros gráf) kromatikus számra. Négyszín tétel, ötszín tétel (B).

5.A Bilineáris formák.
Kvadratikus alakok és szimmetrikus mátrixok. A sajátvektorok bázisában (ha létezik) felírt mátrix. Mátrixok otogonális diagonalizálása. **Főtengelytranszformáció** (B)**.** Kúpszeletek, mint mértani helyek. Másodrendű görbék középponti egyenletei.
5.D. Nagyságrend
Függvények növekedése, aszimptotikus közelítések, **kis ordó, nagy ordó**. **Nagyságrend fogalma.** Példa egyenlő nagyságrendekre. Exponenciális növekedés, ennek illusztrálása példával. (Nem kötelező: Algoritmusok bonyolultsága. Mátrix szorzás programjának bonyolultsága).

6. A. Komplex számok
Komplex számok különböző alakjai, műveletek. Átszámolás az egyes alakok között. Hatványozás, **Moivre- formula** (B)**, gyökvonás.** Konjugált. Egységgyök, primitív egységgyök fogalma, **egységgyökök struktúrája** (B). **Komplex számokra vonatkozó Euler formula**. **Az algebra alaptétele. Komplex együtthatós másodfokú egyenlet megoldása**
6.D. Elsőrendű logika.
Szintaxis nullad-, és elsõrendben. Szemantika: **kvantorok, interpretációk elsőrendben**. Szemantikai következmény elsőrendben. Rezolúció alapelve elsőrendben. Példa rezolúciós levezetésre.

7. A**.** Vektortér, altér
Vektortér és altér fogalma. Altér megállapítására vonatkozó tétel (B),. Nevezetes alterek: generátumok, képtér, magtér, sajátaltér, egyik bizonyítással. (Nem kötelező: A merőleges kiegészítő altér. Példa merőleges kiegészítőre R^3 ban, geometriai jelentése.) **Dimenzió tétel kimondása,** a tételben szereplő defníciók ismertetése. A tétel illusztrálása konkrét példán keresztül.
7. D. Relációk.
Reláció általános fogalma. **Bináris reláció, nevezetes bináris relációk és tulajdonságaik. Példák rendezési és ekvivalencia relációkra. Ekvivalencia reláció és partíció kapcsolata. Hasonló transzformációk és tulajdonságaik** (B). Példa hasonló transzformációkra.

8.A. Homogén lineris leképezések vektortere
Homogén lineáris leképezések összege, szorzata, polinomja, lineáris tere, kapcsolata a (megfelelő típusú) mátrixok lineáris terével. Cayley-Hamilton tétel.
8. D. Halmazalgebra
Műveletek. Halmaz részhalmazainak száma (B). Szita formula. Halmazelméleti azonosságok és bizonyítási módszer igazolásukra. **Skatulya elv**, példa a gráfelméletből (B).

9.A. Sajátérték, sajátvektor
Sajátérték, sajátvektor fogalma. Sajátvektorok függetlenségének kritériuma. Speciális transzformációk mátrixai (szimmetrikus, ferdén szimmetrikus, ortogonális), sajátértékei, sajátvektorai. Hasonló mátrixok sajátértékei, sajátvektorai. Azonos sajátérékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak (B). **Sajátvektorok bázisában a transzf. mátrixa** (B)**.**
9. D. Nulladrendű logika.
Műveletek, kiértékelési szabályok, interpretációk. Logikai (szemantikai) következmény fogalma, példák. A rezolúciós bizonyítás alapelve, a kétklózos **rezolúció következtetési sémájának helyessége** (B). Példák matematikai bizonyítási módszerekre.

10.A. Izomorfia
Izomorf struktúrák, izomorf gráfok, izomorf vektorterek. Vektorterek izomorfiára vonatkozó szükséges és elégséges feltételei (B). **A vektorterek közti izomorfia ekvivalencia reláció.** Mátrixok lineáris terének és a lineáris leképezések terének kapcsolata. Példa: az (a, 0) ($a \in R$) alakú komplex számok és a valós számok izomorfiája. Az a+bi képlet magyarázata (B)**.**
10. D. Számosságok
Számosság fogalma, egyenlő, kisebb, nagyobb számosságok. A (0,1) intervallumbeli számok halmazának számossága (B). **Cantor tétel** (Halmaz és hatványhalmazának számossága közti összefüggés). **A racionális számok számossága** (B). **Kontinuum hipotézis.**

11.A Lineáris leképezések.
Lineáris leképezés mátrixának definíciója, szerepe (B), **példák**. Speciális valós lineáris leképezések mátrixai: vetítés, **forgatás. A trigonometrikus addíciós tételek bizonyítása forgatási mátrixokkal.** A skalárszorzat, mint lineáris leképezés. A legfeljebb (n-1)-edfokú polinomok tere, és a polinomok deriválása, integrálása, mint lineáris leképezés, ezek mátrixai. **Lineáris leképezések összege, skalárszorosa, példák**. Homogén lineáris leképezések lineáris tere. **Áttérés más bázispárra. Mátrixok diagonalizálása.**
11.D Fák.
Fa ekvivalens definíciói, éleinek száma. Prüfer kód. **Feszítőfa fogalma**. Cayley télele a feszítőfák számáról. **Feszítőfa keresése** egyszerű, összefüggő (súlyozatlan) gráfban: **szélességi** bejárás/keresés, **mélységi** bejárás/keresés.

12. A. Euklideszi tér.
Bilineáris függvény fogalma**. Példa: skalárszorzat fogalma, skalárszorzat R^n-ben és C^n-ben**. **Euklideszi tér definíciója. Skalárszorzat, norma, metrika, és ezek kapcsolata** euklideszi terekben. **Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség euklideszi terekben (**B**) és speciálisan R^n -ben.** Szög fogalmának általánosítása.
12. D. Síkba rajzolható gráfok
Euler poliéder tétele (B**) és következményei.** Síkba és gömbre rajzolhatóság összefüggése. Fáry-Wagner tétel. **Kuratowski-tétel. Euler-kör/út és létezésére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel, egyik irány bizonyítással.**

13. A. Lineáris egyenletrendszerek.
Lineáris homogén/inhomogén egyenletrendszer fogalma. **Gauss elimináció, az algoritmus pontos ismertetése. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele és mátrix rangja** (B)**. Mátrix rangja, determinánsa és inverze létezésének összefüggése.**
Egyenletrendszer megoldása inverz mátrixszal. Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása vektorok függetlenségének valamint generátorrendszer és bázis megállapítására. **Mátrix inverz számítása Gauss eliminációval, bizonyítással.**
13.D A Hálózati folyamok.
Hálózat, folyam, vágás fogalma. Javító út. Ford-Fulkerson tétel.

14. A. Determinánsok.
Definíció, tulajdonságok. Gauss elimináció alkalmazása determinánsokra. **Inverz mátrix képlete.** Inverz mátrix képletének levezetése (B). **Három térvektor vegyes szorzata** és geometriai jelentése (B). **Determináns kifejtési és ferde kifejtési tétele.**
14.D Kombinatorika
Összeg- és szorzatszabály, permutáció (ismétléses, ismétlés nélküli), ismétlés nélküli permutáció képletének bizonyítása, variáció (ismétléses, ismétlés nélküli), egyik képletének bizonyítása, kombináció. (Jeleshez: B). Szita formula. Binomiális tétel (B). Binomiális együtthatók tulajdonságai.

15.A Komplex vektortér
Komplex vektortér (C^n). Komplex skalárszorzat, norma, metrika fogalma, kapcsolatuk egymással és számításuk. Speciális **komplex transzformációk** (hermitikus, ferdén hermitikus, unitér) **és tulajdonságaik** (egy választott: (B)).
15. D. Irányítatlan és súlyozott Gráfok
Irányítatlan és súlyozott gráf fogalma. Gráfok mátrixai. **Élszám és fokszám összefüggése bizonyítással (kézfogási tétel).** Speciális gráfok: fa, út, kör, teljes gráf, páros gráf. **N pontú összefüggő gráfok élszámára, körök létezésére vonatkozó tételek (**közülük egy választott B**).** Részgráfok. **Izomorf gráfok**.

16. A Ortogonalitás.
Vektorterek és euklideszi terek kapcsolata. Ortogonális vektorok függetlenségésnek bizonyítása térvektorok és magasabb dimenziők esetén. Gram Schmidt ortogonalizáció ismertetése. Ortonormált bázis létezése. Térvektorok felbontása adott vektorral párhuzamos, illetve arra merőleges összetevőkre. Ortogonális mátrix fogalma.
16. D. Irányított és irányítatlan gráfok
Összefüggő gráfok, összefüggő komponensek. **Hamilton-kör/út**, és létezéséhez elégséges feltételek (Dirac, Ore). Euler kör/út irányított gráfokra. **Irányított gráfok összefüggősége.** Irányított gráfok **fokszáma és éleinek száma közti összefüggés bizonyítással** (kézfogási tétel irányított gráfra). Irányított gráfok mátrixai. Dijkstra algoritmus irányított gráfokra.

17. A.Bázistranszformáció
Transzformáció mátrixa, ha áttérünk másik bázisra. Mátrixok diagonalizálása. Algebrai és geometriai multiplicitás. A diagonalizálás elégséges feltétele.
17. D. Gráfok bejárása és súlyozott gráfok.
Bináris fák bejárási módjai (műveleti fák). **Súlyozott gráf fogalma. Kruskal, Prim, Dijkstra algoritmusok irányítatlan gráfokra.**

Szigorlati írásbelivel kapcsolatos információk

Az írásbeli főként feladatokból áll, melynek típusai alább találhatók. **Mindenképpen szerepel pár elméleti kérdés is:** ez lehet tétel kimondása, definíció megadása, vagy a definíció egyszerű alkalmazásával adódó **bizonyítás** (ezekre példák a fenti tételsorban találhatók (nem a (B), hanem a **bizonyítás** szóval jelöltek). Definíció/tétel visszakérdezése lehetséges feleletválasztásos feladattal, illetve a definíció/tétel egyszerű alkalmazásával is.

Struktúrák:

Adott objektumok és műveletek, függvények, esetén: csoport, test, vektortér, altér felismerése.

Adott struktúrában adott műveletre vonatkozó egységelem, inverzelem megkeresése.

Komplex számok:

Egységgyökök megkeresése. Átszámolás egyes alakok között, különböző alakban adott komplex számokkal végzett műveletek (gyökvonás is). Komplex és valós együtthatós másodfokú egyenletek gyökeinek megkeresése.

Relációk:

Adott reláció típusának felismerése (rendezési-e, ekvivalencia-e). Hasse diagram megadása. Minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb, alsó/felső korlát és megkeresése.

Halmazelmélet:

Műveletek elvégzése, illusztrálása Venn diagrammal, szita formula alkalmazása, azonosság bizonyítása kétoldali tartalmazással.

Logika:

Nulladrendű formulák kiértékelése. De Morgan szabályok bizonyítása mind halmazelméletben, mind a nulladrendű logikában. Egyszerűbb halmazelméleti összefüggések igazolása.

Egyszerű feladatok nulladrendű rezolúcióra, formalizálásra. Interpretáció elsőrendben. Adott formula Skólemizálása (Skólem függvények és konstansok bevezetése)

Vektortér:
Függetlenség felismerése. Adott vektortér egy bázisának megadása. Bázis, generátorrendszer felismerése, bizonyítása. Skalárszorzat, vektoriális szorzat, vegyesszorzat kiszámítása, sík egyenletének felírása adott normálvektor és pont, illetve 3 pont esetén. Normálvektor megadása.

Rang kiszámítása, egyenletrendszerek megoldhatóságánál alkalmazása.

Adott leképezésről eldönteni, lineáris leképezés-e. A sík mátrix segítségével megadott lineáris transzformációinak felismerése, vagy a leképezés, transzformáció mátrixának megadása.

Fontos a spec. transzformációk (szimm, hermitikus, ferdén szimm., ferdén herm., ortogonális, unitér) felismerése, tulajdonságaik feladatokban való alkalmazása, sajátértékeik, sajátvektoraik kiszámítása mind valós mind komplex esetben.

Altér felismerése, adott leképezés esetén képtér, magtér megadása.

Egyszerűbb mátrixú transzformációk (pl. alsó háromszög nulla, vagy 2 x 2 –es mátrixú) sajátértékének, sajátvektorának kiszámítása, komplex esetben is. Egyszerűbb geometriai transzformációk sajátvektorainak, sajátértékeinek felismerése számolás nélkül (pl. tükrözések, vetítések).

Olyan (Minimál)polinom megadása egyszerű síkbeli transzformációk esetében, melynek gyöke az adott transzformáció.

2 x 2 mátrixú kvadratikus alakok diagonalizálása, a síkgörbe felismerése. 2 x 2 mátrix, vagy nagyon egyszerű struktúrájú (pl. alsó háromszög nulla) mátrixok diagonalizálása.

Legfeljebb 3 x 3-as mátrix rangjának kiszámítása.

Determináns, egyenletrendszer:

Legfeljebb 3 x 3-as determináns értékének kiszámítása.

Egyenletrendszer megoldása inverz mátrix segítségével (nagyon egyszerű mátrixok, vagy 2 x 2 -s esetben). Cramer szabály felírása adott egyenletrendszerre (annak megoldása nélkül).

Kombinatorika:

Egyszerűbb, képlet alapján könnyen kiszámítható kombinatorikai feladatok.

Összeg- és szorzatszabály, permutáció, variáció, kombinációta vonatkozó formulák alkalmazása.

Szita formula alkalmazása. Binomiális tétel alkalmazása. Binomiális együtthatók kiszámítása. A skatulya-elv alkalmazása.

Függvények nagyságrendjének megállapítása.

Gráfok:

Kruskal, Prím, Dijkstra algoritmusok bemutatása példán keresztül.

Euler út/kör keresése adott gráfban..

Izomorf gráfok felismerése, adott gráf Prüfer kódjának megadása. Prüfer kódból a gráf egy lehetséges lerajzolása. Adott gráfokra izomorfia megadása.

Színezés megadása, Euler kör/út megadása, Hamilton kör/út létezésének eldöntése, egyszerűbb esetekben megadása.

Hálózati folyamok:

Adott hálózat és folyam esetén folyam érték és minimális vágás megadása.

Euklideszi terek:

Eldönteni adott függvényről, hogy skalárszorzat-e, metirka-e, norma-e. Adott skalárszorzatból normát, metrikát származtatni.

Adott Euklideszi térben skalárszorzat, norma, metrika kiszámítása. Egyszerűbb 2-, 3 dimenziós esetekben merőleges kiegészítő megadása. Ortogonalitás felismerése. Adott ortogonalizálási folyamatról felismerni, hogy helyes-e (Pl. ha éppen Gram-Schmidt, akkor helyes).