KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Gyakorló feladatok megoldásai

2015. május 22.

Komplex számok, ismétlés

5.1. $i^{3/4} = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k}{4}2\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k}{4}2\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$

5.2. $e^{1-i\pi/4} = e \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$

5.3 $-2 + 2i.$

5.4 $-1 + i.$

5.5 $-1 + 5i.$

5.6 $\sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3})\right).$

5.7 $\frac{1}{2}(-1 + 3i).$

5.8 $\frac{51}{64} + \frac{13}{32}i.$

Komplex függvények értelmezése

5.9. $\{f(z) = w \ : \ |w| = 2\}.$

5.10. $\{f(z) = w \ : \ \mathrm{Im}(w) < 0\}.$

5.11. $\{f(z) = w \ : \ \mathrm{Im}(w) > \mathrm{Re}(w)\}.$

5.12. $\{f(z) = w \ : \ -1 < \mathrm{Re}(w) < 1, \ \mathrm{Im}(z) > 0\}.$

5.13. A tartomány határa a komplex egységkör, ennek nézzük meg a képét. Az $f(z)$ függvény z-t elöször megszorozza $-i$-vel, majd hozzáad -1-t.

1. lépés: $-i$-vel való szorzás egy komplex szám hosszát nem vátoztatja meg, és elforgatja $-\pi/2$ szöggel. Ezért az egysgkör képe $-i$-vel való szorzás után önmaga marad.
2. lépés: -1-t hozzá adva az origó közepű egységkör a $z_0 = -1$ körüli egységkörbe megy át.

A megadott tartomány képe tehát $\{f(z) = w \ : \ |w+1| < 1\}$.

5.14. A tartomány határa a komplex egységkör. Ennek minden pontját ugyanazzal a számmal, $z_0 = (-1+i)$-vel szorozzuk. $|z_0| = \sqrt{2}$, ezért $\sqrt{2}$-szeresére nő a számok abszolút értéke. Így egy origó körüli kör képe önmaga marad. Ezért a megadott tartomány képe: $\{f(z) = w \ : \ |w| > \sqrt{2}\}$.

5.15. $\{f(z) = w : \ \mathrm{Re}(w) > 0\}$.

5.16. A megadott tartomány képe a $w_0 = \dfrac{1}{2}$ körüli, $\dfrac{1}{2}$ sugarú kör belsejének az a fele, ahol $\{\mathrm{Im}(w) < 0\}$. Kompakt alakban:

$$\{f(z) = w \ : \ |w - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}, \ \mathrm{Im}(w) < 0\}.$$

5.17. A határon $z = x + ic$, ennek képe:

$$f(x+ic) = \frac{1}{x+ic} = \frac{x}{x^2+c^2} - i\frac{c}{x^2+c^2} = w.$$

Belátható, hogy ez egy kör, éspedig:

$$\left|w - \frac{i}{2c}\right|^2 = \frac{x^2}{(x^2+c^2)} + \left(\frac{c}{x^2+c^2} - \frac{1}{2c}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^2+c^2}{(x^2+c^2)^2} - \frac{1}{x^2+c^2} + \frac{1}{4c^2} = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

Ezért a megadott tartomány képe:

$$f(D_3) = \{w \ : \ \left|w - i\frac{1}{2c}\right| < \frac{1}{2c}\}.$$

Komplex függvények differenciálhatósága

5.18. A függvény az egész számsíkon differenciálható. $f(z) = -iz^3$.

5.19. A függvény a $z = 0$ kivételével mindenütt differenciálható.

5.20. A függvény a $z = 0$ kivételével mindenütt differenciálható.

5.21. A függvény sehol sem differenciálható.

5.22. A függvény differenciálható.

5.23. A függvény csak a $z = 0$ pontban differenciálható.

5.24. A függvény nem differenciálható.

5.25. A függvény nem differenciálható. $f(z) = e^{\overline{z}}$.

5.26. A függvény differenciálható.

5.27. A függvény csak a $z = i$ pontban differenciálható.

5.28. A függvény differenciálható.

5.29. A függvény nem differenciálható.

Harmonikus függvények

5.30. Harmonikus, harmonikus társa $v(x, y) = x^2 - (1 - y)^2$.

5.31. Harmonikus, harmonikus társa $v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3$.

5.32. Harmonikus, harmonikus társa $v(x, y) = -\operatorname{ch}(x) \cdot \cos(y)$.

5.33. Harmonikus, harmonikus társa $u(x, y) = e^x \cdot \cos(y)$.

5.34. Harmonikus, harmonikus társa $u(x, y) = \cos(x) \cdot \operatorname{ch}(y)$.

5.35. $C = 1$, ekkor harmonikus társa $v(x, y) = -2xy + 2x$.

5.36. $C = 3$. A derivált $f'(z) = 6xy - i(3x^2 - 3y^2)$. A $z_0 = 1 + i$ pontban $f'(z_0) = 6$.

5.37. $f'(z) = -\operatorname{ch}(x)\sin(y) + \operatorname{sh}(x)\cos(y)$. A $z_0 = i$ pontban $f'(z_0) = \sin(1)$.

5.38. $f'(z_0) = i$.

5.39. $C = 1$. A derivált $f'(z) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} - i\dfrac{2y}{x^2 + y^2}$. A $z_0 = i$ pontban $f'(i) = -2$.

Komplex vonalintegrál

5.40. Newton-Leibniz formulát használva:

$$\int_\Gamma (z^2 + 1)\, dz = \left[\frac{z^3}{3} + z\right]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} + (1 + i) = \frac{1 + 5i}{3}.$$

5.41.

$$f(z) = \frac{z + 2}{z} = 1 + \frac{2}{z}, \qquad z(\varphi) = 2e^{i\varphi},\ z'(\varphi) = 2ie^{i\varphi} 1 \le \varphi \le \pi$$

1.

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(1+\frac{2}{2e^{i\varphi}}\right)2ie^{i\varphi}d\varphi &= 2i\int_0^\pi \left(e^{i\varphi}+1\right)d\varphi = 2i\left[\frac{e^{i\varphi}}{i}+\varphi\right]_0^\pi = \\ &= 2\Big[e^{i\varphi}+i\varphi\Big]_0^\pi = \\ &= 2\left(\cos\pi + i\sin\pi + i\pi - 1\right) = \\ &= 2i\pi - 4.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}2i\int_0^{-\pi}\left(e^{i\varphi}+1\right)d\varphi &= 2i\left[\frac{e^{i\varphi}}{i}+\varphi\right]_0^{-\pi} = 2\left[e^{i\varphi}+i\varphi\right]_0^{-\pi} = \\ &= 2[\cos(-\pi) - i\pi + i\sin(-\pi) - 1] = -4 - 2i\pi\end{aligned}$$

3. $4i\pi$.

5.42. A görbe paraméterezése: $\Gamma = \{z(t) = e^{it}+1,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$.

A függvény $f(z) = z-1$. Behelyettesítéskor $z'(t) = ie^{it}$, így az integrál:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_0^\pi \left(e^{it}+1-1\right)\ ie^{it}\ dt = i\left[\frac{e^{2it}}{2i}\right]_0^\pi = 0.$$

5.43. 0.

5.44. (a) A zárt görbe megkerüli a $z_0 = 1$ komplex számot. Cauchy formulát alkalmazva az $f(z) = e^z$ analitikus függvényre $z_0 = 1$ választással:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz = e^1,$$

ezért az integrál értéke $e^1 \cdot 2\pi i$.

5.45. $1+e$.

Elemi függvények kiterjesztése

5.46. $\ln(2) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi),\ \ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

5.47. $\frac{1}{2}\ln(2) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi),\ \ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

5.48. $\ln(-i) = i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right),\ \ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

5.49. $e^{-\pi/3+2k\pi}(\cos(\ln(2)) + i\sin(\ln(2))),\ \ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

5.50. $2(\cos(\ln(2)) + i\cos(\ln(2)) + i\sin(\ln(2))),\ \ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

5.51. $2(\cos(\ln(2)) + i\cos(\ln(2)) - i\sin(\ln(2))),\ \ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

5.52. $(2k+1)\pi i,\ \ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$