



Lineáris Algebra Szigorlat Szóbeli Tételsor

Vitéz Alexandra Szilvia



I. Vektoralgebra

A 3 dimenziós vektorok tere. Lineáris kombináció fogalma. **Síkbeli felbontási tétel** (B). Térbeli felbontási tétel. **Lineáris kombináció, koordináta fogalma.** Speciális műveletek: **skaláris szorzat, vektoriális szorzat és erre vonatkozó tételek, geometriai jelentésük.** Sík normálvektoros egyenlete (B). Pont és sík távolsága. Vektor összetevőkre bontása és merőleges kiegészítő.

A 3 dimenziós vektorok tere

Definíció: Vektor

Az irányított szakaszt vektornak nevezzük.

Matematikában szabad vektorokról beszélünk, ezért a vektor kezdőpontja nem lényeges.

Definíció: Egyenlő vektorok

Két vektor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik.

Definíció: Párhuzamos vektorok

Két vektor párhuzamos, ha irányuk egyező, vagy ellentétes.

Definíció: Vektorok összege

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok összegét úgy kapjuk, hogy $\underline{b}$ kezdőpontját az $\underline{a}$ vektor végpontjába toljuk; az összeg az $\underline{a}$ vektor kezdőpontjából a $\underline{b}$ vektor végpontjába mutat.

Tulajdonságai:

1. **Kommutatív:** $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
2. **Asszociatív:** $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$
3. **Létezik egységeleme:** $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$
4. **Létezik inverz:** $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$

Definíció: Nullvektor

A nullvektor kezdő- és végpontja ugyan az a pont ($|\underline{0}| = 0$), iránya pedig tetszőleges. Ez a vektor a vektorokon értelmezett összeadás egységeleme.

Definíció: Ellentett vektor

Az $\underline{a}$ vektor összeadásra vonatkozó inverzét az $\underline{a}$ vektor ellentettjének nevezzük.

Jelölése: $-\underline{a}$

Síkbeli felbontási tétel

Tétel: Síkbeli felbontási tétel

Ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor, $\underline{a}$ és $\underline{b}$, akkor minden más $\underline{c}$ síkbeli vektor felbontható e két vektorral párhuzamos összetevőkre, melyek összege adja a $\underline{c}$ vektort: $\underline{c} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ez a felbontás egyértelmű.

Bizonyítása:

1. **A felbontás**

A $\underline{c}$ vektor kezdőpontján át húzzunk $\underline{a}$ -val, illetve végpontján át $\underline{b}$ -vel párhuzamos egyeneseket. Mivel $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem párhuzamos vektorok, ezért M pontban metszeni fogják egymást. Legyen 'A' a $\underline{c}$ vektor kezdőpontja, 'B' pedig a $\underline{c}$ vektor végpontja. Mivel AM szakasz párhuzamos az $\underline{a}$ vektorral, ezért létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, amelyre $\overrightarrow{AM} = \alpha \underline{a}$; hasonlóan MB szakasz párhuzamos a $\underline{b}$ vektorral, ezért létezik olyan $\beta \in \mathbb{R}$, hogy $\overrightarrow{MB} = \beta \underline{b}$, ezért $\underline{c} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$.

2. **Ez a felbontás egyértelmű.**

Tegyük fel, hogy a $\underline{c}$ vektornak két ilyen felbontása van, majd vonjuk őket ki egymásból. Ekkor az $\underline{a}$ vektor együtthatóit ki kell vonni egymásból, illetve a $\underline{b}$ vektor együtthatóit is ki kell vonni egymásból, majd a két számszoros vektort összeadva az eredményünk a $\underline{0}$ vektor lesz. Két vektor összege akkor és csak akkor lehet $\underline{0}$, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és ellentétes irányúak. Mivel a két vektor nem párhuzamos, így számszorosaik sem lesznek párhuzamosak, ezért számszorosaik összege sem lehetne nulla a jobb oldalon. Tehát α és β együtthatóiknak egyenlőnek kell lennie 0-val, tehát a két együttható nem lehet különböző.

Térbeli felbontási tétel

Tétel: Térbeli felbontási tétel

Ha adott a térben három, nem egysíkú $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektor, akkor bármely $\underline{d}$ térbeli vektorhoz van olyan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, amelyekre igaz, hogy $\underline{d} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$. Ez a felbontás egyértelmű.

Lineáris kombináció, koordináta fogalma

Definíció: Lineáris kombináció

Legyenek α , β és γ valós számok.

Az $\underline{a}$ vektor lineáris kombinációja az $\alpha \underline{a}$ kifejezés.

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok lineáris kombinációja az $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ kifejezés.

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok lineáris kombinációja az $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} + \gamma \underline{c}$ kifejezés.

Definíció: Koordináta

Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy síkbeli vektorok, melyek közül $\underline{a}$ és $\underline{b}$ bázist alkot. Ekkor $\underline{c} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ lineáris kombinációban szereplő α és β valós számokat a $\underline{c}$ vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük. A koordináták egyértelműek.

A bázisvektorok sorrendjét rögzítettnek tekintjük, és a vektorok koordinátáit e sorrend szerint írjuk fel.

Definíció: Vektor mátrixos felírása

Legyen a sík egy bázisa $[\underline{b}] = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$. Ha $\underline{c} = \alpha \underline{b}_1 + \beta \underline{b}_2$, akkor a $\underline{c} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}_{[\underline{b}]}$ $= [\alpha \quad \beta]^T_{[\underline{b}]}$.

Speciális műveletekre vonatkozó tételek és geometriai jelentésük

Skálárszorzat (belső szorzat)

A Skálárszorzat függvény: Két vektorhoz egy számot rendel hozzá. Angolul "Dot product", vagy "Inner product" a neve.

Két vektor által bezárt szög

$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ és mindig a kisebbik szöget választjuk. Pozitív irány a balra forgatás, negatív pedig a jobbra forgatás.

Ha a bezárt szög 0 vagy 180, akkor a vektorok párhuzamosak; ha 0, akkor egyirányúak, ha pedig 180, akkor ellentétes.

Definíció: Két vektor skálárszorzata

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skálárszorzatán azt az $\underline{a} \cdot \underline{b}$ -vel jelölt számot értjük, amelyre

$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\alpha)$, ahol α a két vektor által bezárt szög.

A skálárszorzat geometriai jelentése:

Tekintsük azt a speciális esetet, amikor az $\underline{e}$ -vel jelölt egyik vektor az egységvektor:

$\langle \underline{a}, \underline{e} \rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{e}| \cdot \cos(\alpha) = x$, amely az $\underline{a}$ vektor $\underline{e}$ -re vetett **merőleges vetületének előjeles hossza**.

Tétel: Egymásra merőleges vektorok skálárszorzata

Két vektor skálárszorzata akkor és csak akkor nulla, ha azok egymásra merőlegesek.

Lemma: Skálárszorzat pozitív definit

Az $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle$ skálárszorzatra $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle > 0$, ha $\underline{a} \neq \underline{0}$, és $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{a} = \underline{0}$. A skálárszorzat pozitív definit.

Skálárszorzat tulajdonságai:

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok skálárszorzata függvény: $\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos(\alpha)$

1. Pozitív definit

2. Szimmetrikus

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle$$

3. Homogén

$$u \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle u \underline{a}, \underline{b} \rangle$$

4. Lineáris

$$\langle \underline{a}, (\underline{b} + \underline{c}) \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle + \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$$

Tétel: Koordinátáikkal adott vektorok skálárszorzata ortonormált bázisban

Adott a tér egy ortonormált bázisa, és az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok e bázisra vonatkoztatott koordinátáikkal: $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ illetve $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$. Az $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ skálárszorzat ekkor a következőképpen számolható ki:

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Vektoriális szorzat

Definíció: Jobbrendszer

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ha közös kezdőpontból ábrázolva őket a $\underline{c}$ vektor irányából nézve az $\underline{a}$ vektort, 180-nál kisebb szögű pozitív irányú forgatás vigye át a $\underline{b}$ vektor irányába. Ez magyarul azt jelenti, hogyha ezt a jobb kezünkkel szeretnénk modellezni, akkor az $\underline{a}$ vektort a jobb kezünk hüvelykujja, a $\underline{b}$ vektort a mutatóujja, $\underline{c}$ vektort pedig a középső ujjja szimbolizálja.

Definíció: Vektoriális szorzat

Két vektor, $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoriális szorzatán azt az $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelölt vektort értjük, amelyre:

1. $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin(\angle \underline{a}, \underline{b})$
2. Az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor iránya mind $\underline{a}$ -ra, mind $\underline{b}$ -re merőleges, és velük jobbrendszerűt alkot.

Másképp:

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzatán azt az $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel jelölt vektort értjük, amelyre igaz, hogy $\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin(\angle \underline{a}, \underline{b}) \underline{e}$, ahol $|\underline{e}|=1$, $\underline{a}$ merőleges $\underline{e}$ -re, $\underline{b}$ merőleges $\underline{e}$ -re és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{e}$ jobbrendszerűt alkotnak.

A vektoriális szorzat geometriai jelentése

Képzeljünk el egy paralelogrammát, amelynek egyik alapja az $\underline{a}$ vektor, másik alapja pedig a $\underline{b}$ vektor. Ezen vektorok által közrezárt szög α . A paralelogramma magassága a $\underline{b}$ vektor végpontjából húzott szakasz, amely merőleges az $\underline{a}$ vektorra. Erre a szakaszra igaz, hogy hossza $m = |\underline{b}| \sin(\alpha)$. A vektoriális szorzat geometriai jelentése az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe, ugyanis a magasságot megszorozom az egyik alap hosszával. $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin(\alpha) = \text{alap} \cdot \text{magasság}$.

Tétel: Párhuzamos vektorok vektoriális szorzata

Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata akkor és csak akkor a nullvektor, ha a vektorok párhuzamosak.

Vektoriális szorzat tulajdonságai

1. **Antikommutatív**

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$$

2. **Nem asszociatív**

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$$

3. **Disztibutív**

$$(\underline{a} + \underline{b}) \times \underline{c} = (\underline{a} \times \underline{c}) + (\underline{b} \times \underline{c}) \text{ illetve } \underline{a} \times (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} \times \underline{b}) + (\underline{a} \times \underline{c})$$

Tétel: Koordinátáikkal adott vektorok vektoriális szorzata ortonormált, jobbrendszerű bázisban

Adott a tér egy ortonormált, jobbrendszerű bázisa, és az $\underline{a}$, $\underline{b}$ vektorok az e bázisra vonatkoztatott koordinátáikkal: $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$. Az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoriális szorzat ekkor a következőképpen számolható ki:

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \underline{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \underline{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \underline{k}$$
$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Sík normálvektoros egyenlete

Definíció: Normálvektor

Ha az $\underline{n}$ vektor merőleges az S síkra, akkor ez a vektor a sík normálvektora. Egy síknak végtelensok normálvektora van.

Tétel: Sík normálvektoros egyenlete

Ha az S sík egyik normálvektora $\underline{n}$, egy adott pontja P_0 , ebbe mutató helyvektor $\underline{p}_0$, a sík tetszőleges pontja P , az ebbe mutató helyvektor $\underline{p}$, akkor a sík egyenlete: $\langle \underline{n}, (\underline{p} - \underline{p}_0) \rangle = 0$.

Bizonyítása:

Ha $\underline{n}$ merőleges a síkra, merőleges annak minden vektorára, így a $\underline{P_0P}$ vektorra is, ezért a skalárszorzatuk 0: $\langle \underline{n}, \underline{P_0P} \rangle = 0$. Mivel $\underline{P_0P} = \underline{p} - \underline{p}_0$, ezért $\langle \underline{n}, (\underline{p} - \underline{p}_0) \rangle = 0$.

Pont és sík távolsága

Adott S sík, amelynek egy pontja P_0 . A pont, amelynek a távolságát szeretnénk megtudni a síktól, legyen A . Ekkor az A pont és az S sík távolsága, hogyha $\underline{n}$ a sík normálvektora:

$$d = \frac{AP_0}{|\underline{n}|}$$

Vektorok összetevőire bontása, és merőleges kiegészítő

Tétel: Vektorok felbontása

Adottak az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok. Az $\underline{a}$ vektor felírható a $\underline{b}$ vektorral párhuzamos $\underline{a}_p$, és a $\underline{b}$ vektorral merőleges $\underline{a}_m$ vektorok összegeként: $\underline{a} = \underline{a}_p + \underline{a}_m$

Merőleges kiegészítő

A merőleges kiegészítőt a következőképp kaphatom meg:

$$\underline{a}_m = \underline{a} - \underline{a}_p$$
$$\underline{a}_p = \frac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}{|\underline{b}|^2} \cdot \underline{b}$$



Lineáris függetlenség, összefüggőség fogalma. Vektorokból elvéve, hozzávéve, hogyan változik e tulajdonság (B). **Bázis és generátorrendszer fogalma.** Példák a legfeljebb másodfokú, és az $m \times n$ -es mátrixok vektorteréből.

II. Lineáris függetlenség, összefüggőség

Lineáris függetlenség, összefüggőség fogalma

Definíció: Lineárisan független vektorok

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorokat **lineárisan független** vektoroknak nevezzük, ha egyik sem írható fel a másik vektorok lineáris kombinációjaként. A $\underline{0}$ vektor ezen vektorok triviális lineáris kombinációjaként áll elő.

Definíció: Lineárisan összefüggő vektorok

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok **lineárisan összefüggő** vektoroknak nevezzük, ha valamely vektor felírható a másik vektorok lineáris kombinációjaként. A $\underline{0}$ vektor ezen vektorok nem triviális lineáris kombinációjaként kifejezhető.

Tétel: Lineárisan összefüggő vektorokból kifejezhető vektor

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok pontosan akkor lineárisan összefüggők, hogyha létezik olyan $\underline{v}_j$ vektor, amely előáll a többi lineáris kombinációjaként.

Vektorokból elvéve, hozzávéve hogyan változik ez a tulajdonság

Lemma: Vektorok rendszere tartalmazza a nulla vektort

Ha a vektorok rendszere a nulla vektort is tartalmazza, akkor nem lehetnek lineárisan függetlenek.

Bizonyítása:

Vektorok rendszere akkor és csak akkor összefüggő, ha lineáris kombinációjuk nem triviális módon állítja elő a $\underline{0}$ vektort. Mivel a $\underline{0}$ vektor is része ennek a vektorrendszernek, ezért ezt bármely skalárral szorozva továbbra is a $\underline{0}$ vektort kapom. Tehát, ha a többi vektor együtthatója 0, akkor is van egy vektor, amelynek az együtthatója nem egyenlő nullával - hiszen bármi lehet- tehát a vektorok összefüggnek.

Tétel: Független vektorokhoz egy vektort hozzáadunk

Ha a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, és egy további, $\underline{v}_{n+1}$ vektor hozzáadásával lineárisan összefüggővé válnak, akkor ezen $\underline{v}_{n+1}$ vektor kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Bizonyítása:

A $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_j \underline{v}_j + \dots + \alpha_n \underline{v}_n + \alpha_{n+1} \underline{v}_{n+1} = \underline{0}$ lineáris kombinációban van olyan α_i , amely nem nulla: $\alpha_i \neq 0$. Azt már láttuk, hogy azok a vektorok, amelyekhez tartozó skalár együttható a lineáris kombinációban nem nulla, előállíthatók a többi vektor lineáris kombinációjával.

Eszerint csak azt kell bizonyítani, hogy $\alpha_{n+1} \neq 0$. Ha $\alpha_{n+1} = 0$ és ismét lenne, akkor a

$$\left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{v}_i \right] + 0 \cdot \underline{v}_{n+1} = \underline{0}$$

lineáris kombinációban ez a nem nulla együttható a $\sum$ jel utáni α_i -k egyike lenne, úgy, hogy pl. $\alpha_k \neq 0$, vagyis az eredeti vektorok nem triviális lineáris kombinációjával előállítanák a nullvektort. Ez azt jelentené, hogy a vektorok lineárisan összefüggők. Ez ellentmondás, tehát az eredeti állításunk igaz volt.

A $\underline{v}_{n+1}$ vektor kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

Tétel: Összefüggő vektorokhoz hozzáadunk egy vektort

Ha a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor tetszőleges vektort hozzáátve továbbra is lineárisan összefüggők maradnak.

Bizonyítás:

Tekintsük a nullvektort előállító lineáris kombinációt, ebben legyen $\alpha_j \neq 0$:

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_j \underline{v}_j + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

Vegyünk hozzá még egy $\underline{v}_{n+1}$ vektort e lineáris kombinációhoz úgy, hogy $\alpha_{n+1} = 0$ legyen, és az összes többi skalár ugyanaz marad.

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_j \underline{v}_j + \dots + \alpha_n \underline{v}_n + \alpha_{n+1} \underline{v}_{n+1} = \underline{0}$$

Ebben a lineáris kombinációban is $\alpha_j \neq 0$, hiszen így választottuk meg a lineáris kombinációt. Mivel teljesül, hogy a nullvektort előállító lineáris kombinációban egyik skalár nem nulla, ezért a vektorok lineárisan összefüggők.

Tétel: Független vektorokból elveszünk egy vektort

Ha a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok függetlenek, tetszőleges vektort elhagyva a maradék vektorok függetlenek maradnak.

Bizonyítása:

Az előző tételt használjuk fel. Indirekt módon feltesszük, hogy már elhagytunk egy vektort, és az így kapott rendszer lineárisan összefüggő lett. Az előző tétel szerint, ha lineárisan összefüggő vektorokhoz egy újabb vektort adunk, akkor azok lineárisan összefüggők maradnak, ez viszont ellentmondás, mert az eredeti vektoraink lineárisan függetlenek voltak.

Bázis és generátorrendszer fogalma

Definíció: Bázis

A V vektortérbeli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok a V bázisát alkotják, ha

1. Minden V -beli vektor előáll lineáris kombinációjukként
2. $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

A V vektortér lineárisan független vektorokat tartalmazó generátorrendszerét **bázisnak** nevezzük.

Definíció: Generátorrendszer

Azok a vektorok, amelyek lineáris kombinációjukként a vektortér minden eleme előáll, **generátorrendszert** alkotnak.

Példák a legfeljebb másodfokú polinomok és az $m \times n$ -es mátrixok vektorteréből

Legfeljebb másodfokú polinomok

Legfeljebb másodfokú polinomok tere háromdimenziós, ezért bármely bázisának pontosan három bázisvektorból kell állnia.

Bázisra példa:

$$[b] = \{x^2; x; 1\}$$

Ezen három bázisvektor segítségével bármely legfeljebb másodfokú polinom előállítható.

Az $m \times n$ -es mátrixok

Az $m \times n$ -es mátrixok tere $m \times n$ dimenziós, ezért bármely bázisának pontosan $m \times n$ bázisvektorból kell állnia.

Bázisra példa:

$m \times n$ darab olyan mátrix, amelyek esetén minden mátrixban csak egyetlen egy egyes áll, különböző pozíciókon.

Ezen $m \times n$ bázisvektor segítségével bármely $m \times n$ -es mátrix előállítható.



Lineáris tér (vektortér) fogalma. Axiómák következményei.
Vektorrendszer függetlensége és rangja. **Bázis, koordináták, dimenzió.** Dimenzió ekvivalens megfogalmazásai. Kicserélési tétel (B).

III. Lineáris tér

Lineáris tér (vektortér) fogalma

Definíció: Vektortér

A V nemüres halmazt **vektortérnek** nevezzük a T test felett, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

- A V **halmazon** értelmezve van egy **összeadás** nevű művelet, amely bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ elemekhez egyértelműen hozzárendel egy V -beli elemet, amelyet $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ -vel jelölünk. Az **összeadás kommutatív csoport**.
- A T **test és a V halmaz** között értelmezve van a **skalárral való szorzás**. Ha bármely $u \in T$ úgynevezett skalárhoz és bármely $\underline{v} \in V$ úgynevezett vektorhoz egyértelműen hozzárendelünk egy V belüli elemet, amelyet $u\underline{v}$ -vel jelölünk. A skalárszoros a következő tulajdonságokkal rendelkezik:
 1. $1\underline{v} = \underline{v}$, ahol 1 a T test szorzásra vonatkozó egységeleme
 2. **Vegyes asszociatív szabály:**
 $(uk)\underline{v} = u(k\underline{v})$.
 3. **Vegyes disztributív szabály:**
 - a) $(u+k)\underline{v} = u\underline{v} + k\underline{v}$
 - b) $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)u = u\underline{v}_1 + u\underline{v}_2$

Axiómák következményei

Tétel: Altér

Legyen V vektortér valamely T test felett, és W részhalmaza V -nek. W akkor és csak akkor altér V -nek, ha minden $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W$ -re és $u \in T$ -re igaz, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in W$ -nek, $u\underline{v}_1 \in W$ -nek.

Tétel:

Bármely u eleme T -re $u\underline{0} = \underline{0}$, ahol $\underline{0}$ a vektor V halmazbeli összeadás egységeleme.

Tétel:

Bármely $\underline{v}$ eleme V -re $0\underline{v} = \underline{0}$, ahol 0 a T testbeli összeadás egységeleme.

Tétel:

Bármely $\underline{v}$ eleme V -re $(-1)\underline{v} = \underline{v}^{-1}$, ahol (-1) a T testbeli szorzás egységelemének az összeadásra vonatkozó inverze, $\underline{v}^{-1}$ pedig a vektortérben a $\underline{v}$ vektor összeadásra vonatkozó inverze.

Tétel:

Ha $u\underline{v} = \underline{0}$, u eleme T , $\underline{v}$ eleme V , akkor vagy $u = 0$, vagy $\underline{v} = \underline{0}$.

Vektorrendszer függetlensége és rangja

Definíció: Vektorrendszer függetlensége

A vektorrendszer vektorai függetlenek, ha egyik sem írható fel a másik vektorok lineáris kombinációjaként. A $\underline{0}$ vektor ezen vektorok triviális lineáris kombinációjaként áll elő.

Definíció: Rang

Vektorrendszer rangján a vektorok által generált altér dimenzióját értjük.

Bázis, koordináták, dimenzió

Definíció: Bázis

A V vektortérbeli $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok a V bázisát alkotják, ha

1. Minden V -beli vektor előáll lineáris kombinációjuként
2. $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Definíció: Bázis

A V vektortér lineárisan független vektorokat tartalmazó generátorrendszerét **bázisnak** nevezzük.

Definíció: Koordináta

Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy síkbeli vektorok, melyek közül $\underline{a}$ és $\underline{b}$ bázist alkot. Ekkor $\underline{c} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$ lineáris kombinációban szereplő α és β valós számokat a $\underline{c}$ vektor $\underline{a}$, $\underline{b}$ **bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük**. A koordináták egyértelműek.

A **bázisvektorok sorrendjét rögzítettnek tekintjük**, és a vektorok koordinátáit e sorrend szerint írjuk fel.

Definíció: Dimenzió

A V vektortér egy **dimenzióján** bármely bázisának az elemszámát értjük. Adott vektortér valamennyi bázisának ugyanannyi vektora van.

Megállapodás szerint a triviális vektortér dimenziója 0. Ennek egyetlen vektora a $\underline{0}$ vektor, de ez a $\underline{0}$ vektor önmagában generátorrendszert alkot, mert a $\underline{0} = \underline{0}$.

Jelölése: $\text{DIM}(V)$.

Dimenzió ekvivalens megfogalmazásai

Ha $\text{DIM}(V) = n$, akkor

1. V -ben bármely n elemű független rendszer bázist alkot
2. V -ben bármely n elemű generátorrendszer bázist alkot
3. Egy vektortér bármely véges generátorrendszere tartalmaz bázist.

Kicserélési tétel

Tétel: Kicserélési tétel

Az $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ független vektorokból álló rendszer bármely $\underline{f}_i$ vektorához a $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_j$ generátorrendszerből található olyan $\underline{g}_k$ vektor, amellyel $\underline{f}_i$ -t kicserélve az $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_{i-1}, \underline{g}_k, \underline{f}_{i+1}, \dots, \underline{f}_n$ vektorokból álló rendszer független.

Bizonyítása: Indirekt

Tegyük fel, hogy pl. $\underline{f}_1$ -hez nem lenne egyik $\underline{g}_i$ sem jó, akkor minden egyes $\underline{g}_i$ -re a $\underline{g}_i, \underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n$ vektorok lineárisan összefüggők. Az $\underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n$ vektorok lineárisan függetlenek voltak, hiszen független rendszerből elhagyva egy vektort az független marad. Hozzájuk véve a $\underline{g}_i$ vektort, összefüggővé váltak. Ezért a $\underline{g}_i$ vektor az $\underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n$ vektorokkal kifejezhető:

$$\underline{g}_i = \sum_{k=2}^n \alpha_k \underline{f}_k$$

Az indirekt feltevés szerint, ha $\underline{g}_i$ helyett bármelyik más $\underline{g}_j$ vektort vesszük a generátorrendszerből, a fenti okfejtés ugyanúgy elmondható, tehát a generátorrendszer minden $\underline{g}_k$ vektora felírható az $\underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\underline{g}_k = \sum_{j=2}^n \alpha_{kj} \underline{f}_j$$

Ugyanakkor, mivel a $\underline{g}_k$ vektorok generátorrendszert alkotnak, ezért a tér minden vektora, így $\underline{f}_1$ is felírható lineáris kombinációjuként. A $\underline{g}_k$ vektorokba behelyettesítve azok $\underline{f}_j$ vektorokkal kifejezett alakját:

$$\underline{f}_1 = \sum_{k=1}^j \beta_{1k} \underline{g}_k = \sum_{k=1}^j \beta_{1k} \sum_{j=2}^n \alpha_{kj} \underline{f}_j$$

Az $\underline{f}_2, \dots, \underline{f}_n$ vektorok lineáris kombinációja előállítja az $\underline{f}_1$ vektort. Ez azt jelenti, hogy az $\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n$ vektorok lineárisan összefüggők lennének. Ez ellentmondás.



IV. Mátrix algebra

Mátrixok struktúrája. Műveletek (Inverz mátrix fogalma, számítási módszerei is). Egyenletrendszerek megoldása inverz mátrix segítségével. **Inverz mátrix képlete**, e képlet levezetése (B). Mátrix polinomok. **Cayley-Hamilton tétel** kimondása és példán keresztül illusztrálása. Mátrix-vektor szorzat mint lineáris kombináció.

Mátrixok struktúrája

Definíció: Mátrix

A számok táblázatos elhelyezkedését mátrixnak nevezzük. A mátrix sorai a vízszintesen elhelyezkedő elemei, a mátrix oszlopai a függőlegesen elhelyezkedő elemei.

Definíció: $m \times n$ -es mátrix

Legyen $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza, $m, n \in \mathbb{N}$ Ekkor az $\mathbb{R}$ feletti $m \times n$ -es mátrixok egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek m sora és n oszlopa van, elemei pedig valós számok.

Speciális mátrixok

Két mátrix akkor **egyenlő**, ha a pozícióikon álló elemek egyenlők.

Négyzetes (kvadratikus) mátrixnak nevezzük az $n \times n$ típusú mátrixokat.

Sorvektorok az $1 \times n$ típusú mátrixok.

Oszlopvektorok az $m \times 1$ típusú mátrixok.

Szimmetrikus a mátrix, ha $a_{ik} = a_{ki}$. Ekkor a mátrix főátlójára szimmetrikusan elhelyezkedő elemek egyenlők.

Diagonális, vagy diagonált egy mátrix, ha a főátlón kívüli elemei mind nullák.

Nullmátrix egy mátrix, ha minden eleme nulla.

Egység mátrix egy mátrix, ha csupán a főátlóban vannak elemei, és ezek mind egyesek.

Azt a négyzetes mátrixot nevezzük **permutáló mátrixnak**, amelynek mindegyik sorában és oszlopában egy darab egyes áll.

Egy mátrix **antiszimmetrikus (ferdén szimmetrikus)**, ha $A = -A^T$

Egy mátrix akkor szimmetrikus, ha $A = A^T$.

Tétel:

Minden $n \times n$ típusú mátrix felírható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összegeként.

Mátrixműveletek

Mátrixok összeadása

Ebben a részben **A**, **B**, **C** azonos típusú mátrixok.

Definíció:

Az **A** és **B** mátrixok összegén azt a **C** mátrixot értjük, amelynek adott pozíciójú elemét az **A** és a **B** mátrixok ugyanazon pozíciójú elemeinek összeadásával kapjuk: $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$

Mátrixok összeadásának tulajdonságai:

1. Kommutatív

Az összeadásban a mátrixok felcserélhetők. $A + B = B + A$

2. Asszociatív

Az összeadásban a mátrixok csoportosíthatóak. $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. Van egység

Minden **A** mátrixra és a nullmátrixra igaz, hogy $A + O = A$

4. Van inverz

Minden **A** mátrixhoz létezik **A'** ellentett mátrix, amelyre $A + A' = O$

A mátrixok összeadásra kommutatív (Abel) csoportot alkotnak.

Mátrixok szorzása

Kiindulunk a vektorok skalárszorzatából: $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Két mátrix összeszorozása hasonlóan történik:

Az egyik mátrix sorát "skalárszorozom" a másik mátrix oszlopával

Két mátrix **csak akkor szorozható** össze, ha az **első mátrixnak ugyanannyi sora** van, mint ahány **oszlopa a másodiknak** van.

Ha nem négyzetes mátrixokat szorzok össze, akkor a mátrixok szorzása nem művelet.

Definíció: Két mátrix szorzata

Az **A** mátrix $m \times n$ típusú, a **B** mátrix $n \times k$ típusú. Az **A** és **B** mátrixok szorzata az a **C** mátrix, melynek típusa $m \times k$, és elemeit a következőképpen számoljuk ki:

$$c_{ik} = \sum_{l=1}^n a_{il} \cdot b_{lk}$$

Mátrixok szorzásának tulajdonságai

1. Nem kommutatív

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} \neq \mathbf{B} * \mathbf{A}$$

2. Asszociatív

$$\mathbf{A} * (\mathbf{B} * \mathbf{C}) = (\mathbf{A} * \mathbf{B}) * \mathbf{C}$$

3. Disztibutív az összeadásra nézve azonos típusú mátrixok esetén

$$\mathbf{A} * (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} * \mathbf{B}) + (\mathbf{A} * \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) * \mathbf{A} = (\mathbf{B} * \mathbf{A}) + (\mathbf{C} * \mathbf{A})$$

4. Csak $n \times n$ -es mátrixokra:

Létezik egység

Létezik inverz

Mátrixok transzponáltja

Definíció: Mátrix transzponáltja

Legyen **A** $k \times n$ típusú mátrix. Ekkor a transzponáltján azt a **B**, $n \times k$ típusú mátrixot értjük, amelynek elemeire $b_{ij} = a_{ji}$. Az **A** mátrix transzponáltját

$\mathbf{A}^T$ -vel jelöljük.

Definíció: Szimmetrikus mátrix

Az **A** mátrix **szimmetrikus**, ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$

Tételek:

Összeg transzponáltja a transzponáltak összege: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Szorzat transzponáltja a tényezők transzponáltjainak a tényezők felcserélésével kapott szorzata: $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

Transzponált inverze egyenlő az inverz transzponáltjával: $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

Mátrix számszorosa

Definíció:

Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Az $m \times n$ típusú **A** mátrix λ számszorosa az a **B** mátrix, melynek elemeire igaz:

$$b_{ik} = \lambda \cdot a_{ik}$$

Mátrix polinomok

Számot behelyettesítve egy polinomba, és elvégezve a kijelölt műveleteket, ha az **eredmény nulla**, akkor a **szám gyöke** a polinomnak.

Négyzetes mátrixot behelyettesítve a polinomba, és a műveleteket elvégezve, ha az **eredmény a nullmátrix**, akkor a **mátrix gyöke** a polinomnak.

Tétel: Cayley-Hamilton tétel

Minden homogén lineáris leképezés gyöke a saját karakterisztikus polinomjának. Minden $n \times n$ mátrix gyöke a saját karakterisztikus polinomjának.

Példa:

Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Ekkor A karakterisztikus polinomja

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

Így (E jelöli az egységmátrixot):

$$p(A) = A^2 - 5A - 2E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ami egybevág a tétel állításával.

Négyzetes mátrixok szorzásra vonatkozó inverze

Definíció: Inverz elem

Legyen adott matematikai objektumok halmaza H , és $*$ jelentsen egy ezen a H halmazon értelmezett, kétváltozós műveletet. Azt mondjuk, hogy a h^{-1} eleme H a $*$ műveletre nézve, és az e egységelemre nézve a h **inverz eleme**, ha $h * h^{-1} = e$.

Definíció: Mátrix inverze

Legyen A $n \times n$ -es mátrix. Azt az A^{-1} -gyel jelölt $n \times n$ -es mátrixot amelyre $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$, az A mátrix **inverzének** nevezzük.

Fontos, hogy a mátrixok **szorzásra** vonatkozó inverzét **inverz mátrixnak**, **összeadásra** vonatkozó inverzét pedig **ellentett mátrixnak** nevezzük.

Az **inverz egyértelmű**.

Tétel:

Ha az A mátrixnak van baloldali inverze, és jobboldali inverze, akkor az egyértelmű.

Mátrix inverzének kiszámítása:

A Mátrix mellé illesztjük az egységmátrixot, majd addig végezzük a Gauss-Jordan eliminációt, amíg a bal oldalon jelenik meg az egységmátrix, jobb oldalon pedig az inverzmátrix.

Ha az **inverzmátrix nem létezik**, akkor a mátrix **szinguláris**.

Inverz mátrix tulajdonságai

1. Ha az A mátrix invertálható, inverzének inverze önmaga.
2. Ha az A és B mátrixok invertálhatók, akkor szorzatuk is invertálható, és inverze a tényezők inverzeinek fordított sorrendben való szorzata: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Ha a C mátrix invertálható, akkor a mátrixegyenletet lehet a szokásos módon rendezni:

$$AC = BC \rightarrow A = B$$

$$CA = CB \rightarrow A = B$$

Hogyan vezetjük le a mátrix inverzének kiszámítását?

Adott egy mátrix, amelynek az inverzét keressük. Az inverz mátrix minden pozícióján a megfelelő indexxel ellátott ismeretlen, x áll. Ha ezt a két mátrixot összeszorozom: Az eredeti mátrix első sorát meg kell szoroznom az inverz mátrix első oszlopával, ennek eredménye az egységmátrix megfelelő pozícióján lévő elem, jelen esetben az 1.

3×3 mátrix esetén háromszor három azonos egyenletünk lesz, amelyek csak konstansban (0 vagy 1) térnek el egymástól. Viszont mind a 3 egyenletrendszernek azonos az együtthatómátrixa, és a Gauss-Jordan eliminációban pontosan ugyanazokat a lépéseket hajtánánk végre többször. Ezért felesleges háromszor leírni az együttható-mátrixot, elegendő, ha mellé illesztjük a megfelelő konstansok oszlopvektorait.

Tehát röviden ez azt jelenti, hogy az eredeti mátrix mellé illesztjük az egységmátrixot, és Gauss-Jordan eliminációt addig hajtunk végre, amíg nem lesz a bal oldalon egységmátrix.

Négyzetes mátrix inverze determinánssal

Definíció: Adjungált

Az **A** négyzetes mátrix (klasszikus) **adjungáltján** az $\text{adj}(\mathbf{A}) = (D_{ki})$ mátrixot értjük. Ez azt jelenti, hogy először transzponálom a mátrixot, majd az egyes pozíciókba beírjuk az adott pozícióhoz tartozó aldetermináns értékét.

Tétel: Mátrix és adjungáltjának szorzata

Az **A** $n \times n$ -es mátrixot az adjungáltjával jobbról megszorozva az eredmény $\det(\mathbf{A})\mathbf{E}_n$.

Bizonyítása:

A szóban forgó szorzat:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \dots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \dots & D_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

A főátló elemeit a mátrixszorzás szabálya szerint kiszámítva:

$$c_{11} = a_{11}D_{11} + a_{12}D_{12} + \dots + a_{1n}D_{1n} = \det(\mathbf{A}), \text{ mert ez 1. sor szerinti kifejtés.}$$

$$c_{22} = a_{21}D_{21} + a_{22}D_{22} + \dots + a_{2n}D_{2n} = \det(\mathbf{A}), \text{ mert ez a 2. sor szerinti kifejtés.}$$

...

$$c_{nn} = a_{n1}D_{n1} + a_{n2}D_{n2} + \dots + a_{nn}D_{nn} = \det(\mathbf{A}), \text{ mert ez az n. sor szerinti kifejtés.}$$

A többi elem: $c_{ik} = a_{i1}D_{k1} + a_{i2}D_{k2} + \dots + a_{in}D_{kn} = 0$, hiszen az i . sor elemei rendre a k . sorhoz tartozó aldeterminánsokkal vannak szorozva; ez az összeg a ferde kifejtés szerint 0.

Tétel: Négyzetes mátrix inverze determinánssal kiszámolva

Ha **A** négyzetes mátrix, és $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{Adj}(\mathbf{A})$$

ahol $\text{Adj}(\mathbf{A}) = (D_{ki})$ az **A** mátrix úgynevezett klasszikus adjungált mátrixa.

Bizonyítása:

Mivel a mátrixok szorzása asszociatív, ezért a struktúrákról szóló fejezetben igazoltak szerint pontosan egy inverz létezik. Ha tehát találunk egy olyan mátrixot, amelyre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}_n$, akkor ez a **B** mátrix nem lehet más, csakis az **A** mátrix inverze. Az előző tétel szerint:

$$\mathbf{A} \text{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{E}_n.$$

Beszorozva az egyenletet az $1/\det(\mathbf{A})$ skalárral, az alábbi adódik:

$$\mathbf{A} \left[\frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A}) \right] = \mathbf{E}_n$$

amiből tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A})$$

Definíció: Reguláris és szinguláris mátrixok

A nem nulla determinánsú mátrixok az úgynevezett **reguláris mátrixok**. A nulla determinánsú mátrixok az úgynevezett **szinguláris mátrixok**.

Egyenletrendszer megoldása inverz mátrix segítségével

Legyen adott az egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ahol $\underline{x}$ az ismeretleneket tartalmazó vektor, $\underline{b}$ pedig adott vektor. Így az egyenletrendszer:

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$$

Hogyha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, akkor az **A** mátrix invertálható, és az egyenletrendszer megoldása:

$$\underline{x} = \mathbf{A}^{-1}\underline{b}$$

Vektor-mátrix szorzat, mint lineáris kombináció

Adott egy $m \times n$ -es típusú mátrix, A és egy n sorú oszlopvektor, $\underline{x}$. Ekkor a mátrix és a vektor szorzata a következő lesz: $A\underline{x} = \underline{b}$. Felírva ezt a szorzatot:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \underline{b}$$

Tehát a mátrix oszlopai, mint oszlopvektorok felírhatók egy olyan lineáris kombinációban, amelyben a mátrix oszlopainak megfelelő vektorok együtthatója az $\underline{x}$ vektor megfelelő sorában elhelyezkedő koordináta.



V. Bilineáris formák

Kvadratikus alakok és szimmetrikus mátrixok. A sajátvektorok bázisában (ha létezik) felírt mátrix. Mátrixok ortogonális diagonalizálása.

Főtengelytranszformáció (B). Kúpszeletek, mint mértani helyek. Másodrendű görbék középponti egyenletei.

Kvadratikus alakok és szimmetrikus mátrixok

Definíció: Szimmetrikus mátrix

Egy $m \times m$ -es mátrix szimmetrikus, hogyha $A = A^T$, tehát $a_{ik} = a_{ki}$.

Tétel: Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai

Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai ortogonálisok (3D-ig merőlegesek). Hosszukkal osztva ortonormált rendszer lesz.

Tétel: Spektrál-tétel

A mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható ortogonálisan, hogyha szimmetrikus.

Definíció: Kvadratikus alak

Az $L: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineáris függvényhez tartozó $Q(\underline{x}) = L(\underline{x}, \underline{x}): V \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az L kvadratikus alakjának nevezzük. A kvadratikus alakot a következőképpen is fel lehet írni: $Q(\underline{x}) = \underline{x}^T Q \underline{x}$, ahol a Q szimmetrikus mátrix az L bilineáris függvény mátrixa, a megfelelő helyettesítési értékekkel. A Q mátrixot mindig szimmetrikusan választjuk meg, tehát a kvadratikus alak mátrixa mindig diagonalizálható. A kvadratikus alak diagonalizálása a főtengely-transzformáció.

Sajátvektorok bázisában (ha létezik) felírt mátrix

Tétel: Transzformáció mátrixa, ha sajátvektorai bázist alkotnak

Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve erre a bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, amelynek a főátlójában a sajátértékek állnak. Ha $A: V_1^n \rightarrow V_2^k$, akkor létezik A $k \times n$ -es mátrix, amelyre $\underline{y} = A(\underline{x}) = A\underline{x}$. Leképezés mátrixa a bázisvektorok képei.

Mátrixok ortogonális diagonalizálása

Definíció: Algebrai multiplicitás

A karakterisztikus polinomban a gyöktényezős formulában az adott sajátértékhez tartozó gyöktényező foka.

Definíció: Geometriai multiplicitás

A sajátérték geometriai multiplicitása alatt a sajátértékhez tartozó sajátvektor által generált altér dimenzióját értjük.

Geometriai multiplicitás mindig kisebb-egyenlő, mint az algebrai multiplicitás!

Definíció: Ortogonális mátrix

Egy mátrix akkor ortogonális, hogyha $S^{-1} = S^T$.

Definíció: Diagonalizálás

Akkor és csak akkor diagonalizálható egy mátrix, hogyha van sajátvektorokból álló bázisa. Ez azt jelenti, hogy a sajátértékek különböznek, és a sajátvektorok algebrai multiplicitása megegyezik a geometriai multiplicitással.

$D = S^{-1} A S$, ahol S az a mátrix, amelyben a sajátvektorok meghatározott sorrendben, oszlopvektorként helyezkednek el.

Definíció: Ortogonális diagonalizáció

S átviteli mátrix ortogonális.

Főtengelytranszformáció

Tétel: Főtengely-tétel

A $Q = \underline{x}^T Q \underline{x}$ kvadratikus alakhoz tekintsük az S ortogonális transzformációt, amelynek S mátrixában az oszlopok a Q szimmetrikus mátrix ortonormált sajátvektorai. Áttérve ezen ortonormált sajátvektorok bázisára, vagyis alkalmazva az $\underline{x} = S\underline{u}$ koordináta-transzformációt, a Q kvadratikus alak a következőképpen írható: $Q = \underline{x}^T Q \underline{x} = \underline{u}^T D \underline{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2$, ahol λ_i -k a Q mátrix sajátértékei. Ezt a transzformációt nevezzük főtengely-transzformációnak.

Bizonyítása:

$Q = S D S^{-1}$ Bázistranszformáció képletét használva ($\underline{x}_u$ helyett $\underline{u}$ -t használunk):

$\underline{x}_e = S\underline{u}$, $\underline{x}_e^T = (S\underline{u})^T = \underline{u}^T S^T = \underline{u}^T S^{-1}$. Ezzel a kvadratikus alak a következő formát ölti:

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}_e^T Q \underline{x}_e = (\underline{u}^T S^{-1})(S D S^{-1}) \underline{x}_e = \underline{u}^T (S^{-1} S) D (S^{-1} S) \underline{u} = \underline{u}^T D \underline{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2$$

ahol λ_i -k a Q szimmetrikus mátrix sajátértékei, az áttérési S mátrix oszlopai pedig a Q sajátvektorai, u_i pedig az $\underline{u}$ vektor i -dik koordinátája.

Kúpszeletek, mint mértani helyek, és a másodrendű görbék középponti egyenletei

Definíció: Kúpszeletek

Egy egyenes körkúpot a csúcsára nem illeszkedő síkkal elmetszve különböző görbéket kapunk síkmetszetként, aszerint, hogy a sík a kúp tengelyével mekkora szöget zár be.

Ha a bezárt szög megegyezik a kúp félnyílásszögével, azaz a sík egy alkotóval párhuzamos, akkor a síkmetszet parabola; ha kisebb, mint a félnyílásszög, akkor a síkmetszet hiperbola; ha nagyobb, mint a félnyílásszög, akkor a síkmetszet ellipszis; ha pedig a sík tengelyére merőleges, akkor a síkmetszet kör lesz.

Ellipszis

Definíció: Ellipszis

Az ellipszis azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának az összege állandó, és ez az állandó nagyobb, az adott két pont távolságánál.

Az ellipszis középponti egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ahol 'a' az ellipszis nagy, 'b' pedig az ellipszis kis féltengelyének hossza.

Hiperbola

Definíció: Hiperbola

A hiperbola azon pontok mértani helye a síkban, amelyek két adott ponttól mért távolságának a különbsége állandó, és ez az állandó kisebb az adott két pont közötti távolságánál.

A hiperbola középponti egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ahol 'a' a hiperbola valós, 'b' pedig a képzetes féltengelyének hossza.

Parabola

Definíció: Parabola

A parabola azon pontok mértani helye a síkban, amelyek egy adott egyenestől és egy adott (de az egyenesre nem illeszkedő) ponttól egyenlő távolságra helyezkednek el.

A parabola középponti egyenlete:

$$y^2 = 2px$$

Ahol 'p' a parabola paramétere, és ebben az esetben a fókusza a (0,0) pont.



VI. Komplex számok

Komplex számok különböző alakjai, műveletek. Átszámolás az egyes alakok között. Hatványozás, Moivre- formula (B), gyökvonás. Konjugált. Egységgyök, primitív egységgyök fogalma, egységgyökök struktúrája (B). Komplex számokra vonatkozó Euler formula. Az algebra alaptétele. Komplex együtthatós másodfokú egyenlet megoldása

Komplex számok különböző alakjai, műveletek

Komplex szám algebrai alakja

Algebrai/kanonikus alak: $a + bi$

Ahol $a \in \mathbb{R}$ a komplex szám valós része, és $b \in \mathbb{R}$ a komplex szám képzetes része.

Definíció: Abszolút érték

A komplex szám abszolút értéke gyakorlatilag geometriailag értelmezhető: az abszolútérték a nullától való távolság.

Az $z = a + bi$ szám abszolútértéke: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Számolás algebrai alakban

Összeadás:

$$(a + bi) + (c + di) = (a+c) + (b+d)i$$

Komplex számokat az algebrai alakban úgy adom össze, hogy összeadom a valós részt, majd hozzáadom a képzetes részek összegét megszorozva a képzetes egységgel.

Szorítás:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Komplex számokat az algebrai alakban a zárójelek felbontásának segítségével, a valós számok szabályainak megfelelően szorzom; ezekhez hozzáveszem azt a szabályt, hogy a képzetes egység négyzete -1 : $i^2 = -1$.

Osztás:

$$z = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 - (di)^2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Definíció: Komplex szám konjugáltja

A $z = a + bi$ komplex szám konjugáltja a $\bar{z} = a - bi$ komplex szám.

Az i képzetes egységgel való szorzás geometriai jelentése

i -vel szorozva a szám az eredeti, pozitív 90° -os elforgatottja.

i hatványai

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = 1$$

Komplex szám trigonometrikus alakja

A komplex szám trigonometrikus alakját úgy kapjuk, hogy a komplex számsíkon ábrázolt algebrai alak polárkoordinátáit adjuk meg.

Trigonometrikus alak: $z = r[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]$, ahol $r = |z|$ és $\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$, ha $z = a + bi$

Két trigonometrikus alak az $r_1 = r_2 = 0$ kivételével akkor és csak akkor egyenlő, hogyha abszolútértékeik és argumentumaik páronként megegyeznek:

$$r_1 = r_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 (+k \cdot 2\pi)$$

Műveletek trigonometrikus alakban

Szorzás:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)] \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot [\cos(\beta) + i \sin(\beta)] = \\ &= r_1 r_2 \{ [\cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)] + i [\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)] \} = \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

Szorzat abszolútértéke a tényezők abszolútértékeinek a szorzata, argumentuma a tényezők argumentumának összege.

Következménye: Moivre-formula

$$z^k = \prod_{l=1}^k r \cdot [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)] = r^k \cdot [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]^k = r^k \cdot [\cos(k\alpha) + i \sin(k\alpha)]$$

Osztás:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]}{r_2 [\cos(\beta) + i \sin(\beta)]} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)][\cos(\beta) - i \sin(\beta)]}{[\cos(\beta) + i \sin(\beta)][\cos(\beta) - i \sin(\beta)]} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)][\cos(\beta) - i \sin(\beta)]}{[\cos^2(\beta) - i^2 \sin^2(\beta)]} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)][\cos(\beta) - i \sin(\beta)]}{1} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] \end{aligned}$$

Hányados abszolútértéke az osztandó és az osztó abszolútértékeinek hányadosa, argumentuma az osztandó és az osztó argumentumainak a különbsége.

Gyökvonás:

Definíció: n-dik gyök

A z komplex számot a $z^* \neq 0$ komplex szám n-dik gyökének nevezzük, hogyha

$$z^n = z^*: \sqrt[n]{z^*} = z \Leftrightarrow z^n = z^*$$

Képlete:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}\right) \right]$$

$$\text{ahol } k = (0, 1, \dots, n-1)$$

Ha ezeket a számokat a komplex számsíkon ábrázoljuk, akkor ezek egy $\sqrt[n]{r}$ sugarú, origó középpontú körön helyezkednek el, vagyis egy szabályos n-szög csúcsai.

Komplex szám exponenciális alakja

Exponenciális alak: $z = r[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)] = r \cdot e^{i\alpha}$

$e^{i\alpha}$ megadja az egység hosszú komplex számokat

Műveletek exponenciális alakban

Szorzás:

$$z_1 \cdot z_2 = [r_1 \cdot e^{i\alpha}] \cdot [r_2 \cdot e^{i\beta}] = r_1 r_2 e^{i(\alpha+\beta)}$$

Hatványozás:

$$z^n = (r e^{i\alpha})^n = r^n e^{in\alpha}$$

Osztás:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\alpha}}{r_2 e^{i\beta}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\alpha-\beta)}$$

Szög és radián átváltása

Fok -> Radián	Radián -> Fok
szög $\cdot \frac{\pi}{180^\circ}$	radián $\cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

Átszámolás az egyes alakok között

Kanonikus alak <-> trigonometrikus alak

Kanonikus -> Trigonometrikus

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Szög számításánál nagyon fontos, hogy az 1. és a 3. síknegyed, illetve a 2. és a 4. síknegyed komplex számainak esetében ugyanaz az argumentum tangense. Először mindenképp RAJZ!

Trigonometrikus -> Kanonikus

Egyszerű beszorzással.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg(x)	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Trigonometrikus alak <-> exponenciális alak

Tulajdonképpen minden adott, mind a két alakban használjuk a hosszt és a szöget, ezért csak ezeket a megfelelő helyre kell írni.

Exponenciális alak <-> kanonikus alak

Kanonikus -> Exponenciális

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$$

Szög számításánál nagyon fontos, hogy az 1. és a 3. síknegyed, illetve a 2. és a 4. síknegyed komplex számainak esetében ugyanaz az argumentum tangense. Először mindenképp RAJZ!

Exponenciális -> Kanonikus

Beszorzás. De inkább először átírnám trigonometrikusba, hátha könnyebb a fenti táblázat alapján a nevezetes szögekkel számolni. Számológép nélkül mindenképp így érdemes.

Egységgyökök, primitív egységgyökök, egységgyökök struktúrája

Definíció: Egységgyökök

n-dik komplex egységgyököknek nevezzük azt a z komplex számot, amelyre $z^n = 1$.

Jelölése:

$$\varepsilon_k = \cos\left(\frac{k2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{k2\pi}{n}\right), \text{ ahol } k = 0, 1, \dots, n-1$$

Definíció: Primitív egységgyökök

1. Azt az ε_k n-dik egységgyököt, amelynek hatványai a többi n-dik egységgyököt is előállítják, primitív egységgyököknek nevezzük.
2. Az az ε_k egységgyök, amelynek n-dik hatványa 1, és ennél semelyik kisebb hatványa sem 1, primitív egységgyök.
3. Ha ε_k egységgyök, továbbá n és k relatív prímek, akkor ε_k primitív egységgyök.
(Relatív prím: a legnagyobb közös osztójuk az 1.)

Egységgyökök struktúrája

Tétel:

Az n-dik egységgyökök csoportot alkotnak a komplex számok szokásos szorzására nézve.

Bizonyítása:

Zártság:

$$(\varepsilon_k \varepsilon_l)^n = \left\{ \cos\left[(k+l)\frac{2\pi}{n}\right] + i \sin\left[(k+l)\frac{2\pi}{n}\right] \right\}^n = \cos\left[(k+l)n\frac{2\pi}{n}\right] + i \sin\left[(k+l)n\frac{2\pi}{n}\right] = 1$$

Egység:

$$1 = 1 \left[\cos\left(\frac{0}{n}\right) + i \sin\left(\frac{0}{n}\right) \right]$$

Inverz:

$$\varepsilon_k \varepsilon_j = 1 \left[\cos\left(\frac{0}{n}\right) + i \sin\left(\frac{0}{n}\right) \right] \text{ alapján}$$

$$\frac{k2\pi}{n} + \frac{j2\pi}{n} = \frac{n2\pi}{n}, \text{ ahonnan } j = n - k$$

Tehát ε_k inverze ε_{n-k} .

Az **asszociatív** és a **kommutatív** tulajdonságok a valós számok összegének asszociatív és kommutatív tulajdonságaiból következnek, hiszen két egységgyök szorzatát úgy kapom, hogy az argumentumaikat összeadjuk.

Komplex számokra vonatkozó Euler-formula

$$\cos(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Mivel a $\cos(\alpha)$ és a $\sin(\alpha)$ sorok abszolút konvergensek, ezért átrendezhetők.

$$\cos(\alpha) + i \sin(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} = e^{i\alpha}$$

Az algebra alaptétele

Tétel: Az algebra alaptétele

Az n -ed fokú, komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok halmazán. Multiplicitással számolva a gyököket, pontosan n darab komplex gyök van.

Komplex együtthatós másodfokú egyenlet megoldása

A másodfokú egyenletekre használt megoldóképlet a komplex számok körében is érvényes

Ha $D > 0$, akkor két különböző valós gyököt kapunk

Ha $D = 0$, akkor egy valós (kétszeres multiplicitású) valós gyök

Ha $D < 0$, akkor két komplex gyök, amelyek egymásnak konjugáltjai.

Tétel:

Ha egy egyenletnek egy komplex szám a gyöke, akkor a konjugáltja is a gyöke.



VII. Vektortér, altér

Vektortér és altér fogalma. Altér megállapítására vonatkozó tétel (B). Nevezetes alterek: generátumok, képtér, magtér, sajátaltér, egyik bizonyítással. (Nem kötelező: A merőleges kiegészítő altér. Példa merőleges kiegészítőre $\mathbb{R}^3$ ban, geometriai jelentése.) **Dimenzió tétel kimondása**, a tételben szereplő definíciók ismertetése. A tétel illusztrálása konkrét példán keresztül.

Vektortér és altér fogalma

Definíció: Vektortér

A V nemüres halmazt **vektortérnek** nevezzük a T test felett, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

- A V halmazon értelmezve van egy **összeadás** nevű művelet, amely bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ elemekhez egyértelműen hozzárendel egy V -beli elemet, amelyet $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ -vel jelölünk. Az **összeadás kommutatív csoport**.
- A T test és a V halmaz között értelmezve van a **skalárral való szorzás**. Ha bármely $u \in T$ úgynevezett skálárhoz és bármely $\underline{v} \in V$ úgynevezett vektorhoz egyértelműen hozzárendelünk egy V belső elemet, amelyet $u\underline{v}$ -vel jelölünk. A skalárszoros a következő tulajdonságokkal rendelkezik:
 1. $1\underline{v} = \underline{v}$, ahol 1 a T test szorzásra vonatkozó egységeleme
 2. **Vegyes asszociatív szabály**, $(uk)\underline{v} = u(k\underline{v})$.
 3. **Vegyes disztributív szabály**:
 - a. $(u+k)\underline{v} = u\underline{v} + k\underline{v}$
 - b. $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)u = u\underline{v}_1 + u\underline{v}_2$

Definíció (Tétel): Altér

Legyen V vektortér valamely T test felett, és W részhalmaza V -nek. W akkor és csak akkor altér V -nek, ha minden $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in W$ -re és $u \in T$ -re igaz, hogy $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in W$ -nek, $u\underline{v}_1 \in W$ -nek.

Bizonyítása:

1. Ha W altér, akkor az állítás a definícióból adódik.
2. Ha $\underline{v}_1 + \underline{v}_2 \in W$ -nek, illetve $u\underline{v}_1 \in W$ -nek, akkor W altér.

Ahhoz, hogy W altér legyen, az összes vektortér axiómának teljesülnie kell. De ezek közül az összeadásra vonatkozó kommutativitás és asszociativitás, valamint a vegyes disztributív szabályok automatikusan teljesülnek, hiszen ha nem így lenne, maga V sem lehetne vektortér. Ugyanígy az $1\underline{v} = \underline{v}$ axióma is igaz kell, hogy legyen a V minden elemére.

A fennmaradó két axióma közül az egyik az összeadás egységének W -beli létezése, a másik pedig az inverz létezése. Ha vesszük az 1 és -1 skalárokat, akkor a második feltétel szerint $1\underline{v} \in W$ -nek, és $-1\underline{v} \in W$ -nek. Ebből rögtön a másodikként említett, hiányzó axióma is látható: a $\underline{v}$ összeadásra vonatkozó inverze is W belső: $-1\underline{v} \in W$ -nek. Az első feltétel szerint W belső vektorok összege is W -beli, ezzel bizonyítható, hogy az összeadás egysége is W -beli:

$$\underline{0} = 1\underline{v} + (-1)\underline{v} \in W\text{-nek.}$$

Nevezetes alterek: generátumok, képtér, magtér, sajátaltér

Definíció: Generátum

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok által generált altér, melyet $\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle$ -vel jelölünk, ezen vektorok minden lehetséges lineáris kombinációja.

$$\text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \rangle = \{ \underline{v} \in V \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \}.$$

Bizonyítása:

A definíció helyes, ugyanis mint az előzőekben bizonyítottuk, valamely vektorok halmaza akkor és csak akkor altér, ha bármely halmazbeli vektorok összege, vagy skalárszorosa is halmazbeli. Egy lineáris kombinációnál nyilván mind a két feltétel teljesül.

Definíció: Magtér

Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés. Azon vektorok összegét, amelynek képe a nullvektor, a leképezés magterének nevezzük, és $\text{Ker}(L)$ -lel jelöljük.

Definíció: Képtér

Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés. Azon vektorok összegét W -ben, amelyek valamely V -beli vektor(ok) képei, a leképezés képterének nevezzük, és $\text{Im}(L)$ -lel jelöljük.

Definíció: Sajátaltér

A λ sajátértékhez tartozó alteret a λ -hoz tartozó sajátaltérnek nevezzük.

Dimenzió-tétel kimondása, definíciók

Tétel: Dimenzió-tétel

Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés, ekkor $\text{Dim}(\text{Ker}(L)) + \text{Dim}(\text{Im}(L)) = \text{Dim}(V)$.

Definíció: Homogén lineáris leképezés

Legyenek V és W vektorterek, valamint $\underline{u}, \underline{v} \in V$ -nek, $a \in \mathbb{R}$ -nek. Azt az $L: V \rightarrow W$ függvényt, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik, **homogén lineáris leképezésnek** nevezzük.

1. **Linearitás (additivitás, szuperpozíció)**

Vektorok összegének a képe a képvektorok összege: $L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v})$.

2. **Homogenitás**

Vektorok számszorosának a képe a vektor képének a számszorosa: $L(a\underline{u}) = aL(\underline{u})$.

Ha $V = W$, akkor a homogén lineáris leképezést transzformációnak hívjuk.

Definíció: Dimenzió

A V vektortér egy **dimenzióján** bármely bázisának az elemszámát értjük. Adott vektortér valamennyi bázisának ugyanannyi vektora van. **Megállapodás szerint a triviális vektortér dimenziója 0.** Ennek egyetlen vektora a $\underline{0}$ vektor, de ez a $\underline{0}$ vektor önmagában generátorrendszert alkot, mert $a\underline{0} = \underline{0}$.

Jelölése: $\text{DIM}(V)$.

Definíció: Magtér

Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés. Azon vektorok összegét, amelynek képe a nullvektor, a leképezés magterének nevezzük, és $\text{Ker}(L)$ -lel jelöljük.

Definíció: Képtér

Legyen L valamely $V \rightarrow W$ lineáris leképezés. Azon vektorok összegét W -ben, amelyek valamely V -beli vektor(ok) képei, a leképezés képterének nevezzük, és $\text{Im}(L)$ -lel jelöljük.

Konkrét példa

Egy A mátrix esetében a $\underline{v} \rightarrow A\underline{v}$ lineáris leképezés. Ennek a leképezésnek a magterét az A mátrix magterének nevezzük.

Az $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ magtere nem más, mint $\mathbb{R}^3$ egy origón áthaladó síkje:

$$\text{Ker}(A) = \{ (x, y, z) \mid 2x + y - z = 0 \}$$

A dimenziótétel segíthet abban, hogy megállapítsuk, hogy a sík valóban kétdimenziós. Világos, hogy $\text{Im}(A) = \text{Rang}(A) = 1$, mert egyetlen sorból álló mátrixról van szó, és így $\dim(\text{Ker}(A)) = 3 - 1 = 2$.



VIII. Homogén lineáris leképezések vektortere

Homogén lineáris leképezések összege, szorzata, polinomja, lineáris tere, kapcsolata a (megfelelő típusú) mátrixok lineáris terével. Cayley-Hamilton tétel.

Homogén lineáris leképezések összege, szorzata, polinomja, lineáris tere, kapcsolata a mátrixok lineáris terével

Definíció: Homogén lineáris leképezés

Legyenek V és W vektorterek, valamint $\underline{u}, \underline{v} \in V$ -nek, $a \in \mathbb{R}$ -nek. Azt az $L: V \rightarrow W$ függvényt, amely a következő két tulajdonsággal rendelkezik, **homogén lineáris leképezésnek** nevezzük.

1. Linearitás (additivitás, szuperpozíció)

Vektorok összegének a képe a képvektorok összege: $L(\underline{u} + \underline{v}) = L(\underline{u}) + L(\underline{v})$.

2. Homogenitás

Vektorok számszorosának a képe a vektor képének a számszorosa: $L(a\underline{u}) = aL(\underline{u})$.

Ha $V = W$, akkor a homogén lineáris leképezést transzformációnak hívjuk.

Definíció: Összeg, skalárszoros, szorzat

Legyenek V, W ugyanazon T test feletti vektorterek, és $A, B: V \rightarrow W$ lineáris leképezések.

Az A és B lineáris leképezések összege: $(A + B)(\underline{x}) = A(\underline{x}) + B(\underline{x})$.

Az A és B lineáris leképezések szorzata: $(AB)(\underline{x}) = A(B(\underline{x}))$

Az A lineáris leképezés skalárszorosa: $(uA)(\underline{x}) = uA(\underline{x})$.

Definíció: Lineáris tér és izomorfia a megfelelő típusú mátrixok terével

$V^n \rightarrow W^k$ lineáris leképezések halmaza a fenn definiált összegre és számszorosra nézve $k \times n$ dimenziós vektorteret alkot. (Ez a homogén lineáris leképezések lineáris terének definíciója volt.) Rögzített bázispárra egyértelműen hozzárendelhető mátrixa. Ez a lineáris tér izomorf a $k \times n$ mátrixok vektorterével.

Definíció: Polinom

Legyen $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ és $L(\underline{x}) = A\underline{x}_{[b]}$, ahol az A ennek a transzformációnak a mátrixa, és $\underline{x}_{[b]}$ pedig az $\underline{x}$ vektor koordináta-mátrixa, mind a kettő valamely rögzített, $[b]$ bázisra vonatkozóan. Ekkor az L transzformáció sajátértékei a $\det(\lambda E - A) = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai. A $p(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ polinom λ -ban n -edfokú, ez az úgynevezett karakterisztikus polinom, melynek gyökei a sajátértékek. A sajátvektorok pedig e sajátértékek ismeretében a $(\lambda E - A)\underline{x} = 0$ homogén lineáris egyenletből kaphatók.

Cayley-Hamilton tétel

Tétel: Cayley-Hamilton tétel

Bármely négyzetes mátrix gyöke a saját karakterisztikus polinomjának.



IX. Sajátérték, sajátvektor

Sajátérték, sajátvektor fogalma. Sajátvektorok függetlenségének kritériuma. Speciális transzformációk mátrixai (szimmetrikus, ferdén szimmetrikus, ortogonális), sajátértékei, sajátvektorai. Hasonló mátrixok sajátértékei, sajátvektorai. Azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak (B). Sajátvektorok bázisában a transzf. mátrixa (B).

Sajátérték, sajátvektor fogalma, sajátvektorok függetlenségének kritériuma

Definíció: Sajátérték, sajátvektor

A λ szám **sajátértéke** az L transzformációnak, ha van olyan nem nulla vektor, amelyre $L(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$. Ez a **nem nulla vektor** az L transzformáció λ sajátértékéhez tartozó **sajátvektora**.

Tétel: Sajátvektorok függetlenségének kritériuma

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Speciális transzformációk mátrixai, sajátértékei, sajátvektorai

Szimmetrikus transzformáció

Szimmetrikus transzformáció mátrixa szimmetrikus.

Egy mátrix szimmetrikus, hogyha megegyezik a transzponáltjával: $A = A^T$

Tétel:

Szimmetrikus mátrix sajátértékei valósak.

Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai függetlenek.

Ferdén szimmetrikus transzformáció

Ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) transzformáció mátrixa ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus).

Egy mátrix ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus), hogyha megegyezik a transzponáltjának a mínusz egyszeresével: $A = -A^T$

Tétel:

Ferdén szimmetrikus mátrix sajátértékei vagy tisztán képzetesek, vagy nullák.

Ortogonális transzformáció

Ortogonális transzformáció mátrixa ortogonális.

Egy mátrix ortogonális, hogyha inverze megegyezik a transzponáltjával: $A^{-1} = A^T$

Tétel:

Az ortogonális mátrixok sajátértékeinek az abszolút értéke 1.

Hasonló mátrixok sajátértékei és sajátvektorai

Hasonló mátrixok sajátértékei egyenlők. Hogyha **A** és **B** mátrixok hasonlóak, illetve **A** sajátvektora $\underline{s}$, akkor **B** sajátvektora $T\underline{s}$.

Azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak

Tétel: Azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok altere

Az L lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó összes sajátvektor és a $\underline{0}$ vektor alteret alkotnak.

Bizonyítás:

Legyenek $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ az L lineáris transzformáció ugyanazon λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai. A már tanult tétel szerint, ha összegükről és számszorosukról be tudjuk látni, hogy azok szintén e sajátértékhez tartozó sajátvektorok, akkor e vektorok összessége alteret alkot:

$$L(\underline{s}_1) = \lambda \underline{s}_1, \text{ illetve } L(\underline{s}_2) = \lambda \underline{s}_2.$$

Összegük is sajátvektor, ugyanis:

$$L(\underline{s}_1 + \underline{s}_2) = L(\underline{s}_1) + L(\underline{s}_2) = \lambda \underline{s}_1 + \lambda \underline{s}_2 = \lambda (\underline{s}_1 + \underline{s}_2).$$

Számszorosuk is sajátvektor:

$$L(u\underline{s}_1) = uL(\underline{s}_1) = u\lambda \underline{s}_1 = \lambda (u\underline{s}_1).$$

Sajátvektorok bázisában a transzformáció mátrixa

Tétel:

Tegyük fel, hogy egy $V^n \rightarrow V^n$ homogén lineáris transzformáció (különböző sajátértékhez tartozó) sajátvektorai bázist alkotnak. Ebből a **transzformáció mátrixa e bázisra vonatkozóan diagonális**, és a főátlóban rendre a megfelelő sajátértékek állnak.

Bizonyítás:

A transzformáció mátrixának oszlopvektorai a bázisvektorok képei. Sajátvektor képe önmaga sajátértékszerese. Pl. az i . sajátvektor, $\underline{s}_i$ mátrixos alakja a sajátértékek bázisában egy olyan oszlopvektor, amelynek i . koordinátája λ_i , összes többi koordinátája pedig 0.

Ezek az oszlopvektorok alkotják a leképezés mátrixát, az első oszlopnak az első, a második oszlopnak a második, az i . oszlopnak az i . pozícióján áll a megfelelő sajátérték, ezért a leképezés **S** mátrixa valóban diagonális lesz.

Izomorf struktúrák, izomorf gráfok, izomorf vektorterek. Vektorterek izomorfiaira vonatkozó szükséges és elégséges feltételei (B). A vektorterek közti izomorfia ekvivalencia reláció. Mátrixok lineáris terének és a lineáris leképezések terének kapcsolata. Példa: az $(a, 0)$ $(a \in \mathbb{R})$ alakú komplex számok és a valós számok izomorfiaja. Az $a+bi$ képlet magyarázata (B).

X. Izomorfia

Izomorf struktúrák, izomorf gráfok, izomorf vektorterek

Definíció: Izomorf struktúrák

Az izomorfia két matematikai struktúrának az a tulajdonsága, hogy elemeik a strukturális tulajdonságokat megőrizve egymásra kölcsönösen egyértelműen (bijektíven) leképezhetők.

Definíció: Izomorf gráfok

Két gráfot akkor nevezünk izomorfnak, hogyha pontjaik és éleik kölcsönösen egyértelműen, és illeszkedéstartóan megfeleltethetők egymásnak.

Definíció: Izomorf vektorterek

Az egy-egyértelmű $L: V \rightarrow W$ leképezést izomorf leképezésnek nevezzük. Az izomorf vektortereket a következőképp jelöljük: $V \cong W$.

Vektorterek izomorfiaira vonatkozó szükséges és elégséges feltételei

Tétel:

Két vektortér akkor és csak akkor izomorf, hogyha dimenziójuk egyenlő.

Szükséges feltétel:

Ha két vektortér izomorf, akkor a dimenziójuk egyenlő.

Elégséges feltétel:

Ha két vektortér dimenziója egyenlő, akkor ez a két vektortér izomorf.

Bizonyítása:

1. Elégséges feltétel

Ha két vektortér dimenziója egyenlő, akkor bármely két bázisának elemszáma egyenlő.

Legyen a V tér egy bázisa $[a]$, a W tér egy bázisa pedig $[b]$. A V -beli $\underline{x}$ vektort az $[a]$ bázisra vonatkozó koordináta-mátrixával reprezentáljuk. Rendeljük hozzá W -ben azt az $\underline{y}$ vektort, aminek a $[b]$ -re vonatkoztatva ugyanaz a koordináta-mátrixa:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[a]} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[b]} = \underline{y}$$

Nyilvánvaló, hogy az így adott leképezés egy-egyértelmű lineáris leképezés.

2. Szükséges feltétel

Ha a két vektortér izomorf, akkor a dimenziójuk egyenlő.

Legyen két vektortér izomorf. Egyik tér bázisának képvektora a művelettartás miatt a másik vektortérben is bázist alkotnak, tehát a vektorterek dimenziója egyenlő.

Vektorterek közti izomorfia

A vektorterek körében az izomorfia ekvivalencia-reláció.

Az ekvivalencia-reláció tulajdonságai: reflexív, szimmetrikus, és tranzitív.

Mátrixok lineáris terének és a lineáris leképezések terének kapcsolata

Az $L: V^n \rightarrow W^k$ leképezés izomorf a $k \times n$ -es mátrixok vektorterével.

Példa: Az $(a,0)$ alakú komplex számok és a valós számok között egy-egyértelmű, művelettartó leképezés (izomorfia) létesíthető.

A hozzárendelés módja: $(a, 0) \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}$

A kommutatív és az asszociatív tulajdonságok automatikusan teljesülnek minden komplex számra, így e részhalmaz elemeire is. Ezért elegendő azt bizonyítanunk, hogy mind az összeadásra, mind a szorzásra nézve zárt ez a halmaz. Szükség van az egység, és az erre vonatkozó inverz létezésének a bizonyítására is.

1. Az összeadás nem vezet ki a halmazból:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \Leftrightarrow a + b = a + b$$

2. Az összeadás egysége $(0,0) \Leftrightarrow 0$

3. Az összeadás egységére vonatkozó ellentett: $(a, 0) + (-a, 0) = (0,0)$

4. A szorzás nem vezet ki a halmazból:

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0, 0a + 0b) = (ab, 0) \Leftrightarrow a \cdot b = ab$$

5. A szorzás egysége $(1,0) \Leftrightarrow 1$

6. A szorzás egységére vonatkozó inverz: $(a, 0) \left(\frac{1}{a}, 0\right) = (1,0)$

Az $a+bi$ képlet magyarázata

Minden komplex szám felírható olyan kéttagú összegként, ahol az első tag mindkét tényezőjének van izomorf képe a valós számok között, a másodiknak pedig egyik tényezője rendelkezik a tulajdonsággal:

$$(a, b) = (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

$(1,0)$ neve valós egység, valós megfelelője az 1.

$(0,1)$ neve képzetes egység, i -vel jelöljük. Az i komplex számnak nincsen valós megfelelője.

Ekkor $\mathbb{C}$ minden eleme felírható $a + bi$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, illetve

$$i^2 = (0,1)(0,1) = -1.$$

Tehát a komplex szám algebrai/kanonikus alakja: $z = a + bi$



XI. Lineáris leképezések

Lineáris leképezés mátrixának definíciója, szerepe (B), példák. Speciális valós lineáris leképezések mátrixai: vetítés, forgatás. **A trigonometrikus addíciós tételek bizonyítása forgatási mátrixokkal.** A skalárszorzat, mint lineáris leképezés. A legfeljebb $(n-1)$ -edfokú polinomok tere, és a polinomok deriválása, integrálása, mint lineáris leképezés, ezek mátrixai. **Lineáris leképezések összege, skalárszorosa, példák.** Homogén lineáris leképezések lineáris tere. **Áttérés más bázispárra. Mátrixok diagonalizálása.**

Lineáris leképezés mátrixának definíciója, szerepe, példák

Definíció: Lineáris leképezés mátrixa

Az $L: V^n \rightarrow W^k$ lineáris leképezés mátrixa $A_{[[a]],[b]]} = [\underline{k}_1 | \underline{k}_2 | \dots | \underline{k}_n]$, ahol $\underline{k}_i$ definíció szerint egyenlő $L(\underline{a}_i)$, az A mátrix oszlopai a V^n beli $[a]$ bázis vektorainak képei, a W^k beli $[b]$ bázisra vonatkozóan. Transzformáció esetén nem írjuk ki a bázis nevét kétszer: $A_{[a]}$

Megjegyzések:

1. Az A mátrix tehát általában $k \times n$ -es, ahol k a képtér, n a kiindulási tér dimenziója.
2. Ha megváltoztatjuk a bázist, más lesz a leképezés mátrixa.
3. Fontos, hogy a bázisvektorok (tetszőleges) sorrendjét rögzíteni kell.

Tétel: Leképezés mátrixának szerepe

Legyen $L: V^n \rightarrow W^k$ a lineáris leképezés, A legyen a leképezés mátrixa, $\underline{x} \in V$ tetszőleges, $\underline{y} \in W$ ezen $\underline{x}$ képe: $\underline{y} = L(\underline{x})$. Ekkor $\underline{y} = A\underline{x}$.

Bizonyítás: Konstruktív, a bizonyítás során meg is adjuk a kérdéses mátrixot.

Legyen V^n bázisa $[a] = \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$, W^k bázisa pedig $[b] = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_k\}$. A tétel állítása szerint a kiindulási tér bázisvektorainak a képét kell felírunk:

$$L(\underline{a}_i) = \sum_{j=1}^k \beta_{ji} \underline{b}_j$$

Tetszőleges vektort a kiindulási térben az $[a]$ bázisra vonatkozó koordinátákkal írjuk fel:

$$\underline{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underline{a}_j \in V$$

A vektor képe:

$$L(\underline{x}) = L\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \underline{a}_j\right) \in W$$

Alkalmazva a lineáris leképezés két definiáló tulajdonságát, és behelyettesítve az $L(\underline{a}_i)$ bázisvektorok képtérbeli előállítását, majd bázisvektorok szerint csoportosítjuk a tagokat:

$$L(\underline{x}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\sum_{j=1}^k \beta_{ji} \alpha_j \right) \underline{b}_i \right\}$$

A felírásból látható, hogyha a $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{in}$ skalárokat egy mátrix i . sorának tekintjük, akkor $\underline{x}$ képének koordináta vektorát e mátrix segítségével egyszerű szorzással számíthatjuk:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}_{[a]} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{bmatrix}_{[b]}$$

Ahol γ_i a kép koordinátái a $[b]$ bázisban.

Példák

Tükrözés mátrixa $\mathbb{R}^3$ -ban az x tengelyre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Tükrözés mátrixa $\mathbb{R}^3$ -ban az origóra

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Speciális valós lineáris leképezések mátrixai: vetítés, forgatás

Vetítés mátrixa

Vetítés az i, j síkra

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vetítés az j, k síkra

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vetítés a j, k síkra

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forgatás mátrixa

Két dimenzióban az origó körüli Θ szöggel való forgatás mátrixa:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

A trigonometrikus addíciós tételek bizonyítása forgatási mátrixokkal

$+\alpha$ szögű elforgatás mátrixa A_α

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$+\beta$ szögű elforgatás mátrixa B_β

$$B_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$(\alpha+\beta)$ szögű elforgatás mátrixa $C_{(\alpha+\beta)}$

$$C_{(\alpha+\beta)} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

$B_\beta(A_\alpha \underline{x}) = C_{(\alpha+\beta)} \underline{x}$ tehát $B_\beta A_\alpha = C_{(\alpha+\beta)}$

$$\begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

Amelyből egyértelműen látható, hogy

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

A skalárszorzat, mint lineáris leképezés

A homogén lineáris leképezések két tulajdonsága a homogenitás és a linearitás, ez a két tulajdonság igaz a skalárszorzatra is.

Homogén: $\langle \lambda \underline{a}, \underline{b} \rangle = \lambda \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$

Lineáris: $\langle \underline{a} + \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle + \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle$

A legfeljebb (n-1)-ed fokú polinomok tere, és a polinomok deriválása, integrálása, mint lineáris leképezés, ezek mátrixai

Egy (n-1)-ed fokú polinomot a következőképpen lehet felírni:

$$P = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_nx^{n-1}$$

Az ilyen alakú polinomok vektorteret alkotnak. Ha ebben a vektortérben rendre az $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ ismeretleneket tekintjük bázisvektoroknak, akkor a venti egyenlet koordinátás alakja:

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

A deriválás és az integrálás ezen a vektortéren lineáris leképezés, ezért ezek felírhatók mátrixszal. A leképezés mátrixában a bázisvektorok képei ülnek.

1. Deriválás

A deriválás $L_D: p^{n-1} \rightarrow p^{n-2}$ leképezés, amelynek A_D mátrixa:

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{bmatrix}$$

Ez az A_D mátrix egy (n-1)xn-es mátrix.

2. Integrálás

Az integrálás $L_I: p^{n-1} \rightarrow p^n$ leképezés, amelynek A_I mátrixa a következő:

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

Ez az A_I mátrix egy (n+1)xn-es mátrix.

Lineáris leképezések összege, skalárszorosa, példák

Lineáris leképezések összege

Legyenek $A: R^m \rightarrow R^n$ és $B: R^m \rightarrow R^n$ lineáris leképezések. Ekkor a két leképezés összege:

$$(A+B)(\underline{x}) = A(\underline{x}) + B(\underline{x})$$

Az összeg ugyancsak lineáris leképezés, tehát lineáris és homogén.

Lineáris leképezések skalárszorosa

Legyen $A: R^m \rightarrow R^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor a lineáris leképezés skalárszorosa:

$$(\lambda A)(\underline{x}) = \lambda A(\underline{x}) \text{ minden } \underline{x} \in R^m\text{-re.}$$

A skalárszoros ugyancsak lineáris leképezés, tehát lineáris és homogén.

Homogén lineáris leképezések lineáris tere

Tétel:

A $V^n \rightarrow W^k$ leképezés halmaza a fent definiált összegre és számszorosra nézve $k \times n$ dimenziós vektorteret alkot.

Tétel:

A $V^n \rightarrow W^k$ leképezés lineáris tere izomorf a $k \times n$ -es mátrixok vektorterével.

Áttérés más bázispárra

Tétel: Áttérés más bázisra

Legyen $V \neq \{0\}$ n dimenziós vektortér, $[e]$ és $[u]$ két bázis V -ben. Ha a V tér $\underline{x}$ vektorának koordináta mátrixa

$$\underline{x}_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]}$$

az $[e]$ bázisra vonatkozik, akkor ugyanazon $\underline{x}$ vektor $[u]$ bázisra vonatkozó koordinátái az alábbi képletből számíthatók:

$$\underline{x}_{[u]} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = U^{-1} \underline{x}_{[e]},$$

ahol az U mátrix oszlopai az $[u]$ bázis vektorainak az $[e]$ bázisra vonatkozó koordináta-mátrixai. Az U mátrixot áttérési mátrixnak nevezzük.

Tétel: Bázistranszformáció

Ha az $L: V^n \rightarrow W^k$ lineáris leképezés mátrixa rögzített $[a] \in V^n$ és $[b] \in W^k$ bázisokra $A_{[a][b]}$, akkor ugyanezen leképezés

$A'_{[a'][b']}$ mátrixa az $[a'] \in V^n$ és a $[b'] \in W^k$ bázisára a következő képlettel számolható:

$$A'_{[a'][b']} = T^{-1} A_{[a][b]} S, \text{ ahol } T \text{ a képtér, } S \text{ a kiindulási tér áttérési mátrixa.}$$

Az áttérési mátrixokban az új bázisok vektorai ülnek.

Mátrixok diagonalizálása

Tétel: Diagonalizálás

Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve erre a bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, amelyben a főátlóban a sajátértékek állnak.

$$A_{[a']} = S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Definíció: Diagonalizálhatóság

Az A mátrix diagonalizálható, hogyha hasonló egy diagonális mátrixhoz.



Bilineáris függvény fogalma. Példa: skalárszorzat fogalma, skalárszorzat R^n -ben és C^n -ben. Euklideszi tér definíciója. Skalárszorzat, norma, metrika, és ezek kapcsolata euklideszi terekben. Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség euklideszi terekben (B) és speciálisan R^n -ben. Szög fogalmának általánosítása.

XII. Az Euklideszi tér

Bilineáris függvény fogalma

Definíció: Bilineáris függvény

Legyen a V vektortér a valós test felett. Az $L: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ leképezést bilineáris függvénynek nevezzük, ha mind a két változójában lineáris. L minden $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ vektorpárjához egyértelműen hozzárendel egy valós számot, amit $L(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ -vel jelölünk.

Tulajdonságai:

$\lambda \in \mathbb{R}$ és $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \in V$ vektorok

1. Linearitás

$$L[(\underline{v}_1 + \underline{v}_2), \underline{v}_3] = L(\underline{v}_1, \underline{v}_3) + L(\underline{v}_2, \underline{v}_3)$$

$$L[\underline{v}_1, (\underline{v}_2 + \underline{v}_3)] = L(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + L(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$$

2. Homogenitás

$$L(\lambda \underline{v}_1, \underline{v}_2) = \lambda L(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$$

$$L(\underline{v}_1, \lambda \underline{v}_2) = \lambda L(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$$

Skalárszorzat fogalma, skalárszorzat R^n -ben és C^n -ben

Definíció: Valós skalárszorzat

Legyen V vektortér a valós számtest felett.

Az $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, melynek függvényértékét $s(\underline{x}, \underline{y}) = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ -nal jelöljük, skalárszorzatnak nevezzük, hogyha a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Pozitív definit

$$\forall \underline{x} \in V \text{ esetén } \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0 \text{ és } \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } \underline{x} = \vec{0}$$

2. Szimmetrikus

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \text{ esetén } \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$$

3. Lineáris (additív, szuperpozíció)

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V \text{ esetén } \langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$$

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V \text{ esetén } \langle \underline{x}, \underline{y} + \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle$$

4. Homogén

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \text{ és } \lambda \in \mathbb{R} \text{ esetén } \langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \text{ és } \lambda \in \mathbb{R} \text{ esetén } \langle \underline{x}, \lambda \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

Tétel:

Minden véges dimenziós valós térben bevezethető a skalárszorzat.

Bizonyítása: Konstruktív

Megadjuk a skalárszorzatot:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Definíció: Komplex skalárszorzat

Legyen V vektortér a komplex számtest felett.

Az $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt skalárszorzatnak nevezzük, hogyha teljesíti a következő tulajdonságokat:

1. **Pozitív definit**

$\forall \underline{x} \in V$ esetén $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0$ és $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{x} = \underline{0}$

2. **Szimmetrikus**

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \overline{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}$

3. **Lineáris (additív, szuperpozíció)**

$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ esetén $\langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$

$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ esetén $\langle \underline{x}, \underline{y} + \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle$

4. **Homogenitás** (Definíció függő, mindig onnan emelem ki a konjugáltat, ahol a vektort konjugálom-transzponálom)

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\langle \underline{x}, \lambda \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$

Skalárszorzat, norma, metrika, és ezek kapcsolata euklideszi terekben

Definíció: Norma

A V vektorteret normálnak nevezzük, ha van olyan $n: V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvény, az úgynevezett norma, amelyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. **Pozitív definit**

$\forall \underline{x} \in V$ esetén $n(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$

2. **Homogenitás**

$\forall \underline{x} \in V$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $n(\alpha \underline{x}) = |\alpha| n(\underline{x})$

3. **Háromszög egyenlőtlenség**

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $n(\underline{x} + \underline{y}) \leq n(\underline{x}) + n(\underline{y})$

A norma az abszolútérték függvény általánosítása.

Jelölése: $n(\underline{x})$ vagy $\|\underline{x}\|$

Tétel:

Minden skalárszorzos tér normált tér.

Bizonyítás:

Bevezetjük a normát skalárszorzos alakban:

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$$

Definíció: Metrika

A V vektorteret metrikus térnek nevezzük, hogyha van olyan, metrikának nevezett $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvény, amelyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. **Pozitív definit**

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$

2. **Szimmetrikus**

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$ esetén $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$

3. **Háromszög egyenlőtlenség**

$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$ esetén $d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{z}, \underline{y})$

A metrika egy 3 dimenziós tér távolságfogalmának egyik általánosítása.

Jelölése: $d(\underline{x}, \underline{y})$

Tétel:

Minden normált tér metrikus tér.

Bizonyítás:

Bevezetem a metrikát norma (majd skalárszorzos) alakban:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\langle \underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y} \rangle}$$

Ezek kapcsolata:

Minden euklideszi tér egyben normált tér, és minden normált tér egyben metrikus tér is.

Ez azt jelenti, hogy az euklideszi térben felírható skalárszorzzal felírható a norma, és normával felírható a metrika. Tehát skalárszorzzal mind a norma, mind pedig a metrika felírható.

Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség euklideszi terekben (B) és speciálisan R^n -ben

Tétel: Cauchy - Bunyakovszkij - Schwarz egyenlőtlenség

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2 \leq \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle \cdot \langle \underline{b}, \underline{b} \rangle$$

Bizonyítása:

Tekintsük az $\langle \underline{a} + \lambda \underline{b}, \underline{a} + \lambda \underline{b} \rangle$ skalárszorzatot

1. Pozitív definit

$$0 \leq \langle \underline{a} + \lambda \underline{b}, \underline{a} + \lambda \underline{b} \rangle$$

2. Linearitás

$$\langle \underline{a} + \lambda \underline{b}, \underline{a} + \lambda \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle + \langle \underline{a}, \lambda \underline{b} \rangle + \langle \lambda \underline{b}, \underline{a} \rangle + \langle \lambda \underline{b}, \lambda \underline{b} \rangle$$

3. Szimmetria

$$\langle \underline{a} + \lambda \underline{b}, \underline{a} + \lambda \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle + \langle \underline{a}, \lambda \underline{b} \rangle + \langle \lambda \underline{b}, \underline{a} \rangle + \langle \lambda \underline{b}, \lambda \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle + \langle \underline{a}, \lambda \underline{b} \rangle + \langle \underline{a}, \lambda \underline{b} \rangle + \langle \lambda \underline{b}, \lambda \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle + 2\langle \underline{a}, \lambda \underline{b} \rangle + \langle \lambda \underline{b}, \lambda \underline{b} \rangle$$

4. Homogenitás

$$\langle \underline{a} + \lambda \underline{b}, \underline{a} + \lambda \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle + 2\langle \underline{a}, \lambda \underline{b} \rangle + \langle \lambda \underline{b}, \lambda \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle + \lambda 2\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle + \lambda^2 \langle \underline{b}, \underline{b} \rangle$$

Ez az egyenlet λ -ra nézve egy egyismeretlenes másodfokú egyenlőtlenség

$$0 \leq \lambda^2 \langle \underline{b}, \underline{b} \rangle + \lambda 2\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle + \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle$$

A függvénynek legfeljebb 1 gyöke lehet (ugyanis nagyobb-egyenlő, mint 0), ezért a diszkrimináns ≤ 0 .

$$D = 4\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2 - 4\langle \underline{b}, \underline{b} \rangle \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle \leq 0 \text{ amelyből}$$

$$\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2 \leq \langle \underline{a}, \underline{a} \rangle \langle \underline{b}, \underline{b} \rangle$$

Szög fogalmának általánosítása

Definíció: Két vektor szöge

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}{\|\underline{a}\| \|\underline{b}\|}$$

Legfontosabb eset: A két vektor merőleges egymásra, ha a skalárszorzatuk 0.



XIII. Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris homogén/inhomogén egyenletrendszer fogalma. Gauss elimináció, az algoritmus pontos ismertetése. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele és mátrix rangja (B). Mátrix rangja, determinánsa és inverze létezésének összefüggése. Egyenletrendszer megoldása inverz mátrixszal. Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása vektorok függetlenségének valamint generátorrendszer és bázis megállapítására. Mátrix inverz számítása Gauss eliminációval, bizonyítással.

Lineáris homogén/inhomogén egyenletrendszer fogalma

Definíció: Lineáris egyenletrendszer

A lineáris egyenletrendszer lineáris egyenletekből áll. Egy egyenletet lineárisnak nevezünk, hogyha a benne szereplő ismeretlenek legfeljebb elsőfokú hatványon vannak.

Általános alakja:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Definíció: Homogén egyenletrendszer

A lineáris egyenletrendszer homogén, ha minden konstans 0.

Ránézésre látszik, hogy a megoldása, ha minden ismeretlen 0. Ez a triviális megoldás.

Definíció: Inhomogén egyenletrendszer

Az egyenletrendszer inhomogén, hogyha van olyan konstans, amely nem 0.

Gauss-i elimináció, az algoritmus pontos ismertetése

A Gauss-i elimináció célja, hogy az adott egyenletrendszerből ekvivalens átalakításokkal lépcsős alakú egyenletrendszert hozzunk létre.

Definíció: Egyenletrendszer ekvivalens átalakítása

Ekvivalens az egyenletrendszer átalakítása, ha az átalakítás során a keletkező egyenletrendszernek azonos a megoldása, mint az eredeti egyenletrendszernek.

Az ekvivalens átalakítások a következők:

Két egyenlet felcserélése

Adott egyenlet szorzása egy nem nulla valós számmal

Az egyenletrendszer átalakítható úgy, hogy valamely egyenletének számszorosát hozzáadjuk valamely más egyenlethez.

Praktikus okokból az ismeretlenek sorrendjét rögzítettnek tekintjük.

A Gauss-i elimináció lépései

1. Megvizsgáljuk, hogy az i . egyenlet i . együtthatója nem nulla-e. Ha nulla, akkor az egyenletek cseréjével elérjük, hogy az együttható ne nulla legyen.
2. A többi egyenlet i . együtthatóját kiküszöböljük.
3. Ha egy egyenlet minden ismeretlene nulla, és a konstans is nulla, akkor ez az egyenlet nem mérvadó a megoldásban, elhagyjuk.
4. Ha egy egyenlet minden ismeretlene nulla, viszont a konstans nem, akkor ez az egyenlet ellentmondást tartalmaz, "tilos" sornak nevezzük. Ekkor az átalakítás véget ér, és az egyenletrendszernek nincsen megoldása.

Lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss-i eliminációval

1. Ha a lépcsős alakban szereplő egyenletek száma egyenlő az ismeretlenek számával, akkor behelyettesítéssel minden ismeretlen kiszámolható.
2. Ha a lépcsős alakban szereplő ismeretlenek száma nagyobb, mint ahány egyenlet a lépcsős alakban létrejött, akkor végtelen sok megoldás van, és ezeket paraméteres alakban adjuk meg.

A Gauss-i elimináció az egyenletek egy mátrixos alakjában

A cél az, hogy a kibővített mátrix bal alsó háromszögében csupa nulla elem szerepeljen, ezt a mátrix lépcsős alakjának nevezzük. Az a_{ii} elemeket a mátrix főátlójának nevezzük. A Lépcsős alakban a főátló alatti elemek nullák.

Elemi ekvivalens sorműveletek az egyenletrendszer kibővített mátrixára

1. A sorok felcserélhetők.
2. A sor szorozható egy nem nulla valós számmal.
3. Egy sor számszorosa hozzáadható egy másik sorhoz.

Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele és mátrix rangja

Definíció: Vektorrendszer rangja

Vektorrendszer rangján a vektorok által generált altér dimenzióját értjük.

Definíció: Mátrix rangja

Mátrix sorrangján a sorvektorok rangját értjük.

Mátrix oszloprangján az oszlopvektorok rangját értjük.

Mátrix determinánssrangján a belőle kiválasztható legnagyobb nem nulla értékű determináns méretét értjük.

Tétel:

Mátrix sor-, oszlop-, és determináns-rangja megegyezik.

Ezen tétel miatt elegendő a mátrix rangjáról beszélni.

Jelölés: $\text{rang}(A)$

Következménye:

Egy mátrix rangja legfeljebb $\min(m,n)$ lehet, hogyha a mátrix $n \times m$ -es.

Tétel: Egyenletrendszer megoldhatósága

Ha A $m \times n$ -es mátrix, akkor az $Ax = b$ egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, hogyha $\text{rang}(A) = \text{rang}([A|b])$, vagyis az együtthatómátrix rangja és a kibővített mátrix rangja megegyezik.

Bizonyítása:

Az egyenletrendszert a következő alakban írjuk:

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} = b_1$$

1. Ha a rangok egyenlők, akkor az egyenletrendszer megoldható.

$\text{rang}(A) = \text{rang}([A|b]) = r$ akkor bármely $(r+1)$ darab oszlopvektor összefüggő. Legyenek A független vektorai $a_1, a_2, \dots, a_r$. Ezekhez hozzátéve b -t a rendszer összefügg. Mivel b miatt lett a rendszer összefüggő, ezért kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, amelyben a skalár együtthatók az egyenletrendszer megoldásai.

2. Ha az egyenletrendszer megoldható, akkor a rangok megegyeznek.

Legyen egy megoldás $x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n} = b_1$ és $\text{rang}(A) = r$. Azt kell bizonyítani, hogy $\text{rang}([A|b]) = r$, vagyis bármely $(r+1)$ oszlopvektor lineárisan összefügg, és van r darab lineárisan független oszlopvektor. Ez az utóbbi feltétel A rangja miatt automatikusan teljesül.

Ha az $(r+1)$ vektor csak a -kból áll, akkor ezek az A rangja miatt összefüggők.

Ha az $(r+1)$ vektorok egyike a b vektor, akkor 2 eset van:

1. Ha r darab a vektor összefüggő, akkor b -t hozzátéve a rendszer összefüggő marad, tehát a rangja nem változik.
2. Ha az r darab a vektor lineárisan független. Ekkor bármilyen más a vektort hozzátéve a rendszer összefüggő lesz, ezért az kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Ezeket a b előállításába behelyettesítve azt kapjuk, hogy b kifejezhető az r darab lineárisan független a vektorral, tehát az r darab a vektor és a b vektor lineárisan összefüggenek, ezért a rang nem változik.

Mátrix rangja, determinánsa és inverze létezésének összefüggése

Tétel: Négyzetes mátrix rangja és inverzének illetve determinánsának összefüggése

Ha A $n \times n$ -es (négyzetes) mátrix, akkor A akkor és csak akkor reguláris (tehát létezik inverze), hogyha a rangja n .

$$\text{rang}(A) = n \Leftrightarrow A \text{ reguláris, létezik inverze} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow Ax = b \text{ egyetlen megoldása van}$$

$$\text{rang}(A) < n \Leftrightarrow Ax = 0 \text{ egyenletnek van nem triviális megoldása}$$

Egyenletrendszer megoldása inverz mátrixszal

Legyen adott egy egyenletrendszer mátrixos alakban:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ahol x az ismeretleneket tartalmazó vektor, b pedig egy adott vektor. Így az egyenletrendszer:

$$Ax = b$$

Ha $\det(A) \neq 0$ és $n = m$, akkor az A mátrix invertálható, és az egyenletrendszer megoldása:

$$x = A^{-1}b$$

Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása vektorok függetlenségének valamint generátorrendszer és bázis megállapítására

Tétel: Vektorok függetlenségének megállapítása

Ha egy mátrix determinánsa nem nulla, akkor a mátrixot felépítő vektorok lineárisan függetlenek.

Tétel: Generátorrendszer és bázis megállapítása

A generátorrendszer vizsgálatára is alkalmazhatjuk a lineáris egyenletrendszerek tulajdonságait, ugyanis megnézhethetjük egyenként, hogy milyen vektorokat állít elő lineáris kombinációként.

Ha a vektorok lineárisan függetlenek is, és generátorrendszert alkotnak az adott vektortérre, akkor ezek a vektorok bázisok.

Mátrix inverz számítása Gauss eliminációval, bizonyítással

Mátrix inverzének kiszámítása Gauss-i eliminációval

Adott egy mátrix, amelynek az inverzét keressük. Az inverz mátrix minden pozícióján a megfelelő indexxel ellátott ismeretlen, x áll. Ha ezt a két mátrixot összeszorozom: Az eredeti mátrix első sorát meg kell szoroznom az inverz mátrix első oszlopával, ennek eredménye az egységmátrix megfelelő pozícióján lévő elem, jelen esetben az 1. 3×3 mátrix esetén háromszor három azonos egyenletünk lesz, amelyek csak konstansban (0 vagy 1) térnek el egymástól. Viszont mind a 3 egyenletrendszernek azonos az együtthatómátrixa, és a Gauss-Jordan eliminációban pontosan ugyanazokat a lépéseket hajtánánk végre többször. Ezért felesleges háromszor leírni az együttható-mátrixot, elegendő, ha mellé illesztjük a megfelelő konstansok oszlopvektorait.

Tehát röviden ez azt jelenti, hogy az eredeti mátrix mellé illesztjük az egységmátrixot, és Gauss-Jordan

eliminációt addig hajtom végre, amíg nem lesz a bal oldalon egységmátrix.

Tétel: Mátrix inverzének számítása Gauss-i eliminációval

Adott $n \times n$ típusú mátrix inverzét számolhatjuk a következő mátrix Gauss-Jordan eliminációjával:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$$

Bizonyítás:

$$AA^{-1} = E$$

A szorzat n azonos mátrixot ad, amelyek rendre az egységmátrix elemeit adják. Tehát Gauss-Jordan eliminációt végezve felesleges n -szer leírni az együtthatómátrixot, elegendő egyszer leírni, és a kibővített mátrixba nem egy, hanem n további oszlopba beírni rendre a konstansok oszlopvektorait.



XIV. Determinánsok

Definíció, tulajdonságok. Gauss elimináció alkalmazása determinánsokra. **Inverz mátrix képlete.** Inverz mátrix képletének levezetése (B). **Három térvektor vegyes szorzata és geometriai jelentése (B).** **Determináns kifejtési és ferde kifejtési tétele.**

Definíció, tulajdonságok

Definíció: Determináns

Az n sorból, n oszlopból álló, $n \times n$ -es determinánst n -ed **rendű** determinánsnak nevezzük.

Jelölés: $D = \det(\mathbf{A})$, ahol D a determináns, és $\mathbf{A}$ pedig a mátrix.

Definíció: Minormátrix

Az $n \times n$ -es $\mathbf{A}$ mátrix a_{ik} eleméhez tartozó **minormátrixának** nevezzük, és $\mathbf{A}_{ik}$ -val jelöljük azt az $n-1$ -ed rendű mátrixot, melyet úgy kapunk $\mathbf{A}$ -ból, hogy annak i -edik sorát és k -adik oszlopát elhagyjuk.

Definíció:

Ha az $n-1$ -ed rendű mátrix determinánsát már értelmeztük, az **n -ed rendű $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának** nevezzük a következő számot:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{n+1} \det(\mathbf{A}_{1j})$$

Definíció: Sakktábla-szabály

A **sakktábla szabályban** a determináns bal sarkában lévő elem pozitív előjelű, tőle jobbra és lefelé a következő negatív előjelű, majd azoktól jobbra és lefelé is a következő elem pozitív előjelű, stb. Tehát a determinánsban váltakozóak az előjelek.

Definíció: Előjeles alldetermináns

Az a_{ij} elem **előjeles alldeterminánsán** értjük a $D_{ij}=(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})$ számot. Ezt felhasználva egy n -ed rendű $\mathbf{A}$ mátrix **determinánsa**:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} D_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} D_{ij}$$

A definíció helyes, bármely i rögzített sorra, illetve j rögzített oszlopra ugyanazt a számot kapjuk, és a determináns e képlettel meghatározott értéke **egyértelmű**.

A determináns tulajdonságai

1. Tétel:

Ha a determináns valamely sorát alával megszorozzuk, a determináns értéke az eredeti alfaszorosa lesz.

2. Tétel:

Ha a determináns i -edik sorának minden eleme kéttagú összeg, akkor két olyan determináns összegére bontható, melyből az első i -edik sorában az összeg első tagjai, a második determináns i -edik sorában az összeg második tagjai szerepelnek, a többi elem változatlan. (Az összeadás kommutativitása miatt mindegy, melyik mátrix az első, és a második, az a lényeg, hogy az összeg egyik tagja mindig az egyik mátrixba, a másik pedig a másikba kerüljön.)

3. Tétel:

Ha egy determináns egyik sora csupa 0 elemet tartalmaz, akkor a determináns értéke 0.

4. Tétel:

Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor a determináns értéke a (-1) -szeresére változik.

5. Tétel:

Ha egy determinánsban két sor megegyezik, akkor a determináns értéke 0.

6. Tétel:

Ha egy determináns valamely sorához hozzáadjuk valamely sor alfaszorosát, a determináns értéke nem változik.

7. Tétel:

Egy alsó (vagy felső) háromszögdetermináns értéke a főátlóban lévő elemek szorzata.

8. Tétel: Ferde kifejtés tétele

Ha egy determináns egyik sorának elemeit rendre valamely másik sor elemeihez tartozó alldeterminánsokkal szorozzuk meg, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk, az eredmény 0.

9. Tétel:

A fenti tételek mindegyike oszlopokra is igaz.

Gauss elimináció alkalmazása determinánsokra

A fenti tulajdonságok használatával elérhetjük, hogy a determináns háromszög-determináns legyen, és így az értéke a főátlóból leolvasható.

Inverz mátrix képlete, levezetése

Tétel: Inverz mátrix képlete

Ha A négyzetes mátrix, és $\det(A)$ nem egyenlő nullával, akkor

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$$

ahol $\text{adj}(A) = (D_{ki})$ az A mátrix úgynevezett klasszikus adjungált mátrixa.

Bizonyítás:

Mivel a mátrixok szorzása asszociatív, ezért a struktúrákról szóló fejezetben igazoltak szerint pontosan egy inverz létezik. Ha tehát találunk egy olyan mátrixot, amelyre $A \cdot B = E_n$, akkor ez a B mátrix nem lehet más, csakis az A mátrix inverze. Az előző tétel szerint: $A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) E_n$.

Beszorozva az egyenletet az $1/\det(A)$ skalárral, az alábbi adódik:

$$A \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = E_n$$

amelyből tehát

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

Három térvektor vegyes szorzata és geometriai jelentése

Definíció: Vegyes szorzat

Az $\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle$ valós számot az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok vegyes szorzatának nevezzük. Az eddigi definíciókat felhasználva, illetve kikötve, hogy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által bezárt szög α , az $\underline{a} \times \underline{b}$ és a $\underline{c}$ vektorok által bezárt szög pedig β :

$$\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin(\alpha) |\underline{c}| \cos(\beta)$$

Tétel: Vegyes szorzat geometriai jelentése

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok **vegyes szorzatának geometriai jelentése** a vektorok által meghatározott **paralelepipedon előjeles térfogata**.

Bizonyítása:

Tekintsük az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedont, ahol most a jelölés kedvéért legyen $\underline{a}$ és $\underline{b}$ az a két vektor, amely a paralelepipedon alján lévő paralelogrammát feszítik ki. Az $\underline{e}$ vektor legyen $\underline{a} \times \underline{b}$ -vel párhuzamos egységvektor, tehát merőleges az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok síkjára. Egy hasáb térfogata az alapterület szorozva a magasságával. Az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által meghatározott hasáb magassága a $\underline{c}$ vektornak az $\underline{a} \times \underline{b}$ -re eső merőleges vetülete. Jelölésekkel:

$$\langle \underline{a} \times \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle |\underline{a} \times \underline{b}| \cdot \underline{e}, \underline{c} \rangle = (|\underline{a}| |\underline{b}| \sin(\alpha)) \cdot \langle \underline{e}, \underline{c} \rangle = \text{alapterület} \cdot \text{magasság} = \text{előjeles térfogat}$$

Ahol $(|\underline{a}| |\underline{b}| \sin(\alpha))$ az alapterület, az $\langle \underline{e}, \underline{c} \rangle$ pedig a $\underline{c}$ vektor $\underline{a} \times \underline{b}$ -re eső előjeles merőleges vetülete, tehát a magasság.

Az előjel attól függően negatív vagy pozitív, hogy a $\underline{c}$ vektor ugyanabba a térfélbe mutat-e, mint az $\underline{a} \times \underline{b}$ vektor.

Tétel: Koordinátáikkal megadott vektorok vegyes szorzata ortonormált bázisban

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Determináns kifejtési és ferde kifejtési tétele

Tétel: Kifejtési tétel

Egy n -ed rendű determináns tetszőleges sora vagy oszlopa szerint kifejtethető, és

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} D_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} D_{ij}$$

Tétel: Ferde kifejtés tétele

Ha egy determináns egyik sorának (oszlopának) elemeit rendre valamely másik sor (oszlop) elemeihez tartozó al-determinánsokkal szorozzuk meg, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk, az eredmény 0.



XV. Komplex vektortér

Komplex vektortér ($\mathbb{C}^n$). Komplex skalárszorzat, norma, metrika fogalma, kapcsolatuk egymással és számításuk. Speciális komplex transzformációk (hermitikus, ferdén hermitikus, unitér) és tulajdonságaik (egy választott: (B)).

Komplex vektortér

Definíció: Komplex számok

Legyen $\mathbb{C}$ a valós számpárok halmaza: $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$. A $\mathbb{C}$ -n két műveletet értelmezünk: egy összeadás és egy szorzás nevűt. A szokásos módon $+$ és $\cdot$ jelekkel jelöljük ezeket. A $\mathbb{C}$ halmaz elemei a műveletekkel együtt alkotják a komplex számokat.

Definíció: Komplex számok egyenlősége

Két komplex szám akkor és csak akkor egyenlő, hogyha első és második elemeik egymással páronként egyenlők:

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

Következménye:

$(a, b) \neq (b, a)$, kivéve, hogyha $a = b$.

Definíció: Komplex számok összeadása

$(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C}$

Definíció: Komplex számok szorzása

$(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ esetén $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}$

Tétel: Test

A $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ alakú számok testet alkotnak az előző műveletekre nézve.

Tétel: Vektortér

A $\mathbb{C} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ alakú számok vektorteret alkotnak a valós számok testet felett.

Definíció: Vektortér

A V nemüres halmazt **vektortérnek** nevezzük a T test felett, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

- A V halmazon értelmezve van egy **összeadás** nevű művelet, amely bármely $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ elemekhez egyértelműen hozzárendel egy V -beli elemet, amelyet $\underline{v}_1 + \underline{v}_2$ -vel jelölünk. Az **összeadás kommutatív csoport**.
- A T test és a V halmaz között értelmezve van a **skalárral való szorzás**. Ha bármely $u \in T$ úgynevezett skalárhoz és bármely $\underline{v} \in V$ úgynevezett vektorhoz egyértelműen hozzárendelünk egy V belső elemet, amelyet $u\underline{v}$ -vel jelölünk. A skalárszoros a következő tulajdonságokkal rendelkezik:
 1. $1\underline{v} = \underline{v}$, ahol 1 a T test szorzásra vonatkozó egységeleme
 2. **Vegyes asszociatív szabály**, $(uk)\underline{v} = u(k\underline{v})$.
 3. **Vegyes disztributív szabály**:
 - a. $(u+k)\underline{v} = u\underline{v} + k\underline{v}$
 - b. $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)u = u\underline{v}_1 + u\underline{v}_2$

Komplex skalárszorzat, norma, metrika fogalma, kapcsolatuk egymással és számításuk

Definíció: Komplex skalárszorzat

Legyen V vektortér a komplex számtest felett.

Az $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt skalárszorzatnak nevezzük, hogyha teljesíti a következő tulajdonságokat:

1. **Pozitív definit**

$$\forall \underline{x} \in V \text{ esetén } \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle \geq 0 \text{ és } \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle = 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } \underline{x} = \underline{0}$$

2. **Szimmetrikus**

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \text{ esetén } \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \overline{\langle \underline{y}, \underline{x} \rangle}$$

3. **Lineáris (additív, szuperpozíció)**

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V \text{ esetén } \langle \underline{x} + \underline{y}, \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle + \langle \underline{y}, \underline{z} \rangle$$

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V \text{ esetén } \langle \underline{x}, \underline{y} + \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{z} \rangle$$

4. **Homogenitás** (Definíció függő, mindig onnan emelem ki a konjugáltat, ahol a vektort konjugálom-transzponálom)

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \text{ és } \lambda \in \mathbb{R} \text{ esetén } \langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \bar{\lambda} \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \text{ és } \lambda \in \mathbb{R} \text{ esetén } \langle \underline{x}, \lambda \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$$

Komplex skalárszorzat kiszámítása:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \overline{\underline{x}}^T \underline{y}$$

$\underline{x}$ konjugált-transzponáltját szorzom az $\underline{y}$ -nal.

Definíció: Norma

A V vektorteret normálnak nevezzük, ha van olyan $n: V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvény, az úgynevezett norma, amelyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. **Pozitív definit**

$$\forall \underline{x} \in V \text{ esetén } n(\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$$

2. **Homogenitás**

$$\forall \underline{x} \in V \text{ és } \alpha \in \mathbb{R} \text{ esetén } n(\alpha \underline{x}) = |\alpha| n(\underline{x})$$

3. **Háromszög egyenlőtlenség**

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \text{ esetén } n(\underline{x} + \underline{y}) \leq n(\underline{x}) + n(\underline{y})$$

A norma az abszolútérték függvény általánosítása.

Jelölése: $n(\underline{x})$ vagy $\|\underline{x}\|$

Tétel:

Minden skalárszorzatos tér normált tér.

Bizonyítása:

Bevezetjük a normát skalárszorzatos alakban:

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$$

Definíció: Metrika

A V vektorteret metrikus térnek nevezzük, hogyha van olyan, metrikának nevezett $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ függvény, amelyre a következő tulajdonságok teljesülnek:

1. **Pozitív definit**

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \text{ esetén } d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$$

2. **Szimmetrikus**

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in V \text{ esetén } d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$$

3. **Háromszög egyenlőtlenség**

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V \text{ esetén } d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{y}, \underline{z})$$

A metrika egy 3 dimenziós tér távolságfogalmának egyik általánosítása.

Jelölése: $d(\underline{x}, \underline{y})$

Tétel:

Minden normált tér metrikus tér.

Bizonyítása:

Bevezetem a metrikát norma (majd skalárszorzatos) alakban:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\| = \sqrt{\langle \underline{x} - \underline{y}, \underline{x} - \underline{y} \rangle}$$

Ezek kapcsolata:

Minden euklideszi tér egyben normált tér, és minden normált tér egyben metrikus tér is.

Ez azt jelenti, hogy az euklideszi térben skalárszorzattal felírható a norma, és normával felírható a metrika. Tehát skalárszorzattal mind a norma, mind pedig a metrika felírható.

Speciális komplex transzformációk és tulajdonságai**Speciális mátrixok**

Valós	Komplex	Sajátérték
Szimmetrikus, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$	Hermitikus, $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}^T}$	valós
Anti/Ferdén szimmetrikus, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$	Ferdén Hermitikus, $\mathbf{A} = -\overline{\mathbf{A}^T}$	tisztán képzetes, vagy 0
Ortogonalis: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$	Unitér: $\mathbf{A}^{-1} = \overline{\mathbf{A}^T}$	sajátérték abszolútértéke 1

Ha a Hermitikus mátrix elemei valósak, akkor a mátrix szimmetrikus.

Ha a ferdén Hermitikus mátrix elemei valósak, akkor a mátrix antiszimmetrikus.

Ha az Unitér mátrix elemei valósak, akkor a mátrix ortogonalis.

Tétel: Hermitikus mátrix sajátértéke

Hermitikus mátrix sajátértékei valósak.

Bizonyítása:

$$\mathbf{A}\underline{x} = \lambda \underline{x} \text{ /beszorzom balról } \underline{x}^T$$

$$\underline{x}^T \mathbf{A} \underline{x} = \underline{x}^T \lambda \underline{x} = \lambda \underline{x}^T \underline{x} = \lambda \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \text{ valós, ugyanis } i^2 = -1$$

$$\lambda = \frac{\underline{x}^T \mathbf{A} \underline{x}}{\underline{x}^T \underline{x}}$$

Mostmár csak azt kell belátni, hogy a számláló is valós. Hogyha egy komplex szám valós, akkor ez a komplex szám egyenlő a konjugáltjával. Mivel a számláló egy szám, ezért megegyezik a transzponáltjával.

$$\underline{x}^T (\mathbf{A} \underline{x}) = [\underline{x}^T (\mathbf{A} \underline{x})]^T = (\mathbf{A} \underline{x})^T [\underline{x}^T]^T = \underline{x}^T \mathbf{A}^T \underline{x} = \underline{x}^T \overline{\mathbf{A}} \underline{x} = \overline{\underline{x}^T (\mathbf{A} \underline{x})}$$

$$\text{ugyanis } \mathbf{A}^T = \overline{\mathbf{A}}$$

A szám egyenlő a konjugáltjával, ezért a sajátérték valós.

Tétel: Ferdén Hermitikus mátrix sajátértéke

A ferdén Hermitikus mátrix sajátértékei vagy nullák, vagy pedig tisztán képzetesek.

Bizonyítása:

A bizonyítás lényege, hogy a komplex szám akkor és csak akkor képzetes, ha megegyezik a konjugáltjának (-1)-szeresével.

$$\lambda = \frac{\underline{x}^T \mathbf{A} \underline{x}}{\underline{x}^T \underline{x}}$$

$$\underline{x}^T (\mathbf{A} \underline{x}) = [\underline{x}^T (\mathbf{A} \underline{x})]^T = [\mathbf{A} \underline{x}]^T [\underline{x}^T]^T = \underline{x}^T \mathbf{A}^T \underline{x} = \underline{x}^T (-\overline{\mathbf{A}}) \underline{x} = -\overline{\underline{x}^T (\mathbf{A} \underline{x})}$$

Tétel: Unitér mátrix sajátértéke

Unitér mátrix sajátértékeinek az abszolútértéke 1.

Bizonyítása:

$$\left. \begin{array}{l} A\underline{x} = \lambda \underline{x} \\ \overline{(A\underline{x})}^T = \overline{\lambda \underline{x}}^T \end{array} \right\} \text{összeszorozom}$$

$$\overline{(A\underline{x})}^T (A\underline{x}) = \bar{\lambda} \bar{\underline{x}}^T \lambda \underline{x} = \bar{\lambda} \lambda \bar{\underline{x}}^T \underline{x}, \text{ ahol azt kell tudni, hogy } \bar{\lambda} \lambda = |\lambda|^2$$

$$\underline{x}^T A^T (A\underline{x}) = \underline{x}^T (A^T A) \underline{x} = \underline{x}^T \underline{x}$$

A két egyenletből:

$$|\lambda|^2 \bar{\underline{x}}^T \underline{x} = \bar{\underline{x}}^T \underline{x} \text{ amelyből } |\lambda|^2 = 1$$



XVI. Ortogonalitás

Vektorterek és euklideszi terek kapcsolata.
Ortogonalis vektorok függetlenségének bizonyítása térvektorok és magasabb dimenziók esetén. Gram Schmidt ortogonalizáció ismertetése. Ortonormált bázis létezése. Térvektorok felbontása adott vektorral párhuzamos, illetve arra merőleges összetevőkre. Ortogonalis mátrix fogalma.

Vektorterek és euklideszi terek kapcsolata

Definíció: Euklideszi tér

A skalárszorzattal ellátott vektortereket euklideszi tereknek nevezzük.

Tétel:

Minden véges dimenziós vektortérben bevezethető a skalárszorzat.

Ortogonalis vektorok függetlenségének bizonyítása térvektorok és magasabb dimenziók esetén

Tétel:

Ortogonalis, nem nulla vektorok lineárisan függetlenek.

Bizonyítása:

A függetlenség definíciójából indulunk ki.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \underline{0}$$

akkor és csak akkor, hogyha $\forall \lambda_i = 0$.

Vegyük rendre az $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ vektorokkal való skalárszorzatot.

$$\lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots + \lambda_n \underline{x}_n = 0 \quad / \cdot \underline{x}_j \text{ ahol } j = 1, 2, \dots, n$$

Mivel a vektorok egymásra ortogonálisak, ezért két különböző indexű vektornak a skalárszorzata 0 (skalárszorzat definíciója alapján). Ezzel ezért azt kapjuk, hogy $\lambda_j \langle \underline{x}_j, \underline{x}_j \rangle = 0$. A skalárszorzat pozitív definit tulajdonsága miatt ez csak akkor teljesül, hogyha $\lambda_j = 0$.

Gram Schmidt ortogonalizáció ismertetése. Ortonormált bázis létezése

Definíció: Ortonormált rendszer

Ortonormált egy rendszer, ha a vektorok páronként ortogonálisak (merőlegesek) és a hosszuk 1.

Tétel:

Minden euklideszi térben van ortonormált bázis.

Minden tér saját magának altére, az általánosság megszorítása nélkül a bizonyítást elegendő (és praktikus) alterekre bemutatni.

Tétel:

Minden altérben van ortonormált bázis.

Bizonyítása: Konstruktív

Azt bizonyítjuk, hogy bármely független rendszerből kiindulva, így bázisból is tudunk ugyanolyan elemszámú ortogonális rendszert konstruálni. Az eljárás neve

Gram-Schmidt ortogonalizáció.

Legyen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k$ a független rendszer. Ebből $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_k$ ortogonális rendszer a következőképpen kapható:

$$\underline{c}_1 := \underline{b}_1$$

$$\underline{c}_2 := \underline{b}_2 + \alpha_{21}\underline{c}_1 \text{ vegyük mind a két oldal skalárszorzatát } \underline{c}_1\text{-gyel,}$$

$$\text{illetve } \langle \underline{c}_1, \underline{c}_2 \rangle = 0$$

$$\langle \underline{c}_2, \underline{c}_1 \rangle = \langle \underline{b}_2, \underline{c}_1 \rangle + \langle \alpha_{21}\underline{c}_1, \underline{c}_1 \rangle$$

$$0 = \langle \underline{b}_2, \underline{c}_1 \rangle + \langle \alpha_{21}\underline{c}_1, \underline{c}_1 \rangle$$

$$\alpha_{21}\langle \underline{c}_1, \underline{c}_1 \rangle = -\langle \underline{b}_2, \underline{c}_1 \rangle$$

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle \underline{b}_2, \underline{c}_1 \rangle}{\langle \underline{c}_1, \underline{c}_1 \rangle}$$

Ebből

$$\underline{c}_2 = \underline{b}_2 + \frac{-\langle \underline{b}_2, \underline{c}_1 \rangle}{\langle \underline{c}_1, \underline{c}_1 \rangle} \underline{c}_1$$

Ehhez hasonlóan általában a definiáló egyenletnek rendre vesszük a skalárszorzatát a $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_{k-1}$ vektorokkal, az együtthatókra pedig a következőt kapjuk:

$$\underline{c}_k := \underline{b}_k + \alpha_{k1}\underline{c}_1 + \alpha_{k2}\underline{c}_2 + \dots + \alpha_{kk-1}\underline{c}_{k-1}$$

$$\alpha_{kj} = -\frac{\langle \underline{b}_k, \underline{c}_j \rangle}{\langle \underline{c}_j, \underline{c}_j \rangle}, j = 1, 2, \dots, k-1$$

A konvekció miatt a kapott rendszer ortogonális.

Térvektorok felbontása adott vektorral párhuzamos, illetve arra merőleges összetevőkre

Tétel:

Térvektorok felbontása adott vektorral párhuzamos, illetve arra merőleges összetevőkre: Adottak az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektorok. Az $\underline{a}$ vektor felírható a $\underline{b}$ vektorral párhuzamos, illetve erre merőleges összetevők összegeként.

$$\underline{a}_m = \underline{a} - \underline{a}_p$$

$$\underline{a}_p = \frac{\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle}{|\underline{b}|} \cdot \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$$

Ortogonalis mátrix fogalma

Definíció: Ortogonalis mátrix

Az $\mathbf{A}$ mátrix ortogonalis, ha $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$, ahol $\mathbf{E}$ a megfelelő típusú egységmátrix.



Transzformáció mátrixa, ha áttérünk másik bázisra. Mátrixok diagonalizálása. Algebrai és geometriai multiplicitás. A diagonalizálás elégséges feltétele.

XVII. Bázistranszformáció

Transzformáció mátrixa, ha áttérünk másik bázisra

Tétel:

Legyen $V \neq \{0\}$ n dimenziós vektortér, $[e]$ és $[u]$ két bázis V -ben. Ha a V tér $\underline{x}$ vektorának koordináta mátrixa

$$\underline{x}_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]}$$

az $[e]$ bázisra vonatkozik, akkor ugyanazon $\underline{x}$ vektor $[u]$ bázisra vonatkozó koordinátái az alábbi képletből számíthatók:

$$\underline{x}_{[u]} = \mathbf{U}^{-1} \underline{x}_{[e]}$$

ahol az $\mathbf{U}$ mátrix oszlopai az $[u]$ bázis vektorainak az $[e]$ bázisra vonatkozó koordináta-mátrixai. Az $\mathbf{U}$ mátrixot áttérési mátrixnak nevezzük.

Bizonyítása:

Az $\underline{x}$ vektor $[e]$ szerinti **eredeti** koordináta mátrixa:

$$\underline{x}_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]}$$

és ugyanezen $\underline{x}$ vektor $[u]$ szerinti **új** koordináta-mátrixa

$$\underline{x}_{[u]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[u]}$$

közötti összefüggések:

$$\underline{x} = \underline{x}_{[e]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{[e]} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[e]} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[e]} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{[e]} = E_{[e]} \underline{x}_{[e]}$$

Illetve

$$\underline{x} = \underline{x}_{[u]} = x'_1 \underline{u}_1 + x'_2 \underline{u}_2 + \dots + x'_n \underline{u}_n = x'_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[u]} + x'_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{[u]} + \dots + x'_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{[u]} = \mathbf{U}_{[u]} \underline{x}_{[u]}$$

Megjegyzés: Az $\underline{x}$ vektor eredeti koordináta-mátrixa mindig az egységmátrixsal van szorozva: bármely bázis önmagára vonatkozó koordinátás alakja kanonikus.

A bal oldalak egyenlőségéből a jobboldalak egyenlősége következik: $E_{[e]} \underline{x}_{[e]} = \mathbf{U}_{[u]} \underline{x}_{[u]}$.

Ezt rendezve kapjuk a tétel állítását.

Mátrixok diagonalizálása

Tétel: Transzformációs mátrix diagonalizálása

Ha a transzformáció sajátvektorai bázist alkotnak, akkor áttérve erre a bázisra, a bázistranszformáció eredménye az a diagonális mátrix, ahol a főátlóban a sajátértékek állnak.

$$A_{[a']} = S^{-1} A S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Definíció: Mátrixok hasonlósága

Az A mátrix hasonló a B mátrixhoz, hogyha létezik egy olyan S mátrix, amellyel fennáll, hogy $A = S^{-1}BS$.

Definíció: Diagonalizálhatóság feltétele

Az A mátrix diagonalizálható, hogyha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Tétel: Diagonalizálás elégséges feltétele

Ha valamely A kvadratikus ($n \times n$ -es) mátrix sajátértékei mind különbözőek, akkor a mátrix diagonalizálható.