

# Próba ZH- A csoport megoldás

## 1. Geometriai villámkérdések

### a) Írja fel az X tengelyre történő tükrözés mátrixát euklideszi koordinátákban!

Kétdimenzióban:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  Egyébként az Y tengelyre tükrözés:  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ha visszakanyarodunk a lineáris algebra tudáshoz ez egyértelmű, csak a bázisvektorok képei oszlopként mátrixba írva.

### b) Az $[5, 3, 4]$ homogén koordinátás vektornak mi az Euklideszi megfelelője?

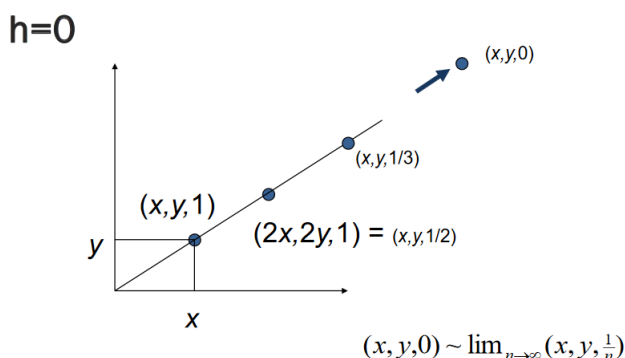
$[X_h, Y_h, h] \rightarrow \left[ \frac{X_h}{h}, \frac{Y_h}{h} \right]$ , tehát  $[5, 3, 4] \rightarrow \left[ \frac{5}{4}, \frac{3}{4} \right]$ .

### c) Mi az ideális pont? Adjon 2 különböző példát homogén koordinátás alakban, és szemléltesse elhelyezkedésüket.

A projektív geometriában minden egyeneshez tartozik egy ún. ideális pont, mely akkor egyezik meg két különböző egyenesnél, ha azok párhuzamosak. Ekkor az  $[X_h, Y_h, h]$  felírásban a  $h$  a nullához tart.

Az egyenes mindét irányban ugyanazt az ideális pontot adja a „világ peremén”. Az ideális pont tehát összeragasztja egyenesünk végeit, így téve körszerűvé azt.

Az alábbi ábra szemléletesen mutatja az elhelyezkedésüket.



Szemléletes elképzeléséhez azt képzeljük el hogy a fényképeken futó távolság mérő egyenesek habár elméletben párhuzamosak, mégis egy pontban futnak össze. Innen származik az ideális pont ötlete. Ebben a szócikkben szemléletesen le van írva.

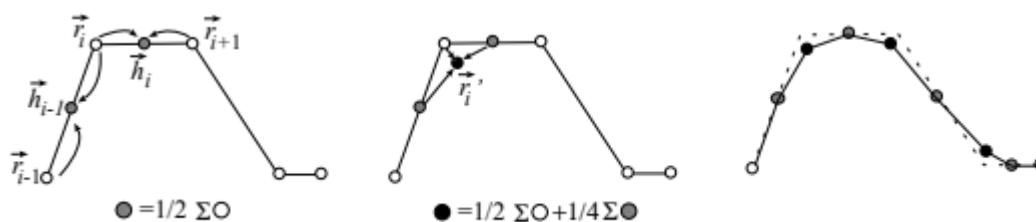
[https://hu.wikipedia.org/wiki/Ide%C3%A1lis\\_t%C3%A9r](https://hu.wikipedia.org/wiki/Ide%C3%A1lis_t%C3%A9r)

## 2. feladat - Catmull-Clark görbe és négyszőgháló-finomító

### a) Definiáld a Catmull-Clark görbe-finomító és négyszőgháló-finomító eljárásokat. Mik az alapvető hasonlóságok és különbségek egy Catmull felosztással nyert görbe és ugyanazokra a kontrollpontokra illesztett Lagrange görbe között?

A Catmull-Clark görbe eljárás célja, hogy alapvetően szögletes felületeket / felosztott görbéket finomíthassunk. Például egy kockából több lépésen keresztül közelíthetünk a gömbhöz. Ennek folyamata 2 dimenzióban az alábbi ábrán látható.

$r_0, \dots, r_{m-1}$ : az eredeti pontsorozat,  $h_0, \dots, h_{m-1}$ : a keletkező felezőpontok



Tehát az egy lépés alatt keletkező pontjaink egyik részét úgy kapjuk, hogy:

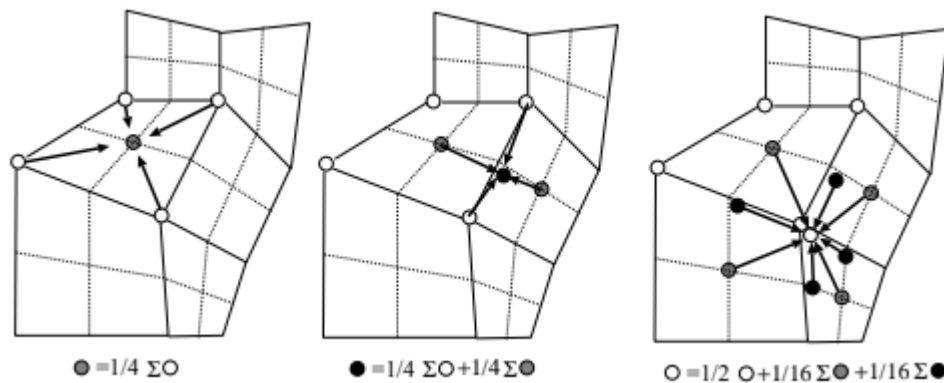
- I. Vesszük az eddigi csúcspontok felezőpontjait (Szélső pontok maradnak!) Ettől persze ugyanolyan szögletes maradt még a görbénk.
- II. Ezért a régi vezérlőpontjainkat úgy módosítjuk, hogy azok a régi helyük és a két oldalukon lévő felezőpontjuk közé kerüljenek az alábbi súlyozással:

$$\vec{r}'_i = \frac{1}{2}\vec{r}_i + \frac{1}{4}\vec{r}_{i-1} + \frac{1}{4}\vec{r}_{i+1} = \frac{3}{4}\vec{r}_i + \frac{1}{8}\vec{r}_{i-1} + \frac{1}{8}\vec{r}_{i+1}.$$

Ez azt jelenti, hogy a felezőpontok felezőpontjainak és az eredeti pontoknak a felezőjén található.

Ugyanez 3 dimenzióban rendkívül hasonlóan történik. Induljunk egy 3-dimenziós négyszög hálóból, melynek minden élének közepén felveszünk egy-egy pontot - az él végeinek átlagát, majd a lap csúcsainak átlagát is (tehát a lap középpontját). Összekötve ezeket az új pontokat egy hasonló négyszög hálót kapunk, azonban négyszer annyi négyszög szerepel rajta. Kezdjük el a simítást!

- I. Az új pont legyen két szomszédos élen lévő két csúcspont, illetve két középső lappont átlaga.
- II. Ezután a kapott új pontok és a lapközepek átlagát vesszük az illeszkedési pontokban.



Az eljárás szépen kisimítja a térbeli alakzatunkat. Erre egy példa (csak a szemléletesség érdekében):



A Lagrange görbével szemben az eredmény nem interpolációs, hanem approximációs. Ezen kettő közt az a különbség, hogy az interpolációs eljárás során tulajdonképpen mindig egy tökéletes görbét illesztünk a lehető legjobban az adott kontrollpontokra, approximáció során csak közelítünk. Az approximáció előnye lehet, hogy megspórolhatunk sok fölösleges görbületet, viszont az is igaz, hogy elméleti síkon sosem kapunk teljesen görbe felületet. Az approximációs eset feltétele, hogy a finomított alakzat az eredeti konvex burka alatt maradjon.

### 3. feladat - Mátrixozás

- a) Egy 2D geometriai alakzatunkat szeretnénk forgatni az  $[5, 2]$  (euklideszi) koordinátájú pont körül  $+30^\circ$ -kal, majd ugyanezen pont körül nagyítsuk  $x$  irányban 2-szeresére, és zsugorítsuk  $y$  irányban a felére. Végül tükrözzük az alakzatot középpontosan az origóra. Írd fel az eredő transzformáció mátrixát homogén koordinátás alakban, feltéve, ha a pontjainkat sorvektorokkal írjuk le!

Először érdemes felírni a különböző transzformációk mátrixos alakját.

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*Forgatási mátrix*                      *Skálázó mátrix*                      *Középpontos tükrözés*

Jelen esetben értelemszerűen a  $\phi = +30^\circ$ ,  $S_x = 2$ ,  $S_y = \frac{1}{2}$ . Eszerint helyettesítünk ezekbe a mátrixokba. a mátrixokat összeszorozva megkapjuk a megfelelő transzformációt. Számoljuk ki az eredő transzformációt leíró mátrixot! Ezt megkaphatjuk ezek tetszőleges szorzataként.

$$A = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

Amennyiben egy transzformáció mátrixát homogén koordinátás alakban kívánjuk felírni, akkor csupán hozzá kell adnunk egy „új dimenziót” az alábbiak szerint.

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tulajdonképpen, ha affin transzformációkról beszélünk akkor hozzáveszünk egy új oszlopot és egy sort a mátrixunkhoz, mely  $[0, 0, 1]$ , illetve  $[0, 0, 1]^T$ . Amennyiben eltolás is kérdéses lenne a sort kéne változtatnunk. Nézzünk erre is egy példát, mert simán előfordulhat ZH-n!

Legyen például az eltolás vektor  $[2, 3]$  ekkor az utolsó sor úgy fog kinézni, hogy

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Általános esetben tehát elmondhatjuk, hogy az alábbi módon térünk át homogén koordinátákra:

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \end{bmatrix}$$

Természetesen nekünk most kétdimenziós volt a feladat, így eggyel visszább veszünk a dimenziókból. Így lesz a mátrix általános alakja:

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ p_x & p_y & 1 \end{bmatrix}$$

Aki továbbra sem érti a homogén koordinátás transzformációkat, ahhoz hogy jól átlássa az alábbi videót ajánlom: <https://www.youtube.com/watch?v=liXB6tYtY4w>

#### 4. feladat - 2D és 3D grafika

**Mi a definíció szerinti különbség a 2D és a 3D grafikai algoritmusok között? Sorold fel a képszintézis feladatait, és 1-2 mondattal jellemezd az egyes lépések céljait, itt is megkülönböztetve a 2D és 3d grafika eseteit!**

*Nem pontosan tudom mit ért a feladat azon, hogy mi a különbség az algoritmusok között.*

2D-s grafika létrehozása során 2D-s világkoordináta rendszert használhatunk. A pontok a képszintézis során pontosan olyan színben fognak megjelenni ami a kezdeti színük is volt. A window akár azonos is lehet a teljes ábránkkal, de maximum a helyzete változik rajta. Ezzel szemben 3D-ben a virtuális világunkhoz tartozik egy kamera / szem is, amely általános helyzetű 2D ablakot lát egy 3D-s világban.

A képszintézis feladatai:

##### I. Vektorizáció

Objektumok közelítése egyszerű primitívekkel: pontok, szakaszok, poligonok

##### II. Transzformációk

A primitívek eredetileg egy világ-koordinátarendszerben voltak megadva, de a megjelenítés már a képernyő koordinátarendszerében történik. Ez az átalakítás történik itt.

2D-s grafikában: 2D-s lineáris koordináta transzformációk szükségesek csak

3D-s grafikában: esetben vetítésre van szükség.

##### III. Vágás

A világ azon részeinek azonosítása, amelyek ténylegesen meg is jelennek a képen, az érdektelen objektumok / objektumrészek elhagyása.

2D-s grafikában: 2D-s téglalap

3D-s grafikában: ablak és szem által definiált végtelen piramis

##### IV. Takarás

Mivel több objektum is vetülhet egy képpontra, döntenünk kell hogy melyik látszik, vagyis melyik van „felül”.

2D-s grafikában: prioritás az objektumok között

3D-s grafikában: döntés a szempozíció és a távok alapján

##### V. Árnyalás

A látszódo objektum adott képpontban érvényes színének meghatározása

2D-s grafikában: saját szín alkalmazása

3D-s grafikában: saját szín + a térben fennálló fényviszonyok együttes függvénye adja meg.