

8. tétel - Projektív geometria

Homogén koordináták bevezetése

- Az eltolás transzformációt nem tudtuk mátrixos alakban felírni, de ha beveszünk még egy koordinátát akkor lehetséges:

$$[r', 1] = [r, 1] \begin{matrix} \mathbf{A} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{p} \end{matrix} = [r \mathbf{A} + \mathbf{p}, 1]$$

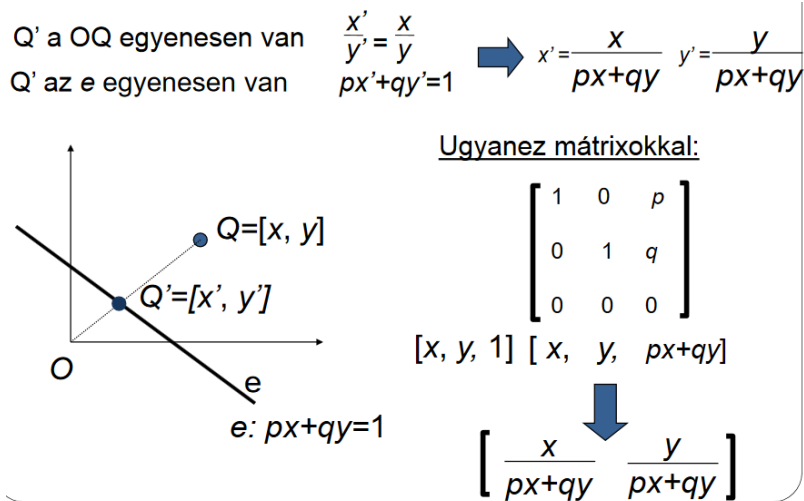
- A homogén koordináták nem csak az eltolás kedvéért léteznek, hanem központi része a számítógépes grafikának
 - 3D grafika 2D-s megjelenítése: vetítés (euklideszi térben nem minden vetíthető centrálisan)
- Euklideszi geometriában:
 - 2 pont határoz meg egy egyenest
 - 2 különböző egyenes legfeljebb egy pontban metszi egymást
 - 1 ponton mindig csak egy egyenes megy át ami párhuzamos egy másik egyenessel
 - alapja: Décartes
- Projektív geometriában:
 - Projektív sík = Euklideszi sík + ideális pontok
 - Minden egyeneshez egy ideális pont tartozik, ha két egyenesnél ez a pont megegyezik, akkor párhuzamosak
 - alapja: Homogén
- Homogén koordináták alkalmazásakor a pontjainkat mechanikai rendszerek súlypontjaiként írunk le.
- A homogén elnevezés onnan származik, hogyha az összes súlyt ugyanazzal a skalárral szorozzuk a súlypont, azaz a koordináták által definiált pont nem változik.+++
- A homogén koordináták és a Descartes koordináták kapcsolata:
$$[X_h, Y_h, Z_h, h] = \left[\frac{X_h}{h}, \frac{Y_h}{h}, \frac{Z_h}{h} \right]$$
 - A negyedik koordinátával történő osztást homogén osztásnak nevezik.
 - Tudjuk, hogy ha az x y z Décartes koordináták ismert akkor bármely $x \cdot h$ $y \cdot h$ $z \cdot h$ számhármassal megfelelő lehet ahhoz, hogy felírjuk a homogén koordináták alakot
 - Tehát vissza felé úgy állítjuk be az értékeket, hogy a $h=1$.
 - Ha $h \neq 0$ akkor affín pontról beszélünk

Homogén lineáris transzformációk

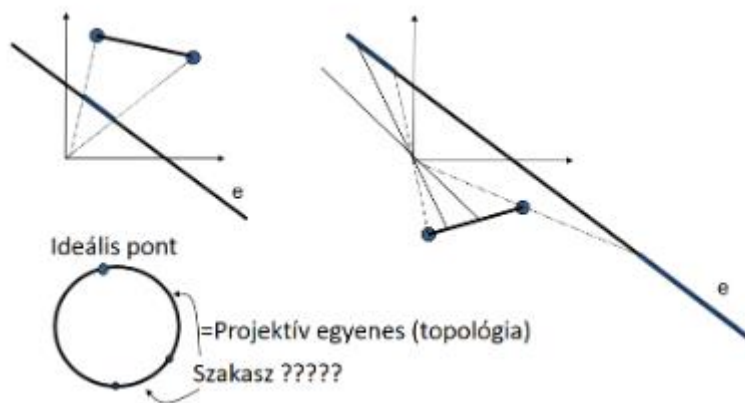
- Euklideszi sík affín transzformációi: $[x', y'] = [x, y] \mathbf{A} + \mathbf{p}$
- Hasonlóan homogénél, csak a h bővítéssel és az A mátrix helyett T

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{bmatrix}$$

- A homogén transzformációk tulajdonságai:
 - pontot pontba
 - egyenest egyenesbe
 - konvex kombinációkat konvex kombinációkba visznek át
- Euklideszi geometriában nem lineáris a Q pont vetítése e-re

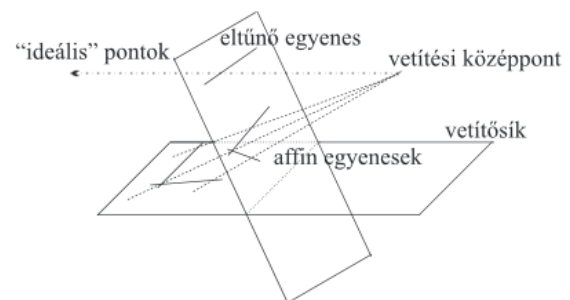


- Az átfordulási probléma azt jelenti, hogy a vetített szakasz valamely pontja a vetítés során egy ideális pontba kerül. A Descartes-koordináta-rendszerbe úgysem tudunk mit kezdeni a végtelen távoli pontokkal, a vetítés előtt eltávolítjuk azokat, akik ideális pontokra kerülnének.

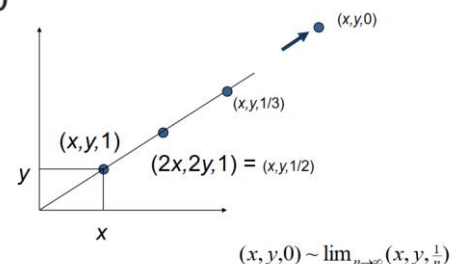


Transzformációk projektív geometriai megközelítése és a centrális projekció

- Mivel a számítógépes grafika 2D-s képet állít elő 3D-s világból nyilván megjelenik a vetítés, mint dimenziócsökkentő művelet.
- A természetes kép alkotnak leginkább megfelelő művelet a középponti vetítés, azaz a centrális projekció.
- Euklideszi térben nem minden pont vetíthető centrálisan, tehát a projektív geometriát alkalmazzuk.
- A képsíkkal párhuzamos vetítősugarakkal jellemezhető pontoknak nem felel meg képpont az euklideszi geometriában, ezek a végtelenbe vetülnek, tehát az euklideszi tér lyukas.



$h=0$



Ideális pont

- Minden egyeneshez tartozik
- Akkor egyezik meg két egyenesnél, ha párhuzamosak
- Ekkora a h a nullához tart
- Tehát az egyenes végpontja tulajdonképpen
- Ez a két végpontján megegyezik, így körszerűvé teszi az egyenest

Egyenes/sík homogén egyenlete

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

$$a \cdot \frac{X_h}{h} + b \cdot \frac{Y_h}{h} + c = 0 \iff a \cdot X_h + b \cdot Y_h + c \cdot h = 0$$

$$[X(t), Y(t), Z(t), h(t)] = [X_1, Y_1, Z_1, h_1] \cdot t + [X_2, Y_2, Z_2, h_2] \cdot (1-t)$$

$$[X_h, Y_h, Z_h, h] \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ d \end{pmatrix} = 0$$

$$n_x \cdot X_h + n_y \cdot Y_h + n_z \cdot Z_h + d \cdot h = 0$$

- Párhuzamos egyenesek metszéspontja:

$$\left. \begin{aligned} ax + by + c_1 &= 0 \\ ax + by + c_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow \text{nincs megoldás}$$

$$\left. \begin{aligned} a X_h + b Y_h + c_1 h &= 0 \\ a X_h + b Y_h + c_2 h &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$[b\lambda, -a\lambda, 0]$$

$$\begin{aligned} (c_1 - c_2) h &= 0 \Rightarrow \\ h &= 0, X_h = b\lambda, Y_h = -a\lambda \end{aligned}$$