

7. tétel - Elemi geometriai transzformációk

Pont és vektor

- Mindent számmal kell leírni: pontot és vektort is -> koordináták
- Koordináta rendszerek
 - **euklideszi**: tengelyektől mért távolság
 - **polár**: origótól mért távolság x tengely pozitív részével bezárt szög
 - homogén: :)

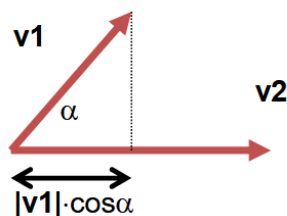
Vektorműveletek koordinátákkal

- **Mozgatás** (Eltolás)
 - Ha adva van a *vektor*, akkor a vele való eltolásban minden P pont P^1 képére teljesül, hogy a PP^1 vektor egyenlő v -vel.
 - Tulajdonképpen összeadás
 - Számolás Descartesban:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1 + x_2)\mathbf{i} + (y_1 + y_2)\mathbf{j}$$

- **Skaláris szorzat**
 - $a_{\text{hossz}} \cdot b_{\text{hossz}} \cdot \cos(\text{bezártszög})$
 - **Jelentés**: vetület
 - Számolás Descartesban:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}) \cdot (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}) = (x_1x_2 + y_1y_2)$$



- **Vektoriális szorzat**
 - $a_{\text{hossz}} \cdot b_{\text{hossz}} \cdot \sin(\text{bezárt szög})$ méretű a -ra és b -re merőleges vekti jobbké szabály szerint
 - Jelentés: kifeszítettt paralelogramma területe
 - Számolás Descartesban:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Egyenes és sík explicit és paraméteres egyenletei

- **Egyenes**
 - implicit
 $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0$
 - explicit
 $x = x_0 + v_x t$
 $y = y_0 + v_y t$
- **Sík**
 - implicit

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

- explicit
kíafasztérdekel mikor semmiresejő

Elemi affin transzformációk és mátrixos felírásuk

- A párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe átvivő transzformációkat affin transzformációknak nevezzük. Minden lineáris transzformáció ilyen.
- Skálázás
 - A skálázás a távolságokat és méreteket a különböző tengelyeken egymástól függetlenül módosítja

$$x' = S_x \cdot x, \quad y' = S_y \cdot y, \quad z' = S_z \cdot z.$$

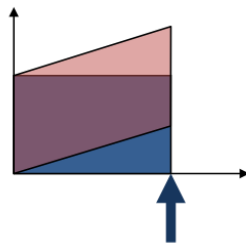
$$\vec{r}' = \vec{r} \cdot \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix}.$$

- Forgatás

$$x' = x \cdot \cos \phi - y \cdot \sin \phi, \quad y' = x \cdot \sin \phi + y \cdot \cos \phi.$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

- Nyírás
 - Úgy képzelj el mintha a téglalapot meglöknéd alul és feltolnád egy ilyen paralelogramma formába



$$x' = x; \quad y' = y + a x;$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Tükrözés

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Fix pont megadása

- A transzformáció fixpontja az ami a transzformáció után önmagába kerül.
- Amennyiben nem az origó körül akarok forgatni vagy skálázni, hanem x_p, y_p pont körül, akkor:
- Skálázásnál:

$$x' = S_x (x - x_p) + x_p;$$

$$y' = S_y (y - y_p) + y_p;$$

- Forgatásnál:

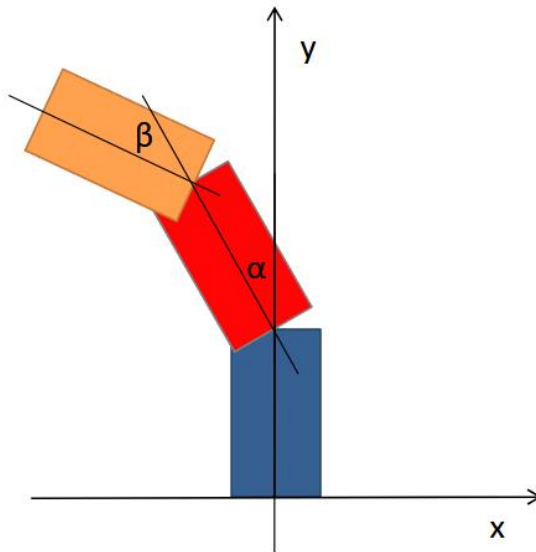
$$x' = (x - x_p) \cos \phi - (y - y_p) \sin \phi + x_p;$$

$$y' = (x - x_p) \sin \phi + (y - y_p) \cos \phi + y_p;$$

Műveletek sorrendje

- előbb skálázunk, és forgatunk
- aztán eltolunk

Modellezési feladat: 2 csuklójú robotkar



- Az a lényeg, hogy mindig feljebb tolom és forgatom a viszonyítási pontot

Összetett transzformáció

- Összetett transzformáció több transzformáció együttese
- Jelen esetben az általános alak:

$$r' = rA + p$$

- Ahol A lineáris trafók összessége: forgatás, skálázás, tükrözés, nyírás
- a végén p pedig egy eltolás
- Amíg lineáris a trafó addig össze szorozgatom a transzformációs mátrixokat, hogy megkapjam az eredőt (konkatenáció)