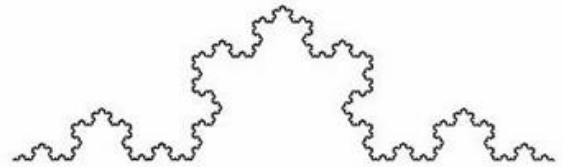
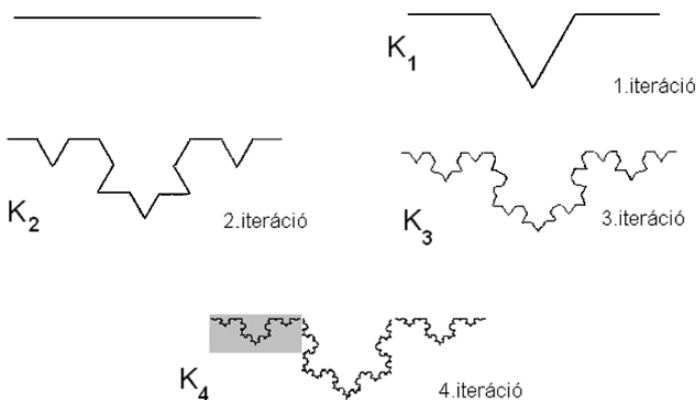


5. tétel - Fraktáldimenzió alapjai

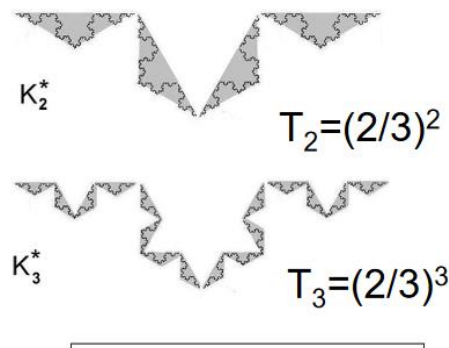
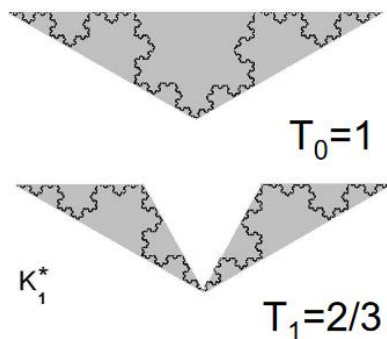
Koch görbe

- A görbét úgy állíthatjuk elő, hogy egy szabályos háromszög oldalait elharmadoljuk, majd a középső harmadára ismét egy szabályos háromszöget rajzolunk.
- Ezen háromszögek oldalait szintén harmadoljuk, és háromszöget rajzolunk rájuk.
- Ennek az önmagába záródó görbének harmadát hívják Koch-görbének



Hossza és területe

- A hosszok a fenti iterációkban rendre $h_0 = 1, h_1 = \frac{4}{3}, h_2 = (\frac{4}{3})^2, \dots, h_i = (\frac{4}{3})^i$
- Látható, hogy ez a végtelenbe tart
- A terület az alább látható módon mindig $2/3$ -ára csökken. Ebből következik, hogy a görbe területe 0.

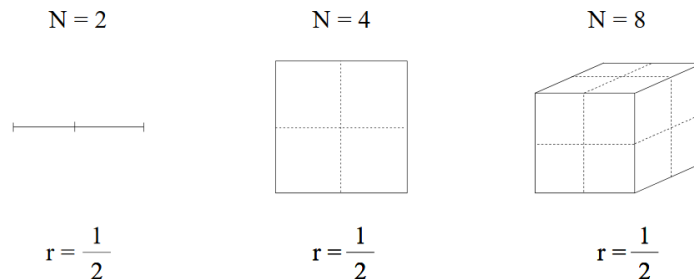


Hausdorff dimenzió és fraktálok

- Fraktálokra tört dimenziós alakzatokat értünk.
- A dimenzió szám az eddigi definíciónk alapján:
 - A pont 0 dimenziós
 - Egy alakzat $n - 1$ dimenziós, ha két résre lehet vágni egy $n - 1$ dimenziós alakzattal, de kevesebb dimenzióssal nem.
- A dimenzió fogalom kiterjesztését (hogy lehetővé váljon a tört dimenzió) Hausdorff dimenzióknak nevezzük.

- Ha veszünk egy 1D-s szakaszt és $r = \frac{1}{n}$ szeresére kicsinyítjük, akkor $N = n$ db ilyen kis szakaszból újra előáll az eredeti
- Ha veszünk egy téglalapot akkor az $r = \frac{1}{n}$ szeres darabjaira vágva picit téglalapokat kapunk, melyből $N = n^2$ szükséges, hogy visszakapjuk az eredetit
- Térben $r = \frac{1}{n}$ -nél már $N = n^3$ darabot kell felhasználni. Az alábbi következtetést vonhatjuk le. D a Hausdorff dimenzió

$$N = \frac{1}{r^D}, \quad D = \frac{\log N}{\log 1/r}.$$



Koch görbe Hausdorff dimenziója

- A görbe 4 darab az eredetivel hasonló alakzattól áll, melyből egy az eredetiből $\frac{1}{3}$ -os nyújtással állítható elő. Tehát $N = 4$ és $r = \frac{1}{3}$.
- Ekkor a dimenzió

$$D_{\text{Koch}} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.26$$

Fraktális dimenzió nem önazonos objektumokra

- Láttuk, hogy a Koch görbe végtelen hosszú, bár nem hinnénk
- Képzeljünk el egy l hosszú vonalzót, amit a görbére akarunk illeszteni és megnézzük hányszor sikerül.
- A kapott képlet alapján azt látjuk, hogy a divergencia sebessége a fraktális dimenziótól függ, tehát ez alapján is definiálhatjuk a dimenziót.

