

3. tétel - Paraméteres görbék a geometriai modellezésben 2.

Bézier approximáció

- Az interpolációval szemben itt nem akarjuk, hogy minden ponton átmenjen a görbe, csak az első kettőn.



- A görbe hullámosságát az szabályozza, hogy nem lép ki a konvex burokból (minimális konvex halmaz, ami a pontthalmazt tartalmazza)
- A keresett görbe

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^m B_i(t) \cdot \vec{r}_i$$

- Ekkor a **konvex burok tulajdonság feltétele**

$$B_i(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0,1], \quad i = 0, \dots, m$$

$$\sum_{i=0}^m B_i(t) = 1, \quad \forall t \in [0,1]$$

- Bézier görbe esetén a súlyfüggvények a **Bernstein polinomok**.

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=0}^m B_i^{(m)}(t) \cdot \vec{r}_i \quad B_i^{(m)}(t) = \binom{m}{i} t^i \cdot (1-t)^{m-i}$$

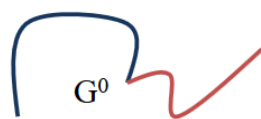
- A nem negativitás triviális, a súly függvények összege a binomiális tétel alapján 1, tehát a görbe kielégíti a konvex burok tulajdonságokat.
- A görbe átmegy a kezdő és a végső kontrollponton, mert

$$B_0^{(m)}(0) = 1 \quad B_m^{(m)}(1) = 1$$

Folytonossági kategóriák

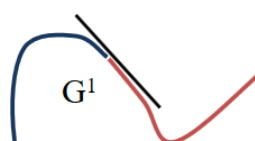
- Bonyolultabb görbék esetén a lokális vezérelhetőség miatt inkább több görbéből állítjuk elő a kívánt vonalat
- Ekkor azonban figyelni kell a folytonosságra
- C^n folytonosság:** a két görbe szegmens az n -dik deriváltig megegyezik az illeszkedési pontban.

$$\mathbf{r}_1^{(n)}(t_{\text{veg}}) = \mathbf{r}_2^{(n)}(t_{\text{kezd}})$$



$$C^0: \\ \mathbf{r}_1(t_{\text{veg}}) = \mathbf{r}_2(t_{\text{kezd}})$$

$$G^0 = C^0$$



$$C^1: \\ \mathbf{r}_1'(t_{\text{veg}}) = \mathbf{r}_2'(t_{\text{kezd}})$$

$$C^1 \subseteq G^1$$

$$C^2: \\ \mathbf{r}_1''(t_{\text{veg}}) = \mathbf{r}_2''(t_{\text{kezd}})$$

- Látható, hogy eszerint van C^0 , C^2 folytonos stb görbe.

Spline

- **Spline:** C^2 folytonos görbe.

Harmadfokú spline

- A legegyszerűbb polinom, amelynél a második derivált nem állandó a harmadfokú.
- Egy harmadfokú szegmens általános alakja

$$\vec{p}(t) = \vec{a}_3 t^3 + \vec{a}_2 t^2 + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0.$$

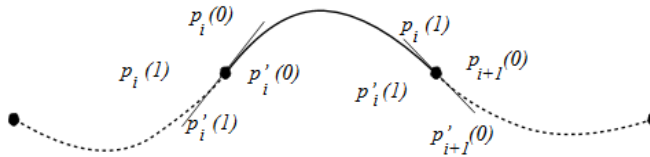
- Másik reprezentáció:

$$\vec{p}(0) = \vec{a}_0,$$

$$\vec{p}(1) = \vec{a}_3 + \vec{a}_2 + \vec{a}_1 + \vec{a}_0,$$

$$\vec{p}'(0) = \vec{a}_1,$$

$$\vec{p}'(1) = 3\vec{a}_3 + 2\vec{a}_2 + \vec{a}_1.$$



- Tegyük fel, hogy a megadott r_i vezérlőpont sorozatra úgy illesztjük a szegmenseket, hogy az első r_1 -től r_2 -ig tartson, a második r_2 -től r_3 -ig stb.

$$\vec{p}_i(0) = \vec{r}_i, \quad \vec{p}_i(1) = \vec{r}_{i+1}.$$

- Ehhez vegyük még hozzá, hogy C^1 és C^2 folytonos legyen

$$\vec{p}'_i(1) = \vec{p}'_{i+1}(0), \quad \vec{p}''_i(1) = \vec{p}''_{i+1}(0).$$

- Egy lineáris egyenletrendszert kapunk, amit, ha megoldunk minden görbeszegmens reprezentációja meghatározható.
- Az egyenleteknek végtelen sok megoldása van, mert 2-vel több ismeretlenünk van.
- Ha a kezdő és végpontban vett deriváltak értékét megadjuk, akkor egyértelmű.

B-spline

- A harmadfokú spline-nál az illesztés garantálta egyből a C^1 folytonosságot, csak a C^2 -vel harcoltunk.
- Nézzük meg hogy okosabban megoldva lehet-e a C^2 is garantált
- Azt akarjuk, hogy két egymás követő szegmens közösen használjon négy vezérlőpontból 3-at, ekkor C^2 folytonosan illeszkednek egymáshoz
- A görbe általános alakja

$$\vec{r}(t) = B_0(t) \cdot \vec{r}_0 + B_1(t) \cdot \vec{r}_1 + B_2(t) \cdot \vec{r}_2 + B_3(t) \cdot \vec{r}_3.$$

- A súlyfüggvények

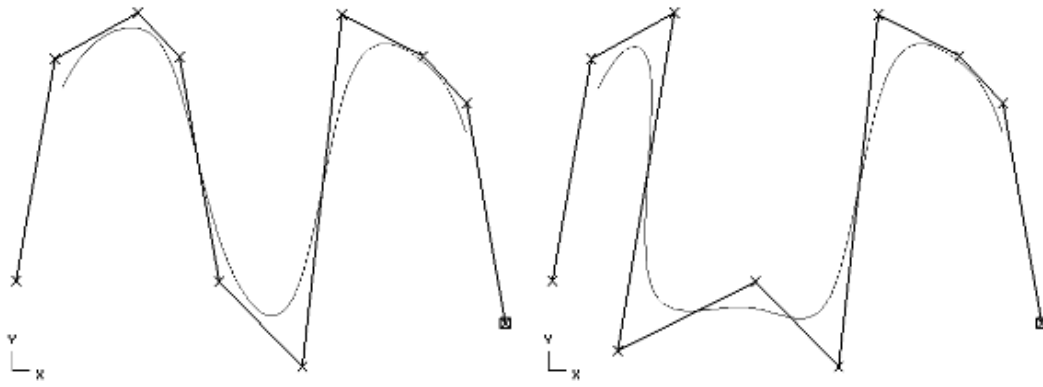
$$B_0(t) = \frac{(1-t)^3}{6},$$

$$B_1(t) = \frac{1 + 3(1-t) + 3t(1-t)^2}{6},$$

$$B_2(t) = \frac{1 + 3t + 3(1-t)t^2}{6},$$

$$B_3(t) = \frac{t^3}{6}.$$

- A súlyfüggvények nem negatívak, tehát mindig a konvex burkon belül van.
- Az approximációs is tulajdonság is látható.
- A B-spline előnye, hogy egy vezérlőpont mozgata csak az összetett görbe 4 legközelebbi szegmensének alakjára hat, a távolabbi részekre nem.



NUBS görbe

- *Non Uniform B Spline*
- Ha feltesszük, hogy az egymást követő szegmensek különböző méretű paraméter tartományt fedjenek le, nem egységnyi intervallumot, akkor NUBS-ról beszélünk.

NURBS görbe

- Az eddigi görbék irracionálisak voltak, mert polinom hányadosokat nem engedtünk meg súlyfüggvénynek.
- *Racionális B-Spline*-ről beszélünk, ha megengedők vagyunk ezzel.
- Ha a racionális és a non uniform tulajdonságok egyszerre teljesülnek NURBS-ról van szó.