

2. tétel - Paraméteres görbék a geometriai modellezésben

Modellezés feladatai

- 1. tétel

Koordinátarendszerek

- *Décartes koordináták* (tengelyektől való távolság)
- *Polárkoordinátákkal* (origótól való távolság, elfordulás szöge)
- *Homogén koordináták* (lásd később)

Görbék implicit és explicit megadása

implicit: $f(x, y) = 0$, 2D egyenes: $ax + by + c = 0$, Kör: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - R^2 = 0$,	$f(\mathbf{r}) = 0$ $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ $ \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 ^2 - R^2 = 0$
paraméteres: $x = x(t), y = y(t)$, 2D egyenes: $t \in [-\infty, \infty]$ $x(t) = x_0 + v_x t$, $y(t) = y_0 + v_y t$, Kör: $t \in [0, 1]$ $x(t) = x_0 + R \cos 2\pi t$ $y(t) = y_0 + R \sin 2\pi t$	$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} t$ $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + R(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

Szabadformájú görbék

- Klasszikus görbe szegmensek: szakasz, körvonal
- Ezek gyakran nem elegendek
- Tetszőlegesen kicsi szakaszokkal ugyan minden lehetséges lenne, de ez differenciálhatósági szempontból cumi
- Megoldás: polinomok (használatuk kényelmetlen)

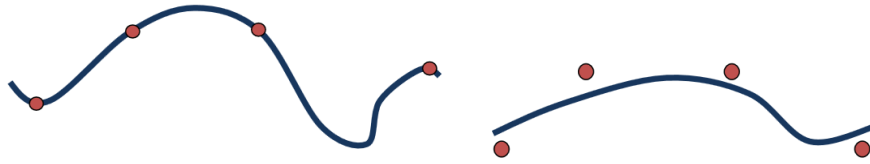
$$x(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot t^i, \quad y(t) = \sum_{i=0}^n b_i \cdot t^i, \quad t \in [0, 1],$$

$$\vec{r}'(t) = \sum_{i=0}^n [a_i, b_i] \cdot t^i, \quad t \in [0, 1].$$

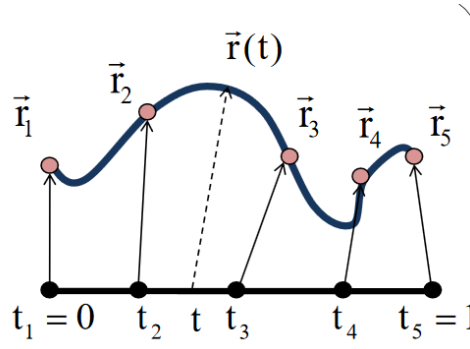
- Együtthatók megadása helyett kontrollpontokat kérünk, amelyekre “illesztjük a görbét”

Közelítés fajtái

- **Interpoláció:** megköveteljük, hogy a kontrollpontokon áthaladjon a görbe
- **Approximáció:** csak azt várjuk el, hogy nagyjából kövesse a kijelölt útvonalat



Lagrange interpoláció



- Adott kontrollpontok egy halmaza, illetve a t szakasz.
- Keressük azt a polinomot, amely értéke t_1 -ben r_1 , t_2 -ben r_2 stb...

$$\vec{r}(t_j) = [x(t_j), y(t_j)] = \sum_{i=0}^{n-1} [a_i, b_i] \cdot t_j^i = \vec{r}_j$$

- Ezt az egyenletet megoldva:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^n L_i(t) \cdot \vec{r}_i, \quad \text{ahol } L_i(t) = \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)}.$$

- $n=3$ esetén például

$$r(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)} \cdot \vec{r}_1 + \frac{(t-t_1)(t-t_3)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)} \cdot \vec{r}_2 + \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \cdot \vec{r}_3$$

- A probléma a Lagrange interpolációval, hogy indokolatlanul sok görbületet okozhat bizonyos esetekben
- Illetve, hogy egyetlen kontrollpont módosítása is kihathat az egész görbére