PPKE ITK

A számítógépes grafika alapjai

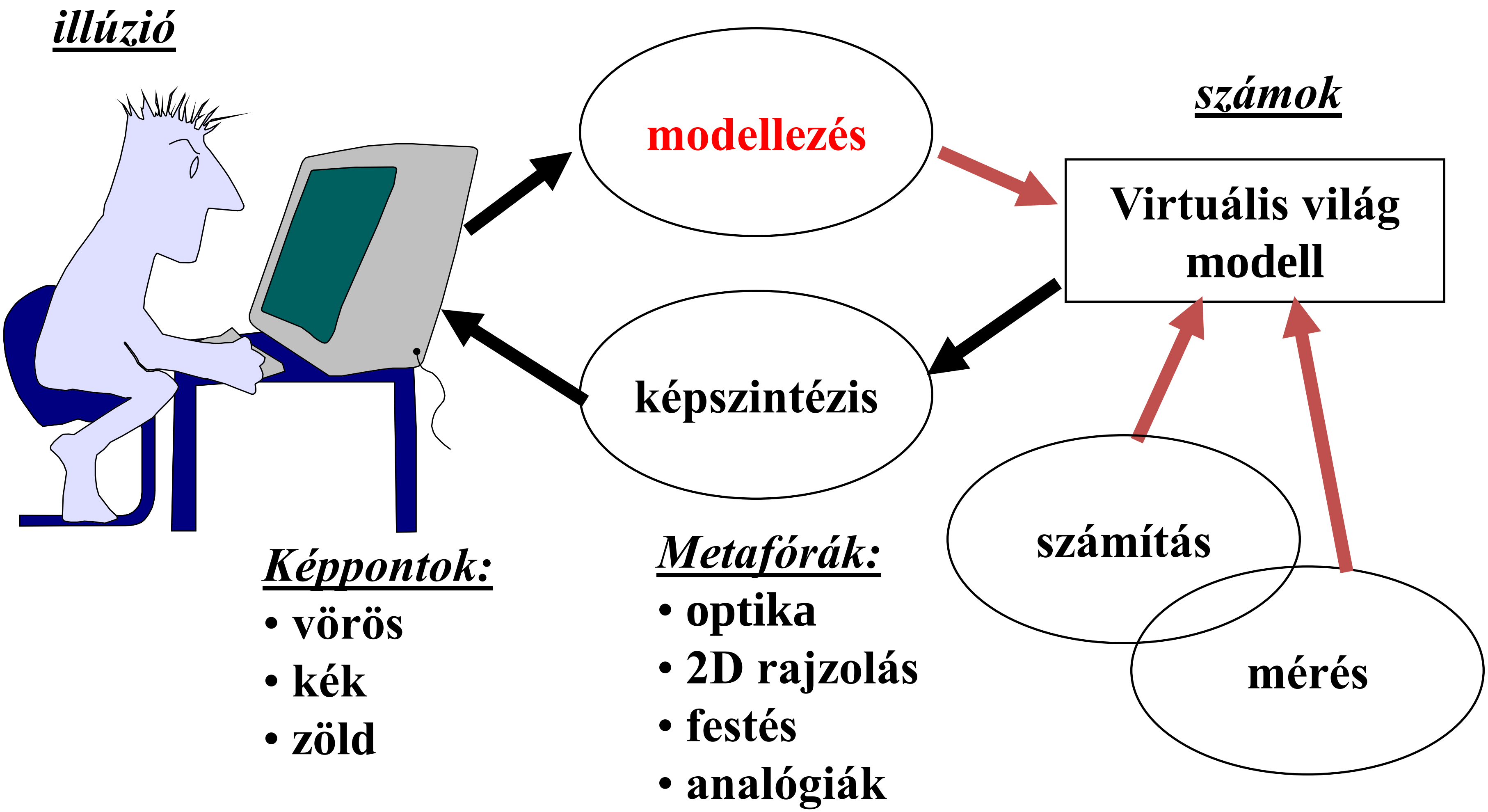
Geometriai transzformációk

Előadó: Benedek Csaba

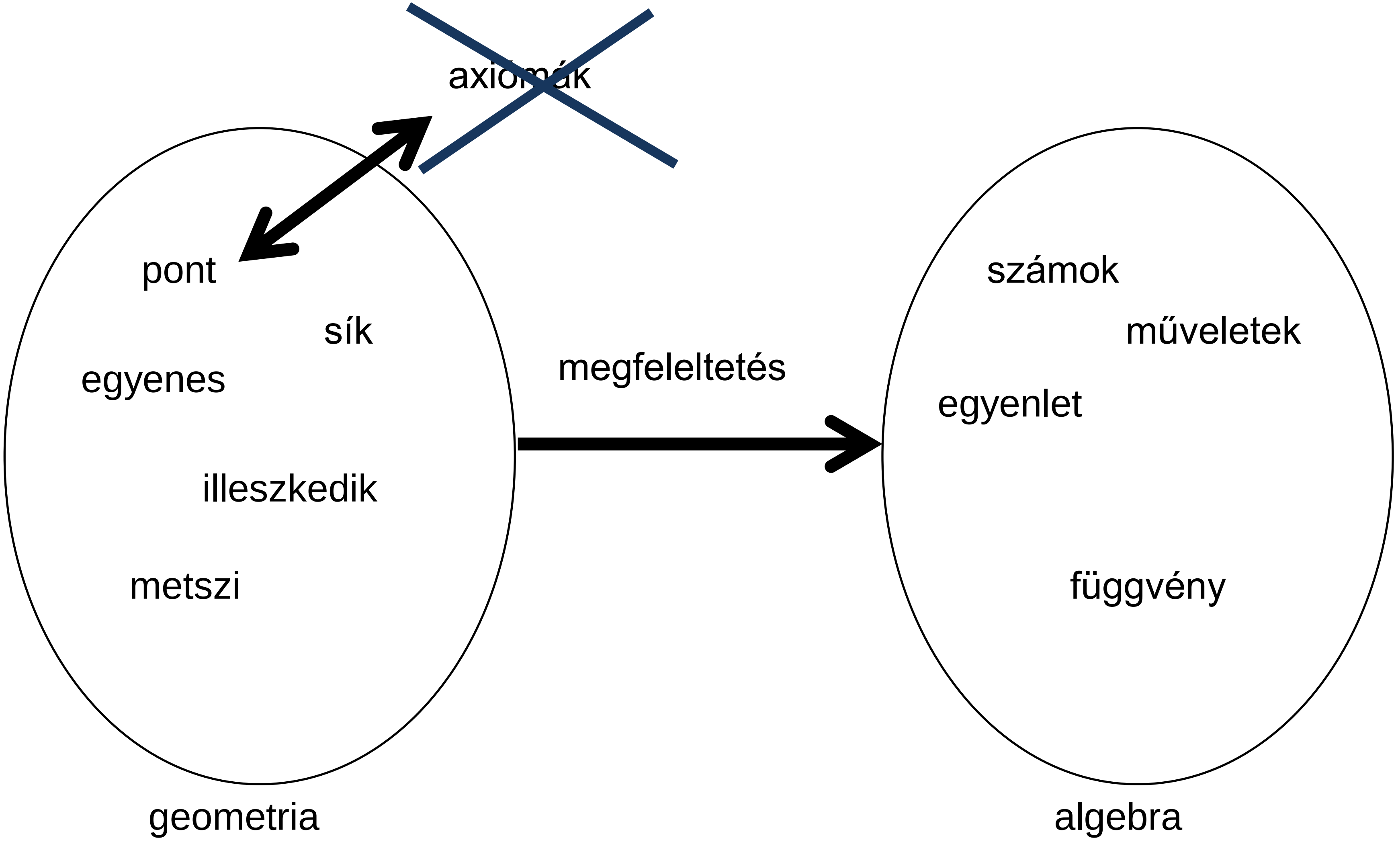
Tananyag : Szirmay-Kalos László, Benedek Csaba

Fides et Ratio

Számítógépes grafika feladata



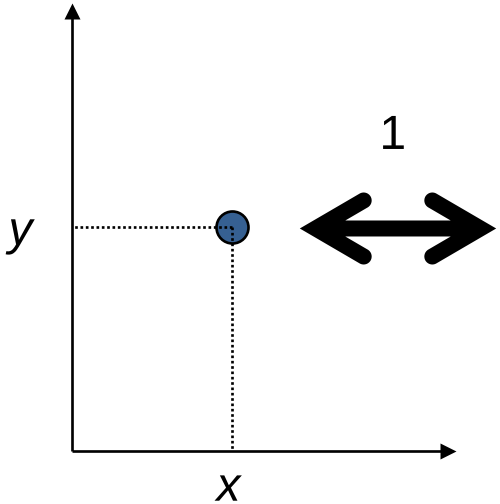
Mindent számmal



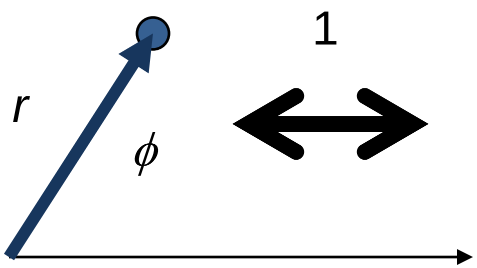
Koordinátageometriai gyorstalpaló - Pontok, alakzatok megadása

- Mindent számmal!
  - Koordináta rendszer
  - Koordináták megadása
- Koordináta rendszerek
  - Descartes
  - Polár
  - Homogén

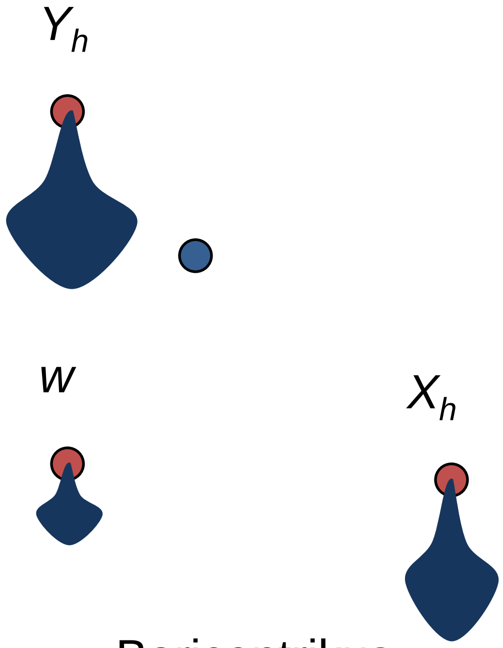
Koordináta rendszerek



Descartes



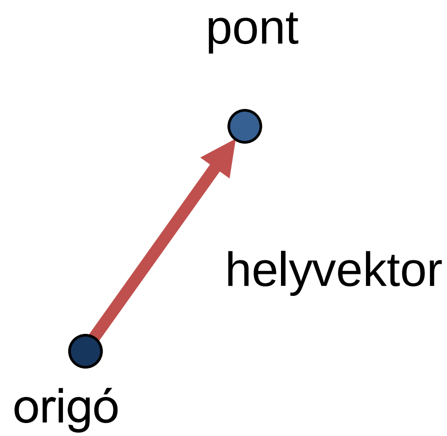
Polár

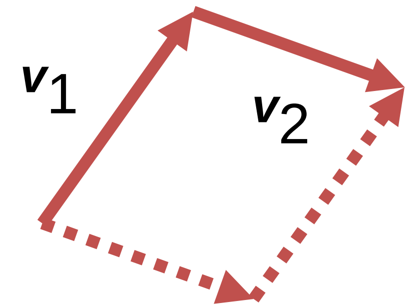


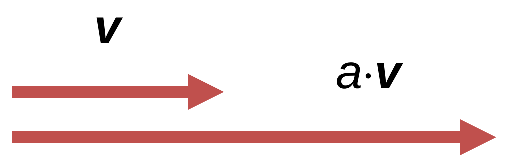
Baricentrikus
Homogén

Pontfüggvények: Mozgatás

- <u>Vektor = eltolás</u>: ***v***
- Iránya és hossza (|***v***|) van
- Helyvektor
  - De vektor ≠ pont !!!
- Vektorműveletek
  - $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ (kommutatív, asszoc)
  - $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_2$ (összeadásnak van inverze)
  - $\boldsymbol{v}_1 = a \cdot \boldsymbol{v}$ (összeadásra disztributív)





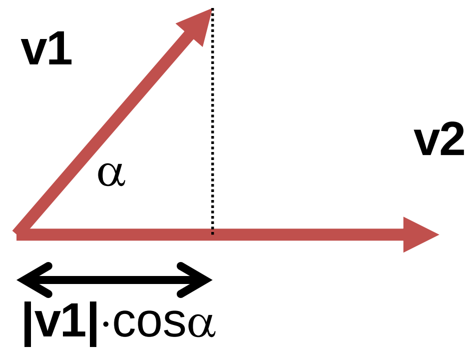


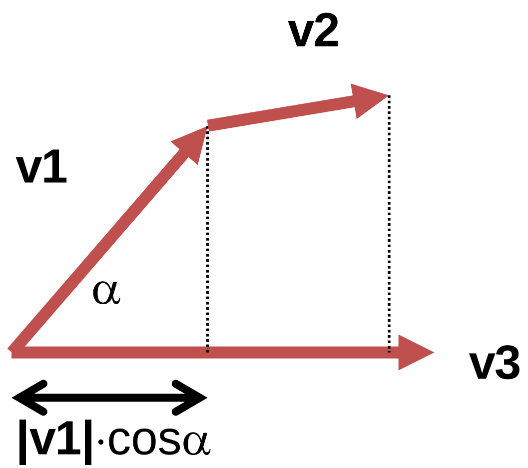
Skaláris szorzás

- Definíció
  - **v1·v2 = |v1|·|v2|**·cosα
- Jelentés
  - Egyik vektor **<u>vetülete</u>** a másikra x másik hossza
- Tulajdonságok
  - Kommutatív

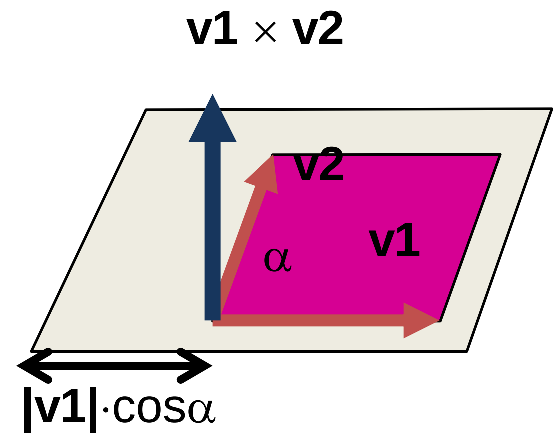
    v1·v2 = v2·v1
  - Összeadással disztributív

    v3·(v2+v1) = v3·v2 + v3·v1
  - **v·v = |v|²**





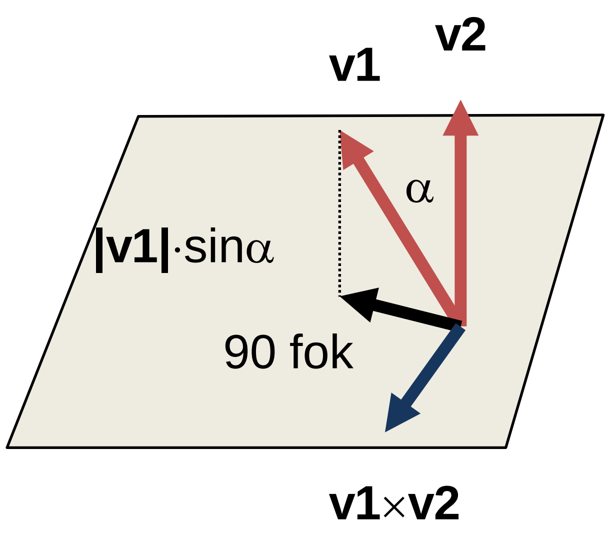
Vektoriális szorzás



- Definíció
  - $|\mathbf{v1} \times \mathbf{v2}| = |\mathbf{v1}| \cdot |\mathbf{v2}| \cdot \sin\alpha$
  - Merőleges, jobbkéz szabály
- Jelentés
  - Paralelogramma **<u>területe</u>**, síkjára merőleges
  - (Egyik vektor vetülete a másikra merőleges síkra + 90 fokos forgatás) x másik hossza
- Tulajdonságok
  - Alternáló

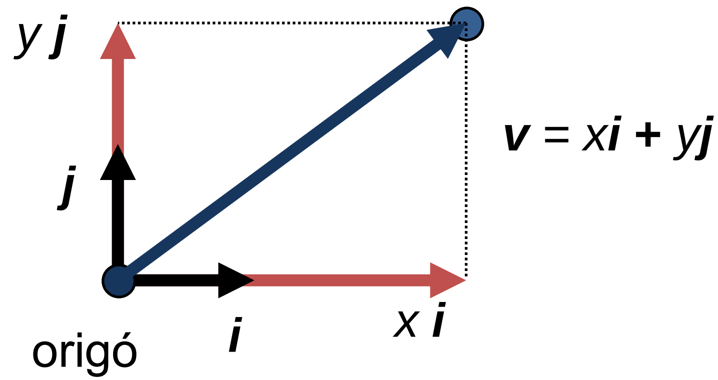
    $\mathbf{v1} \times \mathbf{v2} = -\,\mathbf{v2} \times \mathbf{v1}$
  - Összeadással disztributív

    $\mathbf{v3} \times (\mathbf{v2}+\mathbf{v1}) = \mathbf{v3} \times \mathbf{v2} + \mathbf{v3} \times \mathbf{v1}$



Descartes koordinátarendszer

- Egyértelmű ($x = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{i}$, $y = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{j}$)
- Műveletek koordinátákban



Összeadás:

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j}$$

Skaláris szorzás:

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}) \cdot (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}) = (x_1 x_2 + y_1 y_2)$$

Vektoriális szorzás:

$$\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 = (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \times (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) =$$

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1)\,\boldsymbol{i} + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\,\boldsymbol{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\boldsymbol{k}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Abszolút érték:

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Vektor és Pont nem ugyanaz!

- 2D: vektor (x, y)
- 3D: vektor (x, y, z)
- Műveletek:

Vektor + Vektor = Vektor

Vektor – Vektor = Vektor

Vektor × Vektor = Vektor

Vektor · Vektor = Skalár

Vektor * Skalár = Vektor

Pont (x, y)

Pont (x, y, z)

Pont + Vektor =Pont (eltolás)

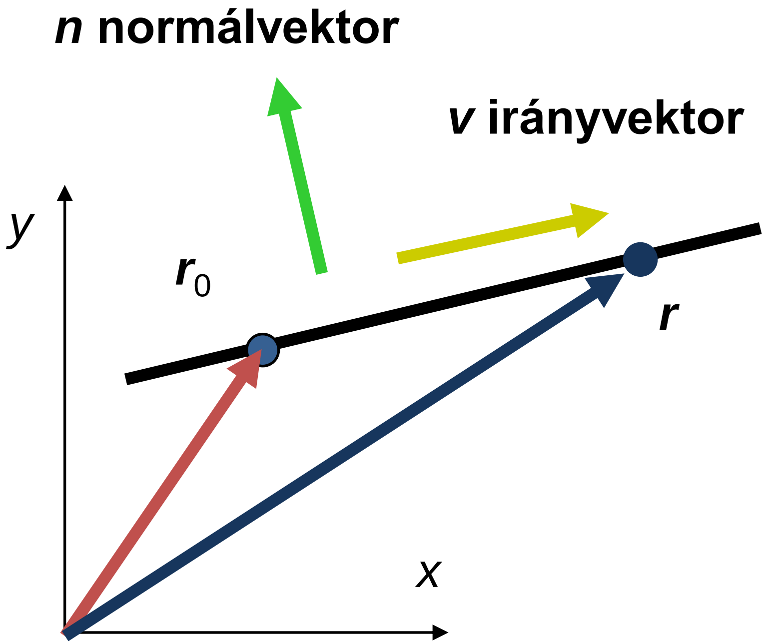
Pont – Pont = Vektor

Vektor osztály

```
struct Vector {
   float x, y, z;

   Vector(float x0, float y0, float z0) {
       x = x0; y = y0; z = z0;
   }
   Vector operator*(float a) {
       return Vector(x * a, y * a, z * a);
   }
   Vector operator+(Vector& v) {
       return Vector(x + v.x, y + v.y, z + v.z);
   }
   Vector operator-(Vector& v) {
       return Vector(x - v.x, y - v.y, z - v.z);
   }
   float operator*(Vector& v) {
       return (x * v.x + y * v.y + z * v.z);
   }
   Vector operator%(Vector& v) {
       return Vector(y*v.z-z*v.y, z*v.x - x*v.z, x*v.y-y*v.x);
   }
   float Length() { return sqrt(x * x + y * y + z * z); }
};
```

2D egyenes



$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = 0$$

$$n_x(x-x_0) + n_y(y-y_0) = 0$$

$$ax + by + c = 0$$

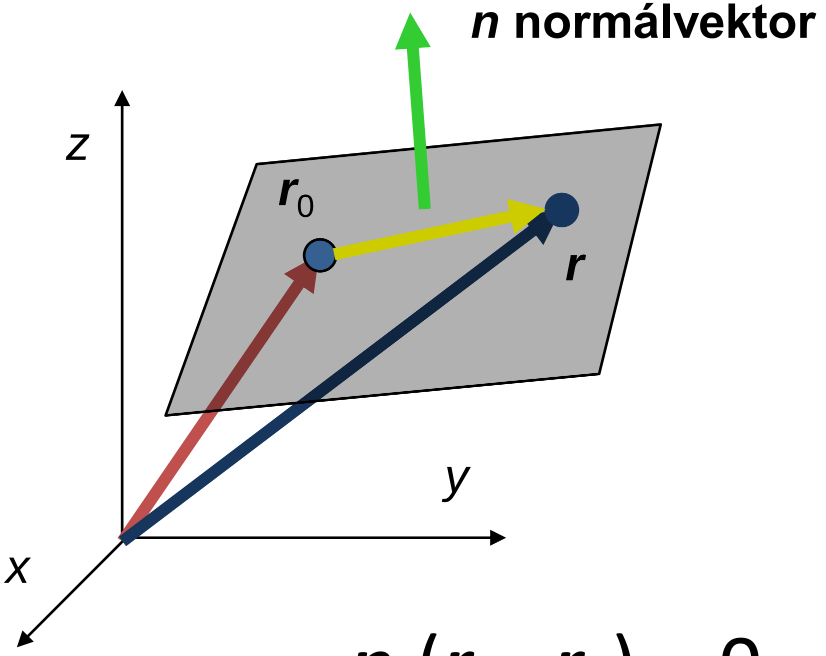
$$(x, y, 1)\cdot(a, b, c) = 0$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}\,t, \quad t \in [-\infty, \infty]$$

$$x = x_0 + v_x\,t$$

$$y = y_0 + v_y\,t$$

Sík



$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$$

$$n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0)=0$$

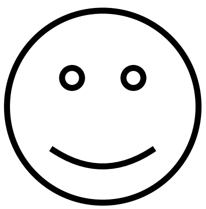
$$ax+by+cz+d=0$$

$$(x,\,y,\,z,\,1)\cdot(a,\,b,\,c,\,d)=0$$

… és akkor tényleg folytassuk a transzformációkkal

- Affin transzformáció:
  - Párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe viszi
  - Lineáris transzformációk ilyenek

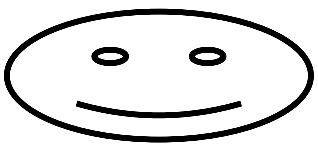
Elemi affin transzformációk



- Eltolás: $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{p}$
- Skálázás: $x' = S_x\, x; \quad y' = S_y\, y;$

Fix pont: origó

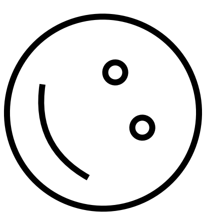
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$



- Forgatás: x’= cosϕ x- sinϕ y; y’= sinϕ x+ cosϕ y;

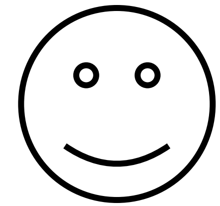
Fix pont: origó

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

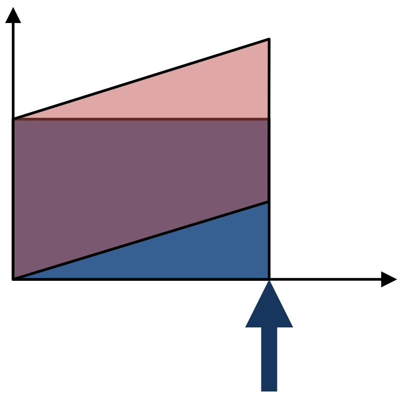


Megj: **r** itt sorvektor

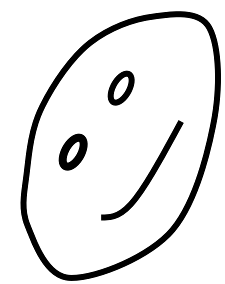
Elemi transzformációk



- Nyírás: $x' = x; \quad y' = y + a\,x;$

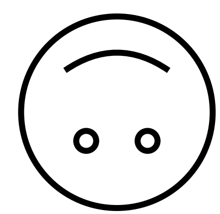


$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Tükrözés:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

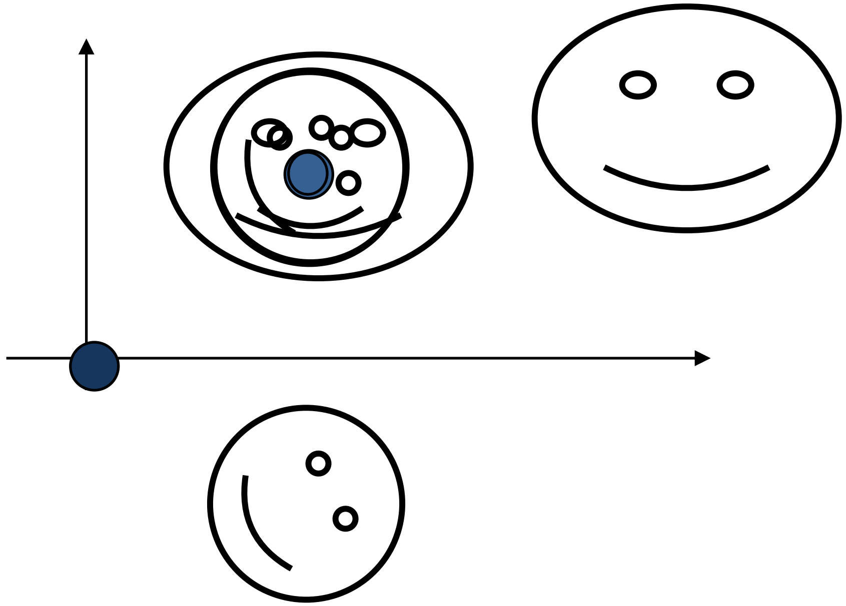


Transzformáció fix pontja: pivot point: (x_p, y_p)

Skálázás:

$x' = S_x\,(x - x_p) + x_p;$

$y' = S_y\,(y - y_p) + y_p;$



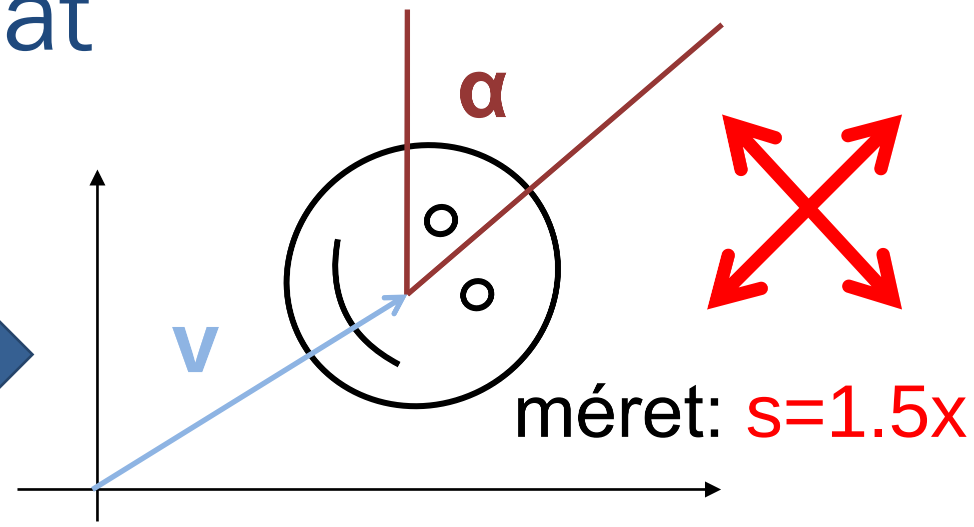
Forgatás:

$x' = (x - x_p)*\cos\phi - (y - y_p)*\sin\phi + x_p;$

$y' = (x - x_p)*\sin\phi + (y - y_p)*\cos\phi + y_p;$

Modellezési feladat

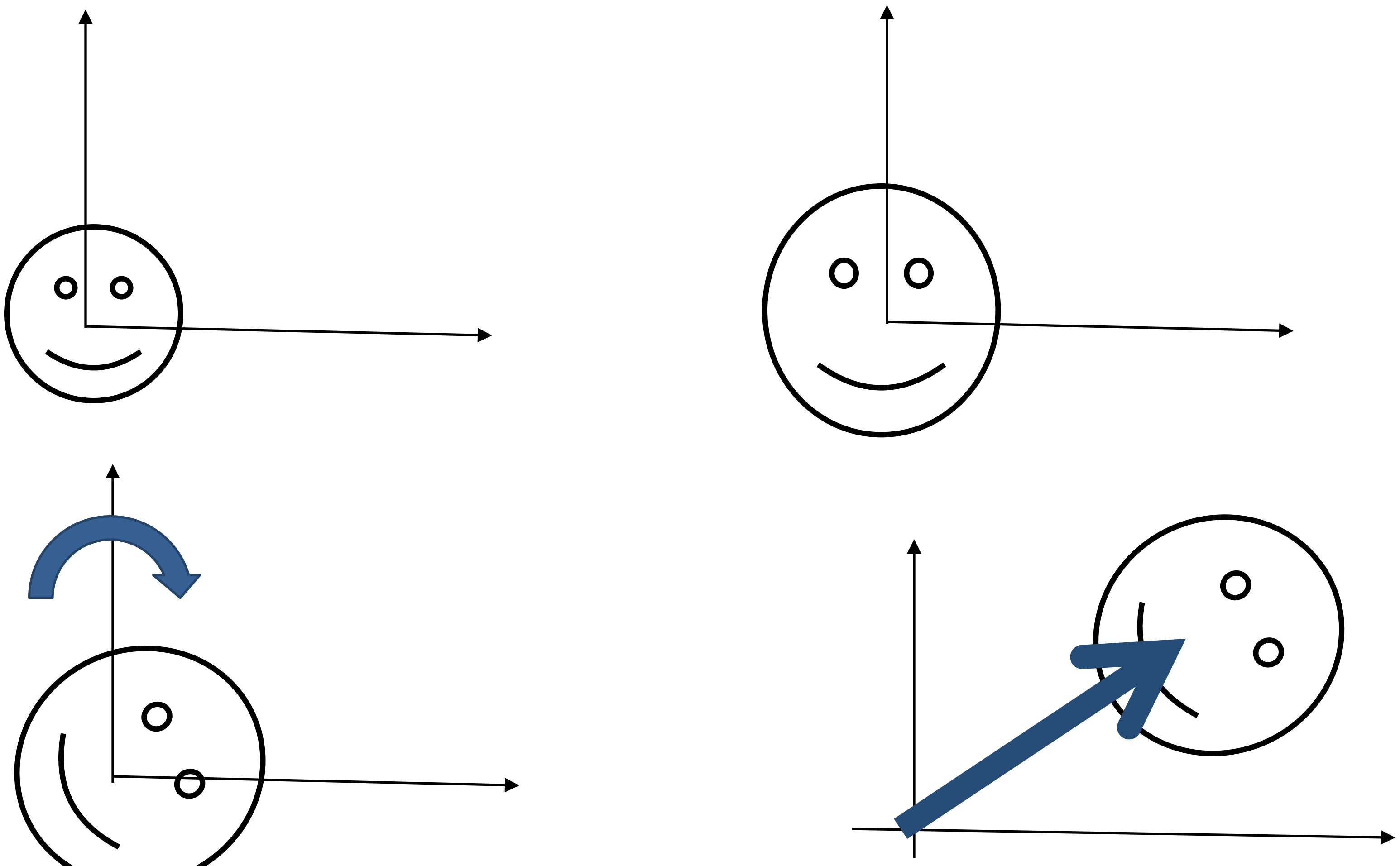
Alap objektum modell



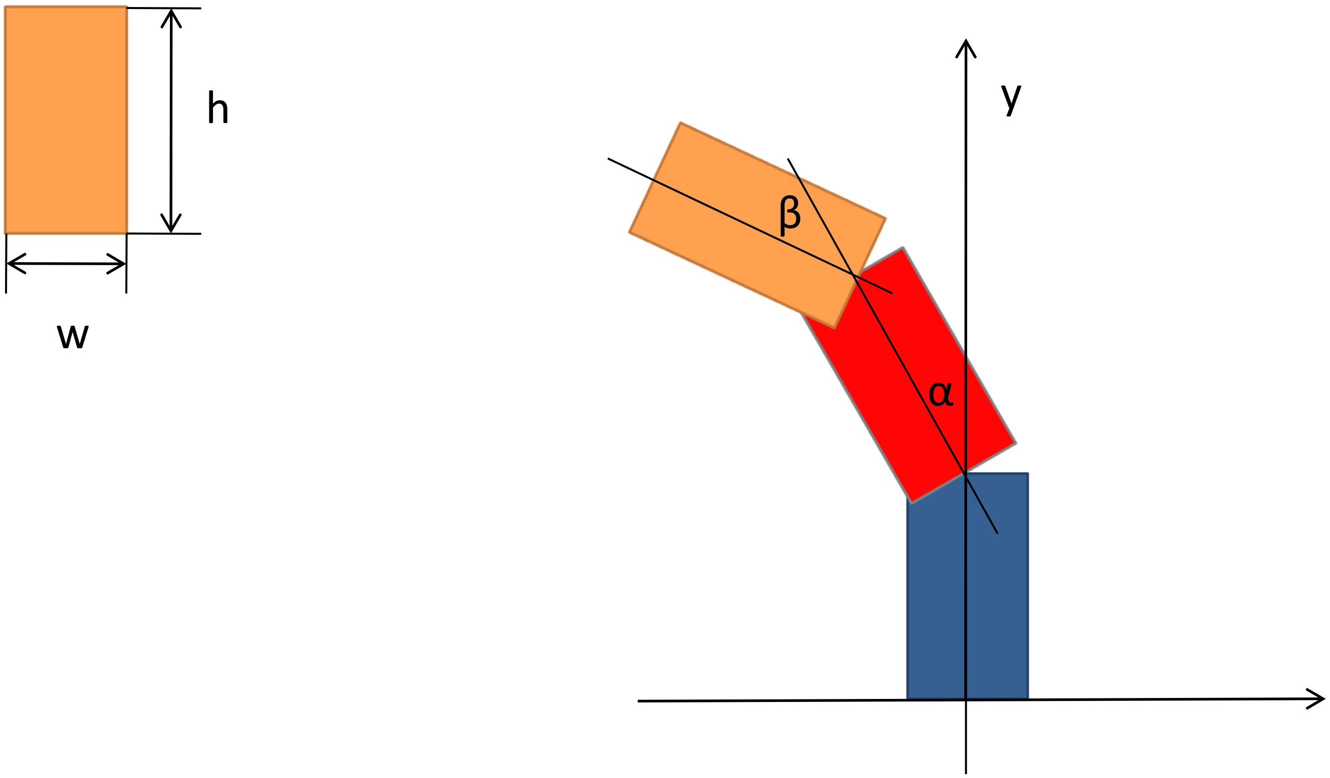
Várt elhelyezés

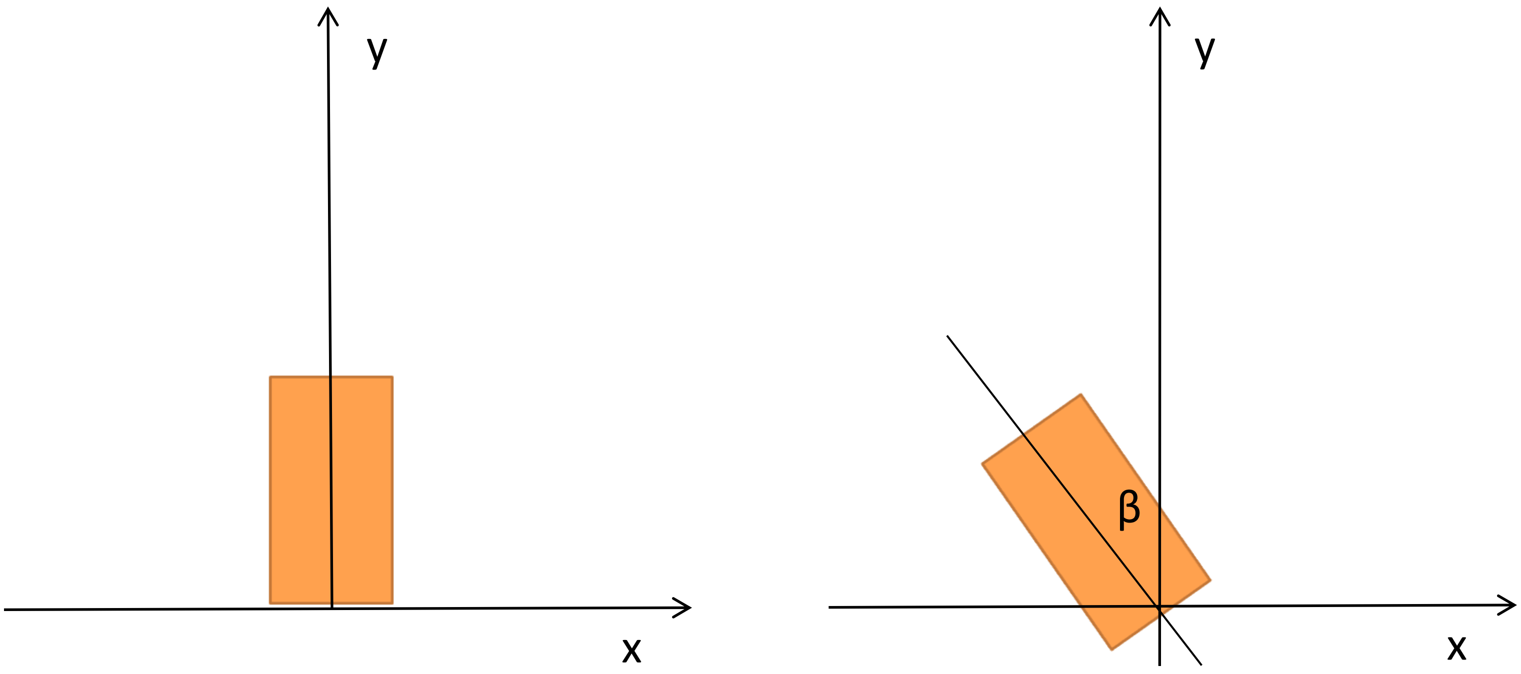
- Alapműveletek:
  - eltolás
  - origó fixpontú skálázás
  - origó középpontú forgatás

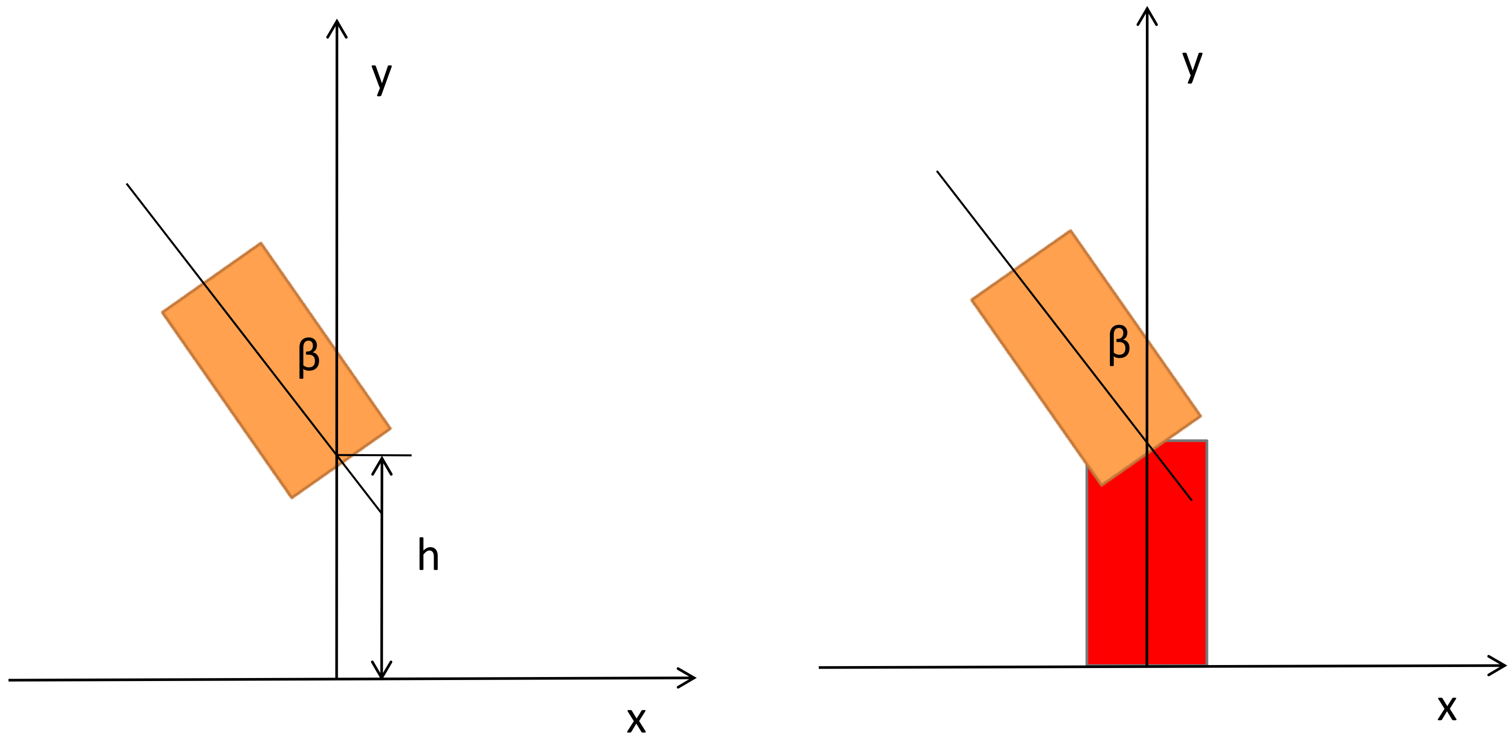
Műveletek sorrendje



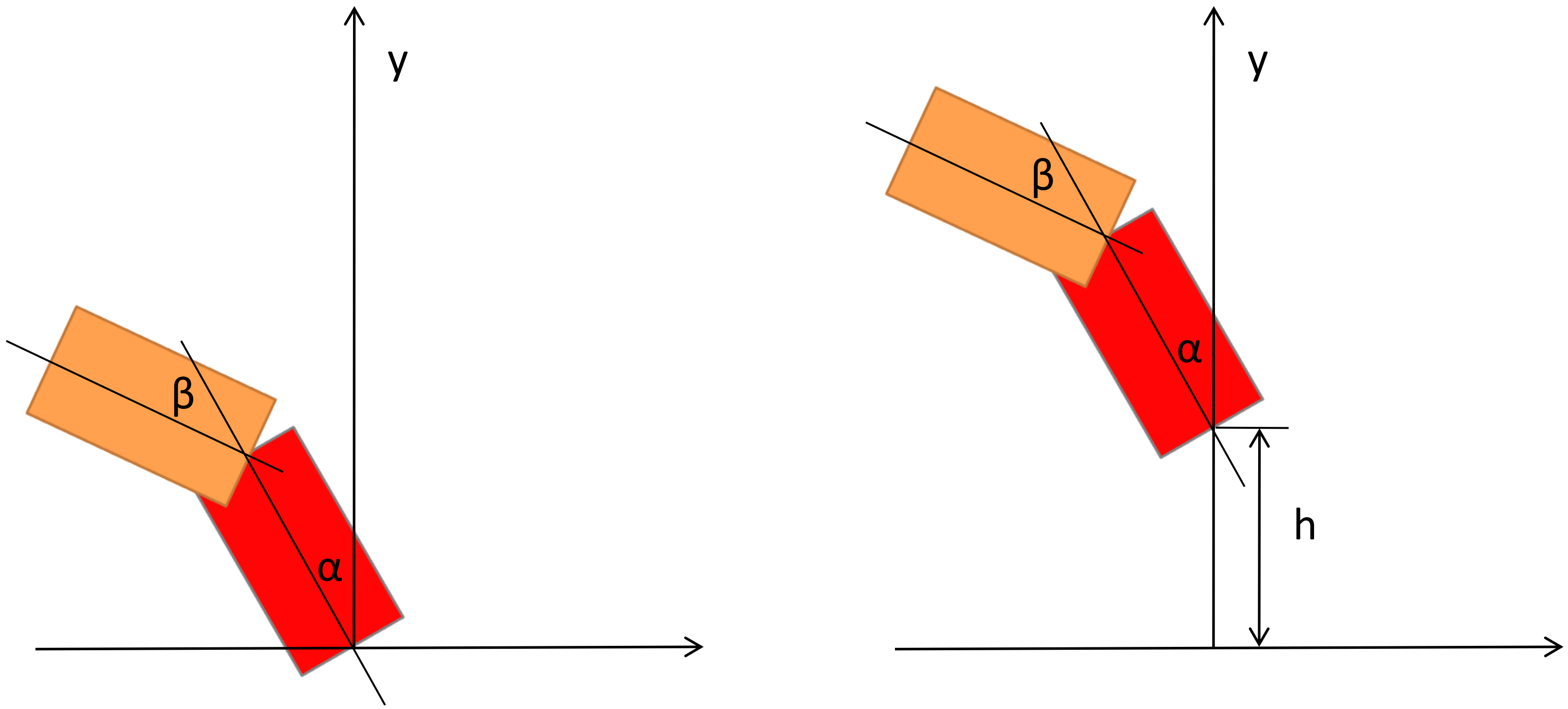
Modellezés: 2 csuklójú robotkar

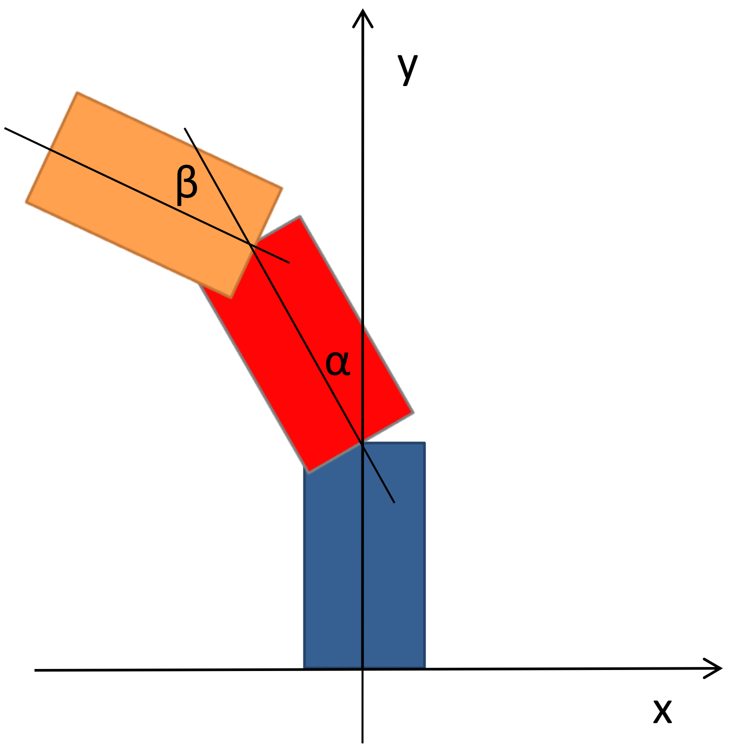



y
x
y
β
x



y
β
h
x
y
β
x


y
β
α
y
β
α
h



y
β
α
x

Összetett transzformáció

- Affin transzformáció: $\mathbf{r' = r\,A + p}$
  - $\mathbf{A}$: lineáris transzformáció
    - forgatás, skálázás, tükrözés, nyírás, stb.
  - $\mathbf{p}$: eltolás
- Amíg lineáris transzformáció: konkatenáció
  - $\mathbf{r' = (\ldots(r\,A_1)\,A_2)\ldots\,A_n) = r\,(A_1A_2\ldots\,A_n\,)}$

Homogén koordinátás transzformációk

- Eltolás nem fér bele a 2x2-es mátrixba
  - Dolgozzunk 3x3-as mátrixokkal

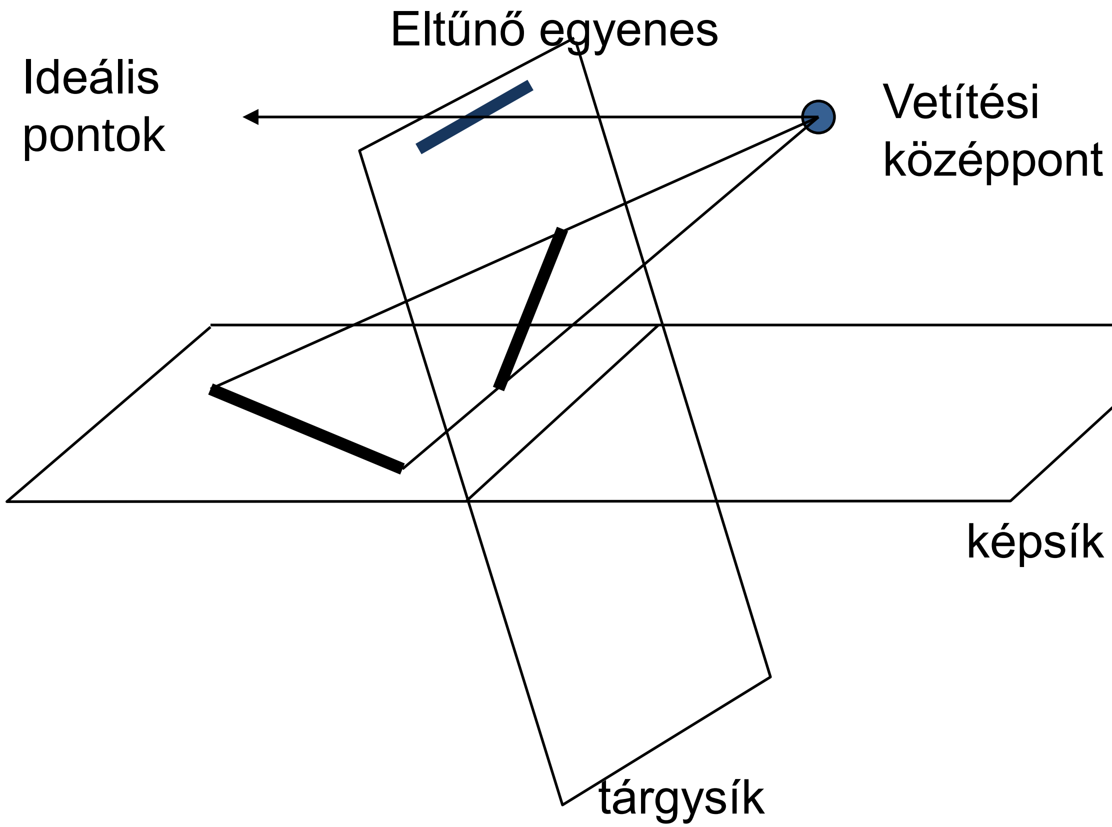
$$[\mathbf{r}', 1] = [\mathbf{r}, 1] \begin{bmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}}}^{\mathbf{A}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \underbrace{\boxed{\begin{matrix} p_1 & p_2 \end{matrix}}}_{\mathbf{p}} & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{r}\,\mathbf{A} + \mathbf{p}, 1]$$

$$[\mathbf{r}',1] = (\ldots([\mathbf{r},1]\,\mathbf{T_1})\,\mathbf{T_2})\ldots\,\mathbf{T_n}) = [\mathbf{r},1]\,(\mathbf{T_1}\mathbf{T_2}\ldots\,\mathbf{T_n})$$

Transzformációk projektív geometriai megközelítése

- Homogén koordináták – nem csak az eltolás egységes kezeléséért!
- 3D grafika központi eleme a 3D-s világ 2D-s megjelenítése
  - Vetítés, mint dimenziócsökkentő művelet
  - Centrális (középponti) vetítés
    - Az euklideszi térben nem minden pont vetíthető centrálisan -> euklideszi helyett un. projektív geometria

Centrális projekció



- Képsíkkal párhuzamos vetítősugarakkal jellemzett pontok végtelenbe tűnnek
  - C. projekció nem minden euklideszi pontot visz euklideszi pontba – projektív geometria: tömjük be a lyukakat!

Projektív geometria

- Euklideszi geometria
    - 2 pont meghatároz egy egyenest
    - 2 különböző egyenes **legfeljebb** 1 pontban metszi egymást
    - 1 ponton keresztül pontosan 1 egyenes megy át, amely nem metsz egy, a pontra nem illeszkedő másik egyenest (párhuzamosság)
  - centrális projekcióra lyukas (ideális pontok)
  - algebrai alap: Descartes koordináta rendszer
- Projektív geometria
  - Projektív sík = Euklideszi sík pontjai + ideális pontok
  - Minden egyeneshez vegyünk hozzá egy ideális pontot úgy, hogy két egyenes akkor kapja u.a. pontot, ha párhuzamos
  - Az egyenesek halmazát egészítsük ki az ideális pontokat tartalmazó egyenessel
    - 2 pont meghatároz egy egyenest
    - 2 különböző egyenes **pontosan** 1 pontban metszi egymást
  - algebrai alap: homogén koordináták

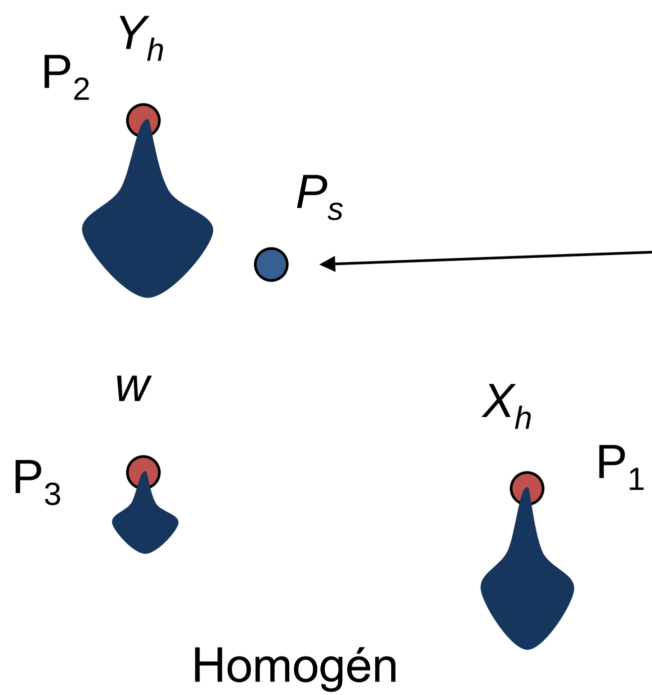
Homogén koordináták

Szemléltetés: mechanikai rendszer súlypontja

Összsúly: $h = X_h + Y_h + w$

Pont homogén koordinátái:

$$\boxed{[X_h, Y_h, h]}$$



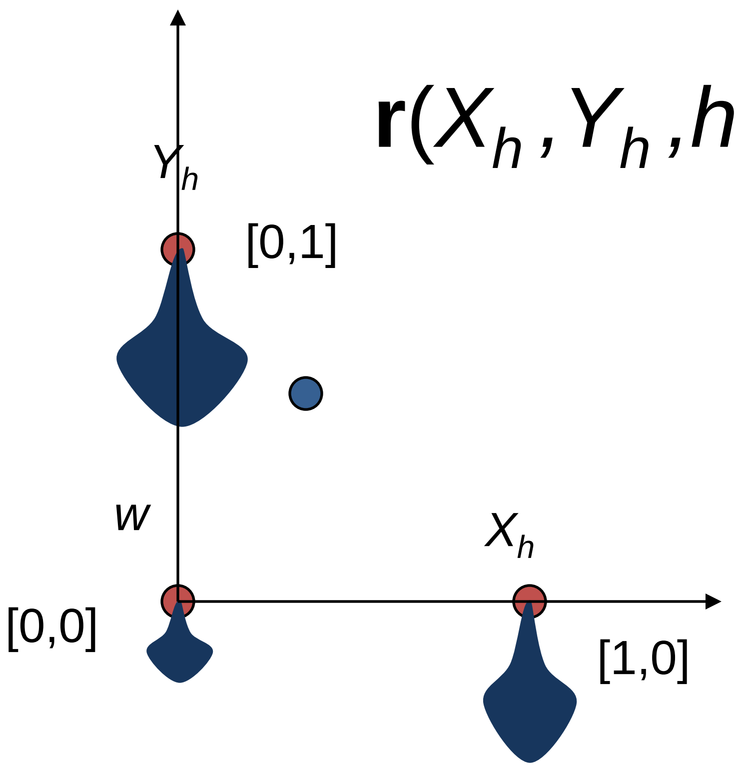
[0,0,0] nem pont

Ha az összsúly h ≠ 0 a súlypont P_s euklideszi pont: $P_s = \dfrac{X_h P_1 + Y_h P_2 + w P_3}{X_h + Y_h + w}$

$[X_h, Y_h, h]$ és $[\lambda X_h, \lambda Y_h, \lambda h]$ súlypontja ugyanaz!

Homogén-Descartes kapcsolat affin pontokra

- Keressük egy adott affin ($h \neq 0$) projektív térbeli pont megfelelőjét az euklideszi térben (azaz a Descartes koordinátarendszerben)
- Súlypont analógia: tegyük a súlyokat i=[1 0], j=[0 1] és 0=[0,0] pontokba, és olvassuk ki a súlypont koordinátáit



$$\mathbf{r}(X_h, Y_h, h) = \frac{X_h[1,0] + Y_h[0,1] + w[0,0]}{h}$$

$$\mathbf{r}(X_h, Y_h, h) = \left(\frac{X_h}{h}, \frac{Y_h}{h} \right)$$

$$\boxed{x = \frac{X_h}{h} \qquad y = \frac{Y_h}{h}}$$

Következmények

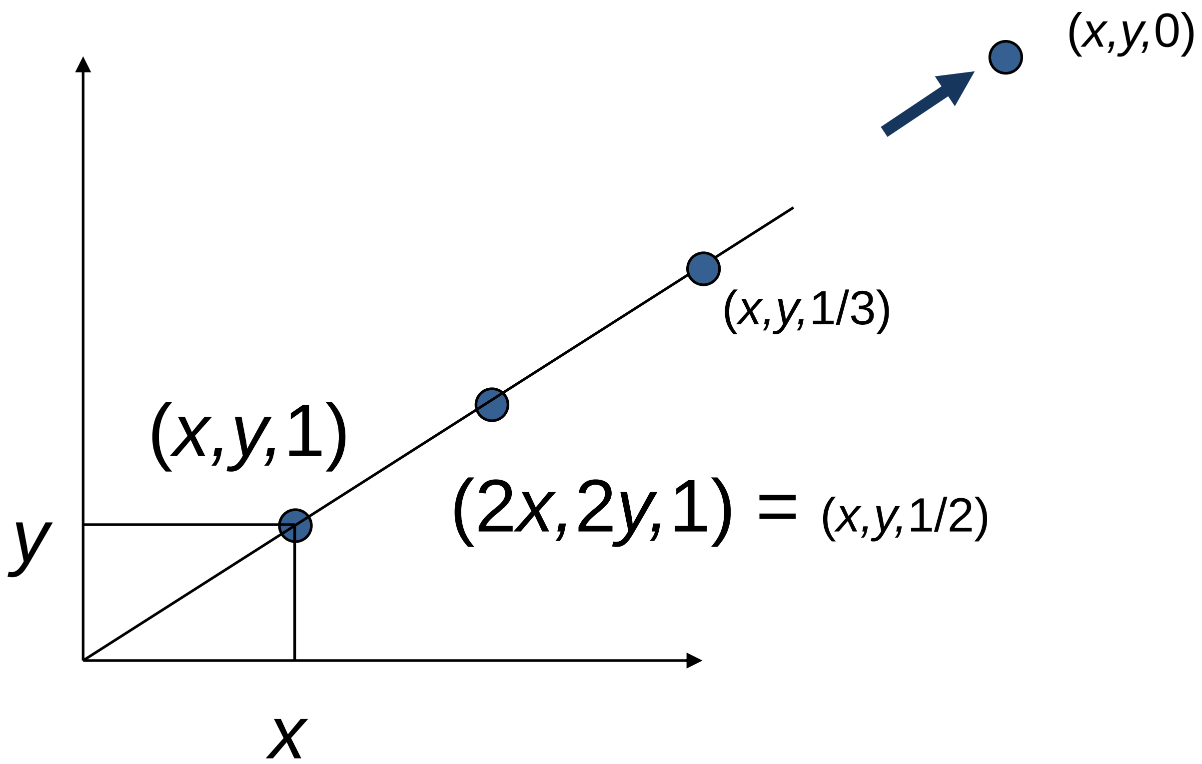
- Minden affin ponthoz van: $[X_h, Y_h, h]$
  - $(x, y) \Rightarrow [x, y, 1]$

- Ha $h \neq 0$, akkor $[X_h, Y_h, h]$ affin pont

$$\left(\frac{X_h}{h}, \frac{Y_h}{h}\right)$$

Mi az ideális pont?

h=0



$$(x, y, 0) \sim \lim_{n\to\infty}(x, y, \tfrac{1}{n})$$

Egyenes egyenlete

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

átírás homogén koordinátás alakra:

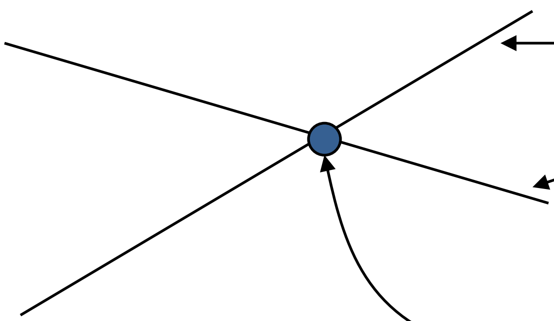
$$\mathrm{a} \cdot \frac{\mathrm{X_h}}{\mathrm{h}} + \mathrm{b} \cdot \frac{\mathrm{Y_h}}{\mathrm{h}} + \mathrm{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot X_h + b \cdot Y_h + c \cdot h = 0$$

(a,b,c): egy egyenes; (X_h, Y_h,h) egy pont

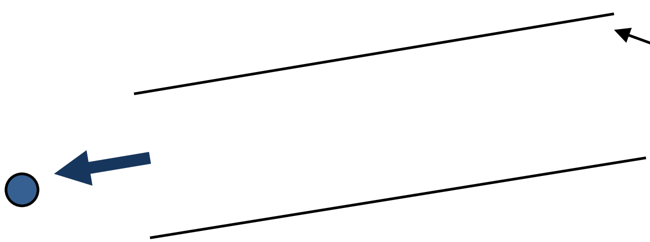
Dualitás: pont és egyenes formailag analóg – az összes pontokra érvényes tétel igaz lesz az egyenesekre

Párhuzamos egyenesek metszéspontja Descartes koordinátákkal

$$a_1/b_1 \neq a_2/b_2$$



$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad x, y$$



$$\left.\begin{aligned} a\,x + b\,y + c_1 &= 0 \\ a\,x + b\,y + c_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

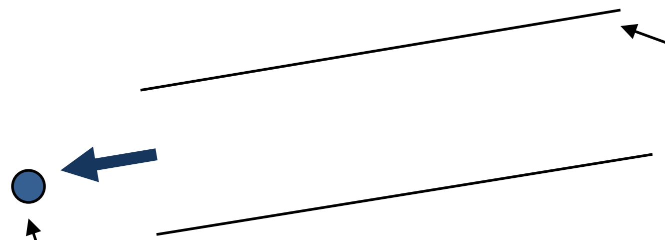
$c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow$ nincs megoldás

Párhuzamos egyenesek metszéspontja homogén koordinátákkal

Descartes: $a\,x + by + c = 0$

$$a\,X_h/h + b\,Y_h/h + c = 0$$

Homogén: $\boxed{a\,X_h + b\,Y_h + c\,h = 0}$



$$\left.\begin{aligned} a\,X_h + b\,Y_h + c_1\,h &= 0 \\ a\,X_h + b\,Y_h + c_2\,h &= 0 \end{aligned}\right\}$$

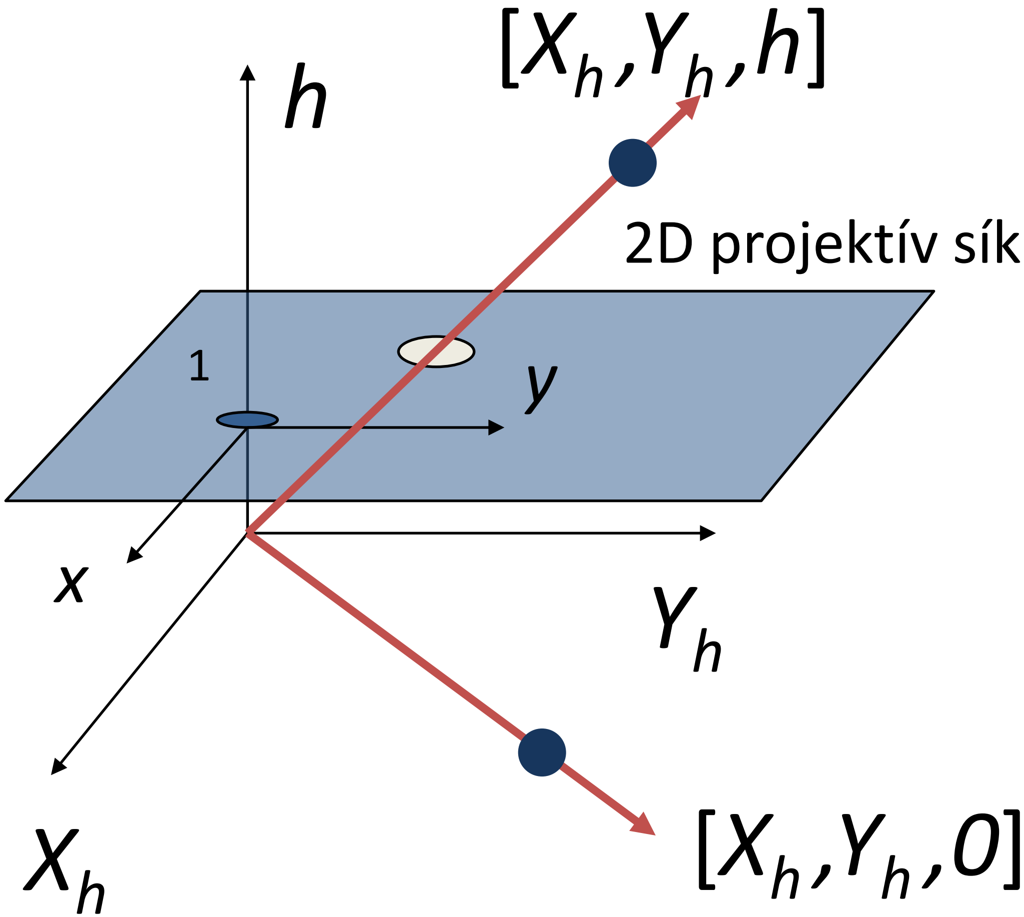
$$\boxed{[b\lambda, -a\lambda, 0]}$$

$$(c_1 - c_2)\,h = 0 \Rightarrow$$

$$h = 0,\ X_h = b\lambda,\ Y_h = -a\lambda$$

Beágyazott modell

3D euklideszi tér

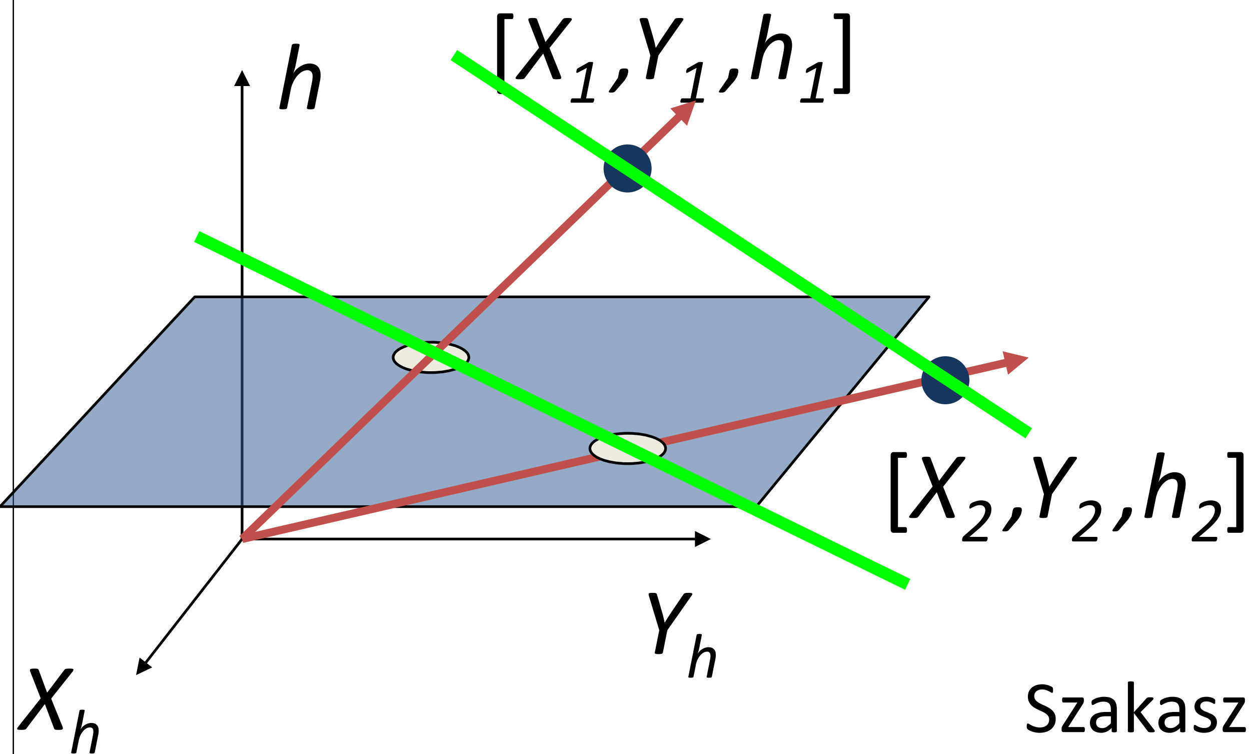


$$(x, y) = \left[\frac{X_h}{h}, \frac{Y_h}{h}\right]$$

$[0,0,0]$ nem pont

$[X_h, Y_h, h] \cdot a$ u.a. pont

Projektív egyenes paraméteres egyenlete



Szakasz: Konvex kombináció!

$$[X(t), Y(t), h(t)] = [X_1, Y_1, h_1] \cdot t + [X_2, Y_2, h_2] \cdot (1-t)$$

Homogén lineáris transzformációk

- Euklideszi sík affin transzformációi:

$$[x', y'] = [x, y]\,\mathbf{A} + \mathbf{p}$$

- Homogén koordináták lineáris függvényei: $[X_h', Y_h', h'] = [X_h, Y_h, h]\,\mathbf{T} + \mathbf{p}$

- Homogén lineáris transzformációk bővebbek:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ p_1 & p_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Homogén lineáris transzformációk tulajdonságai

- Pontot-pontba, egyenest-egyenesbe (pontba), konvex kombinációkat, konvex kombinációkba visznek át

Példa: egyenest egyenesbe:

$$[X(t), Y(t), h(t)] = [X_1, Y_1, h_1]\cdot t + [X_2, Y_2, h_2]\cdot(1-t)$$

$$P(t) = P_1\cdot t + P_2\cdot(1-t) \qquad // \cdot \mathbf{T}$$

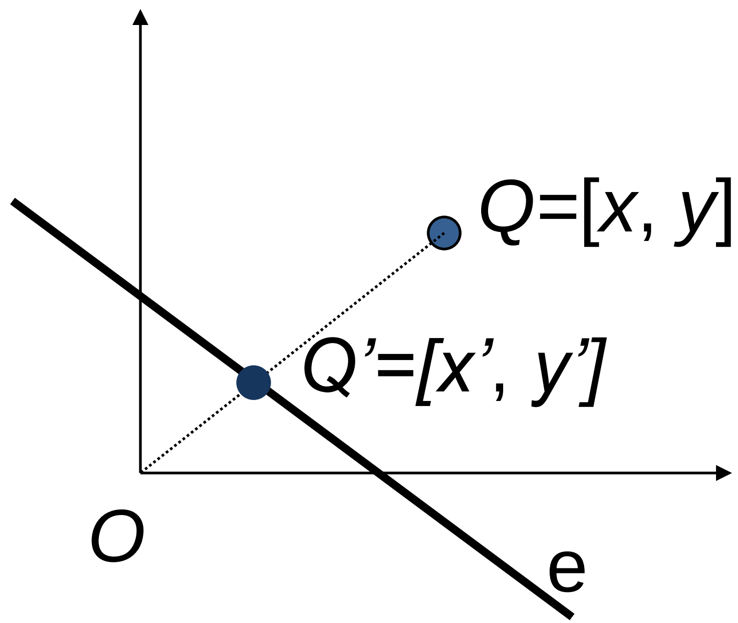
$$P^*(t) = P(t)\cdot\mathbf{T} = (P_1\cdot\mathbf{T})\cdot t + (P_2\cdot\mathbf{T})\cdot(1-t)$$

Példa: Euklideszi geometriában nem lineáris transzformáció: *Q* pont vetítése *e* egyenesre

Q' a OQ egyenesen van $\quad \dfrac{x'}{y'} = \dfrac{x}{y}$

Q' az *e* egyenesen van $\quad px'+qy'=1$

$$\Rightarrow \quad x' = \frac{x}{px+qy} \qquad y' = \frac{y}{px+qy}$$



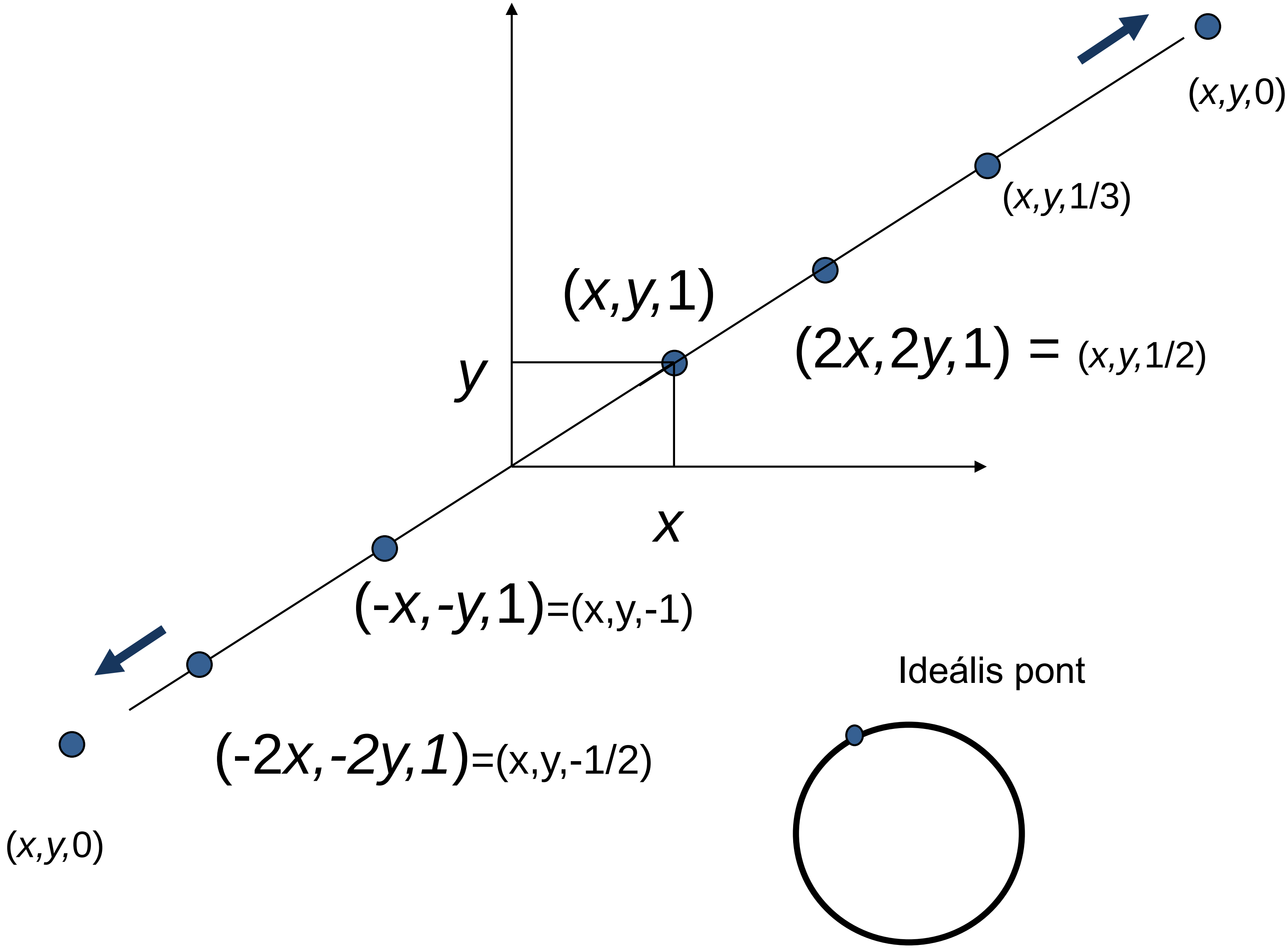
e: $px+qy=1$

Ugyanez mátrixokkal:

$$[x, y, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\,x, \quad y, \quad px+qy]$$

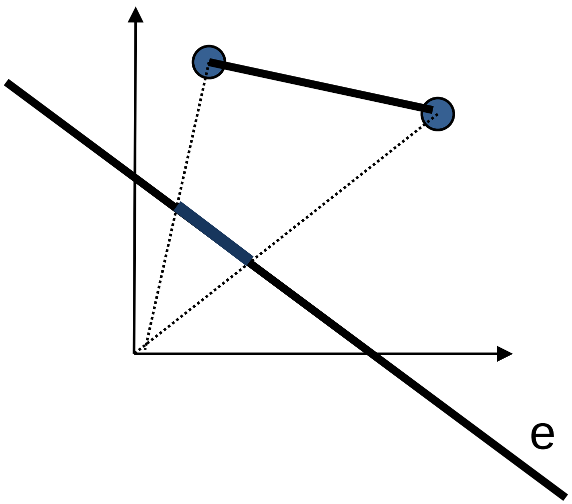
$$\Downarrow$$

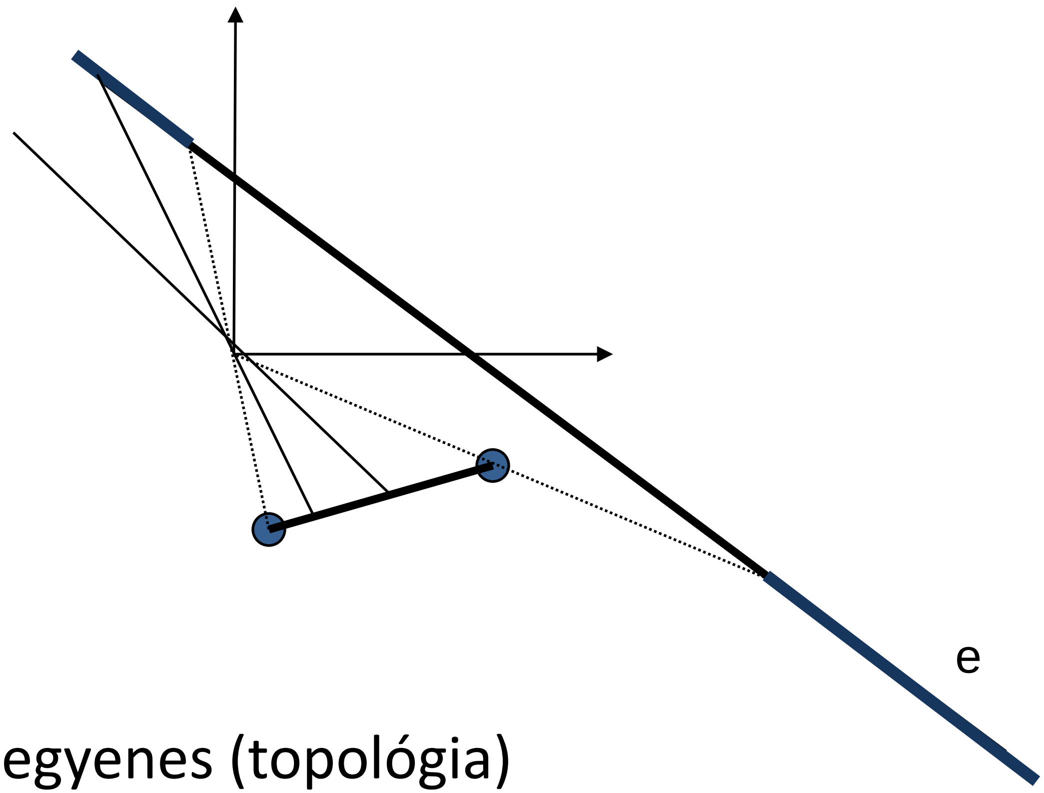
$$\left[\; \frac{x}{px+qy} \quad \frac{y}{px+qy} \;\right]$$

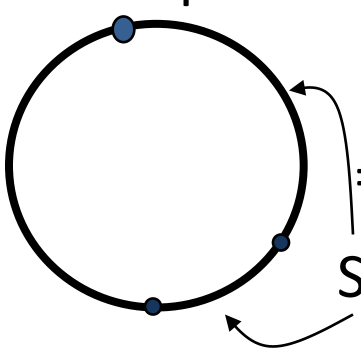


Projektív egyenes: körszerű topológia

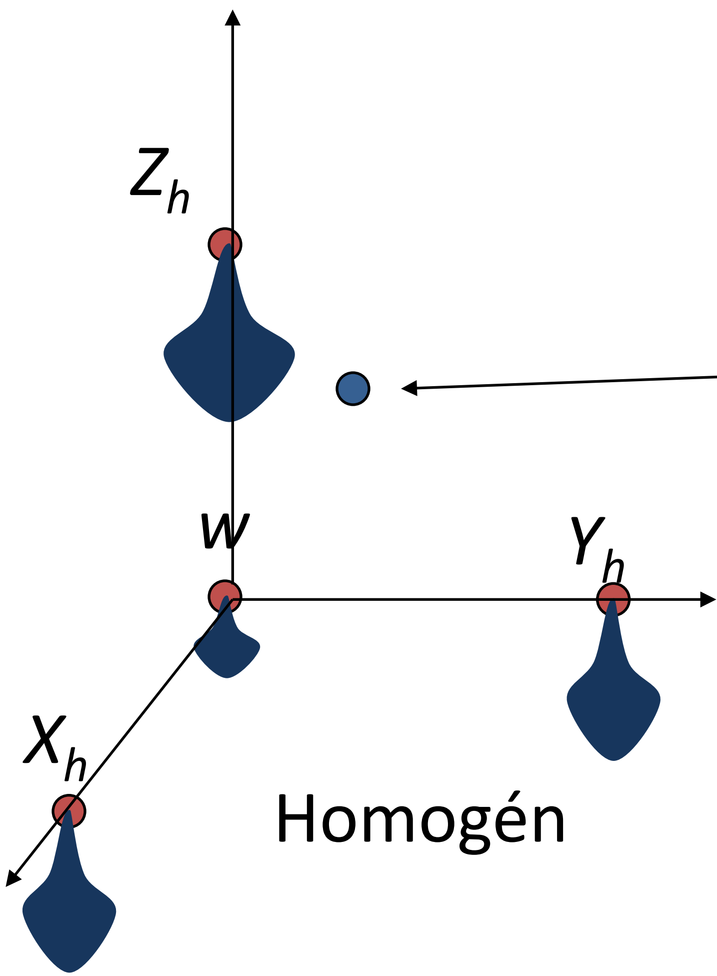
Veszélyek: átfordulási probléma







A projektív tér, 3D pontok homogén koordinátái



Összsúly: $h = X_h + Y_h + Z_h + w$

Pont homogén koordinátái:

$$[X_h, Y_h, Z_h, h]$$

A projektív tér egyenesei és síkjai

- Egyenes:

$$[X(t),Y(t),Z(t),h(t)]=[X_1,Y_1,Z_1,h_1]\cdot t + [X_2,Y_2,Z_2,h_2]\cdot(1-t)$$

- Sík:

Euklideszi, Descartes koord: $n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$

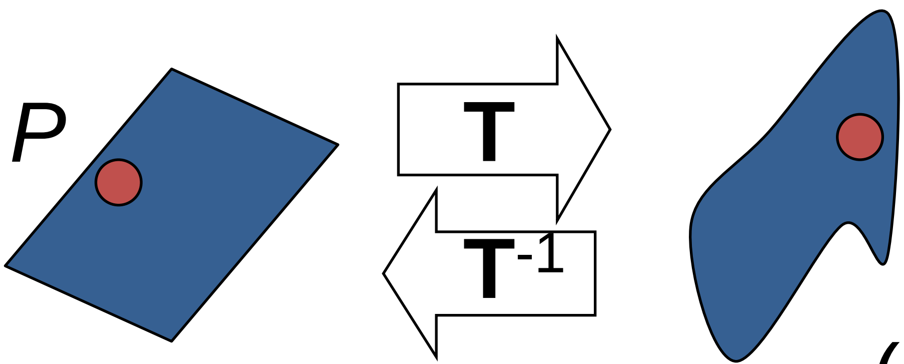
Euklideszi, homogén koord: $n_x X_h/h + n_y Y_h/h + n_z Z_h/h + d = 0$

Projektív:

$$n_x\cdot X_h + n_y \cdot Y_h + n_z \cdot Z_h + d \cdot h = 0$$

$$[X_h, Y_h, Z_h, h]\cdot\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ d \end{pmatrix} = 0$$

Invertálható homogén lineáris transzformációk síkot síkba visznek át



$$P^* = P \cdot \mathbf{T}$$

$$P \cdot N^T = 0$$

$$(P^* \cdot \mathbf{T}^{-1}) \cdot N^T = 0$$

$$P^* \cdot (\mathbf{T}^{-1} \cdot N^T) = 0$$

$$P^* \cdot (N \cdot (\mathbf{T}^{-1})^T)^T = 0$$

$$P^* \cdot N^{*T} = 0$$

$$\boxed{N^* = N \cdot (\mathbf{T}^{-1})^T}$$

Inverse-transpose

Projektív geometria a számítógépes grafikában